Lekcija 0: Kategorije (prvi dio)

www.irb.hr/korisnici/zskoda/snop.html

0.1. Pretpostavlja se da slušači imaju osnovnu predodžbu o razlici medju skupovima i klasama, o neprebrojivosti, aksiomatskim sustavima i da su bar jednom vidjeli ZFC (Zermelo-Frankelova (ZF) aksiomatika teorije skupova s aksiomom izbora AC).

Sjetimo se daje **dobar uredjaj** na skupu S takav linearni uredjaj da svaki podskup $T \subset S$ ima najmanji element. Skup X je **tranzitivan** ako je relacija pripadnosti na njemu tranzitivna, tj. $Z \in Y \in X$ implicira $Z \in X$ ("sa svakim skupom kojeg sadrži, sadrži i sve njegove elemente"). **Ordinal** je tranzitivni skup koji je dobro uredjen. Za bilo koja dva dobro uredjena skupa X, Y vrijedi jedna od tri alternative: X je izomorfan Y, X je izomorfan početnom segmentu od Y ili je Y izomorfan početnom segmentu od X.

Granični ordinali su oni ordinali koji nisu neposredni sljedbenik ni jednog drugog ordinala. Neka je $P(A)$ partitivni skup skupa A. Transfinitnom rekurzijom definiramo skupove V_α gdje je α ordinal:

$V_0 = \emptyset$

$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$

$V_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} V_\beta$ ako je α granični ordinal.

Kardinal je ordinal koji nije bijektivan s ni jednim manjim ordinalom. Svaki kardinal je granični ordinal. Klasa ordinala Ord je dobro uredjena s obzirom na relaciju $\alpha \in \beta$, a isto vrijedi i na potklasu kardinala Card. Aksiom regularnosti je ekvivalentan tvrdnji da je svaki skup element nekog V_α; svi oni zajedno čine klasu koja se zove von Neumannov univerzum $\mathcal{V}$.

Beskonačni kardinal κ je **regularan** ako nije unija $< \kappa$ skupova kardinalnosti manje od κ. Kardinal κ je **jako granični** ako $\lambda < \kappa$ implicira $2^\lambda < \kappa$ (tj. ako mu je x element onda mu je i partitivni skup $P(x)$ element). Nedosezivi (engl. *inaccessible*) kardinali su neprebrojivi jako granični regularni kardinali.

Ne samo da ZFC ne implicira postojanje nedosezivih kardinala, nego u ZFC ne možemo ni dokazati konzistenciju dodatnog aksioma da nedosezljivi kardinali postoje. Ukoliko postoji nedosezljivi kardinal, onda postoji beskonačno puno nedosezljivih kardinala koji su veći od njega.

Grothendieckov univerzum $\mathcal{U}$ je skup oblika V_α gdje je α nedosezljivi kardinal. Dakle *aksiom o postojanju Grothendieckovih univerzuma* kojeg ćemo mi prihvaćati u ovom kolegiju, je ekvivalentan aksiomu o postojanju nedosezljivih kardinala. Bilo koji element Grothendieckovog univerzuma $\mathcal{U}$ se naziva $\mathcal{U}$-malenim skupom.

Alternativno, Grothendieckov univerzum je tranzitivan skup zatvoren s obzirom na formiranje parova, unija familija podskupova indeksiranim bilo kojim svojim elementom i na operaciju partitivnog skupa. S druge strane, svaki Grothendieckov univerzum (ako postoji) je model ZFC.

0.2. **Veliki graf** $\mathcal{G}$ se sastoji od klase vrhova (objekata) $\mathrm{Ob}\,\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$, klase bridova (morfizama, strelica) $\mathrm{Mor}\,\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$, te dviju funkcija $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} : \mathrm{Mor}\,\mathcal{G} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{G}$ (domena i kodomena), koje ćemo takodjer označavati i s $s = \mathrm{dom}, t = \mathrm{cod}$

(izvor i ponor). Ako je $f \in \mathcal{G}_1$, $x, y \in \mathcal{G}$ s $f : x \to y$ označavamo sud ($x = \mathrm{dom} f$ i $y = \mathrm{cod} f$). Par $f = (f_0, f_1)$ preslikavanja $f_k : \mathcal{G}_k \to \mathcal{H}_k$, $k = 1, 2$ je **morfizam velikih grafova** ako $\mathrm{cod}^{\mathcal{H}} \circ f_1 = f_0 \circ \mathrm{cod}^{\mathcal{G}}$ i $\mathrm{dom}^{\mathcal{H}} \circ f_1 = f_0 \circ \mathrm{dom}^{\mathcal{G}}$. U praksi ćemo često pisati neprecizno f ne samo za par (f_1, f_2) nego i za f_0 i f_1, npr. ako je $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{G}$, $f(C)$ označava zapravo $f_1(C)$.

Za dva preslikavanja $a : X \to Z$, $b : Y \to Z$, s $X\,{}_a{\times}_b\,Y$ ili, ako a, b podrazumijevamo, s $X \times_Z Y$ označavamo klasu

$$X\,{}_a{\times}_b\,Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid a(x) = b(y)\}.$$

S tom klasom prirodno su zadane projekcije p_k, $k = 1, 2$ s $X\,{}_a{\times}_b\,Y$ redom na prvu i drugu komponentu X i Y kao restrikcija projekcija s kartezijevog produkta $X \times Y$ klasa. Notacija $\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_0$ će uvijek podrazumijevati da je preslikavanje iz $\mathcal{C}_1$ u $\mathcal{C}_0$ domena ako je slijeva i kodomena ako je zdesna, te identiteta $\mathrm{id} : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_0$.

0.3. Kategorija $\mathcal{C}$ je veliki graf s dvije funkcije $m : \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_{\mathrm{dom}} \times_{\mathrm{cod}} \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$, $i : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ (kompozicija i jedinica) gdje je u $(g, f) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ tj. onih za koje je $\mathrm{cod} f = \mathrm{dom} g$ s aksiomima navedenim niže. $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_{\mathrm{dom}} \times_{\mathrm{cod}} \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ je klasa kompozabilnih parova morfizama, analogno za n-torke.

Zahtijevamo asocijativnost kompozicije

$$m \circ (m \times_{\mathcal{C}_0} \mathrm{id}) = m \circ (\mathrm{id} \times_{\mathcal{C}_0} m)$$

na klasi $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_{\mathrm{dom}} \times_{\mathrm{cod}} \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}_{\mathrm{dom}} \times_{\mathrm{cod}} \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ svih kompozabilnih trojki, aksiom jedinice

$$m \circ (i \times_{\mathcal{C}_0} \mathrm{id}) = m \circ (\mathrm{id} \times_{\mathcal{C}_0} i) = \mathrm{id} : \mathcal{C}_1 \cong \mathcal{C}_0 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \cong \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$$

te identiteti

$$\begin{aligned} s \circ i &= t \circ i = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_0}, \\ s \circ m &= s \circ p_1,\ t \circ m = t \circ p_2 : \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1 \end{aligned}$$

Ako je $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ označavamo $\mathrm{id}_C := i(C) : C \to C$ i zovemo **identitetom**, ili identičkim morfizmom objekta C.

Lokalno mala kategorija je kategorija takva da je za svaka dva objekta $x, y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ klasa $\hom(x, y) = \{z | \mathrm{dom} z = x, \mathrm{cod} z = y\}$ skup. U praktičnoj matematici se često podrazumijeva da se razmatraju samo lokalno malene kategorije, no mi ćemo gledati i lokalno velike.

Ako je $\mathcal{U}$ Grothendieckov univerzum, tada je $\mathcal{U}$-malena kategorija bilo koja kategorija čije su klase morfizama i objekata $\mathcal{U}$-maleni skupovi. $\mathcal{U}$-kategorija je bilo koja kategorija čiji su svi objekti i svi morfizmi u $\mathcal{U}$ (bez ponavljanja). Npr. kategorija $\mathbf{Set}_{\mathcal{U}}$ svih $\mathcal{U}$-malenih skupova i njihovih preslikavanja je $\mathcal{U}$-kategorija, nije $\mathcal{U}$-mala ali je lokalno $\mathcal{U}$-mala. Ona je $\mathcal{U}'$-mala za bilo koji Grothendieckov univerzum $\mathcal{U}'$ veći od $\mathcal{U}$.

0.4. Elementi klasa $\mathcal{C}_0$ i $\mathcal{C}_1$ nazivaju se **objekti** i **morfizmi**. Kažemo da je veliki graf (kategorija) $\mathcal{C}$ **graf** (**mala kategorija**) ako je $\mathcal{C}_0$ skup. **Izomorfizam** ili

invertibilni morfizam $f : a \to b$ je morfizam za koji postoji inverz $g : b \to a$, tj. $f \circ g = \mathrm{id}_b$ i $g \circ f = \mathrm{id}_a$. Dva objekta $a, b \in \mathcal{C}_0$ su **izomorfni** ako postoji izomorfizam $f : a \to b$. Svaka identiteta je izomorfizam. **Groupoid** je mala kategorija čiji su svi morfizmi invertibilni.

$f : A \to B$ je **epimorfizam** (epi) takav da za svaka dva morfizma $g, g' : B \to C$, $g' \circ f = g \circ f$ implicira $g' = g$ (desna skrativost). f je **monomorfizam** (mono) ako za svaka dva morfizma $h, h' : D \to A$, $f \circ h = f \circ h'$ implicira $h = h'$. f is **bimorfizam** ako je i epi i mono. Svaki izomorfizam je bimorfizam. Kategorija je **balansirana** ako je i svaki bimorfizam izomorfizam.

0.4.1. (Zadatak 0.0) a) Pokaži da je prirodno ulaganje $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ epimorfizam u kategoriji unitalnih prstena i homomorfizama unitalnih prstena.

b) Kategorija skupova i preslikavanja skupova **Set** je balansirana.

0.5. Ako je $\mathcal{C}$ kategorija, **dualna kategorija** $\mathcal{C}^0$ je jedinstvena kategorija takva da je $(\mathcal{C}^0)_0 = \mathcal{C}_0$, $(\mathcal{C}^0)_1 = \mathcal{C}_1$ (s oznakama x^0 i f^0 za x i f kad su u dualnoj kategoriji) s $\mathrm{dom}^0 = \mathrm{cod}, \mathrm{cod}^0 = \mathrm{dom} : (\mathcal{C}^0)_1 \to \mathcal{C}_0$, $m^0 = m \circ \tau$ gdje je $\tau : (\mathcal{C}^0)_1 \times_{(\mathcal{C}^0)_0} (\mathcal{C}^0)_1 \to \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1$ kanonska bijekcija medju klasom kompozabilnih i klasom $(\text{kompozabilnih})^0$ morfizama $(f, g) \mapsto (g, f)$.

0.5.1. (Zadatak 0.1) Dokaži da je dualna kategorija dobro definirana kategorija.

0.6. Objekt $x \in \mathcal{C}_0$ je (univerzalni) **inicijalni** (redom **terminalni**) objekt ako za svaki $y \in \mathcal{C}_0$ postoji jedinstveni morfizam $f : x \to y$ (redom $f : y \to x$). Terminalni objekt x se naziva takodjer finalnim ili konačnim; x je očito terminalni u $\mathcal{C}$ akko je x^0 inicijalni u $\mathcal{C}^0$.

0.6.1. (Zadatak 0.2) Inicijalni objekt, ako postoji, je jedinstven do na izomorfizam.

0.7. Funktor je morfizam $F = (F_0, F_1) : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ pripadnih velikih grafova koji komutira s kompozicijom, tj. $c^{\mathcal{H}} \circ (F_1 \times F_1) = F_1 \circ c^{\mathcal{G}} : \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1$. Domena i kodomena funktora F su, naravno, $\mathcal{G}$ i HH respektivno. Funktor $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ je **vjeran (pun, ulaganje kategorija)** ako je $F_1|_{\mathrm{Hom}(x,y)}$ injekcija (redom: surjekcija, bijekcija) za svaki par objekata $x, y \in \mathcal{G}_0$. Ponekad se govori i "kovarijantni funktor iz $\mathcal{G}$ u $\mathcal{H}$". **Kontravarijantni funktor** G iz $\mathcal{G}$ u $\mathcal{H}$ označava po definiciji (kovarijantni) funktor $G : \mathcal{G}^0 \to \mathcal{H}$. **Endofunktor** u $\mathcal{C}$ je funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

0.8. Potkategorija $(\mathcal{C}, j)$ kategorije $\mathcal{D}$ je uredjeni par kategorije $\mathcal{C}$ i vjernog funktora $j : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Potkategorija u užem smislu je potkategorija za koju su $j_k : \mathcal{C}_k \subset \mathcal{D}_k$ za $k = 1, 2$, kanonska ulaganja podskupova. Potkategorija je **puna** ako je j ulaganje kategorija, tj. puni i vjeran funktor.

0.8.1. (Zadatak 0.3) Za svaku potklasu $P \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ postoji jedinstvena puna potkategorija $\mathcal{P}$ u užem smislu, takva da je $\mathrm{Ob}\,\mathcal{P} = P$ i $\mathrm{Mor}\,\mathcal{P} \subset \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$. Kažemo da je $\mathcal{P}$ puna potkategorija kategorije $\mathcal{D}$ *generirana* klasom objekata P.

0.9. Za dva funktora $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, **(prirodna) transformacija** $\alpha : F \Rightarrow G$ je funkcija $\alpha : \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$, gdje je $\alpha_C := \alpha(C) : F_0(C) \to G_0(C)$ te za svaki morfizam $f : C \to C'$ u $\mathcal{C}$, slijedeći dijagram "prirodnosti" komutira

$$\begin{tikzcd}
F_0(C) \arrow[r, "F_1(f)"] \arrow[d, "\alpha_C"'] & F_0(D) \arrow[d, "\alpha_D"] \\
G_0(C) \arrow[r, "G_1(f)"] & G_0(D).
\end{tikzcd}$$

α_C je C-**komponenta** transformacije α. Prirodnu transformaciju čije su sve komponente izomorfizmi zovemo **(prirodni) izomorfizam funktora**.

0.10. Par funkcija $(\mathrm{id}_{\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}, \mathrm{id}_{\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}})$ čini **identični funktor** $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ponekad označen $\mathcal{C}$. Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je **izomorfizam kategorija** ako postoji funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ koji mu je striktni inverz, tj. $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ i $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je **ekvivalencija kategorija** ako postoje funktor $H : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ i prirodni izomorfizmi funktora $\alpha : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to H \circ F$ i $\beta : \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \to F \circ H$. Dvije kategorije $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ su ekvivalentne ako postoji ekvivalencija $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Ekvivalencija malih kategorija je relacija ekvivalencije na klasi svih malih kategorija. Kategorija $\mathcal{C}$ je **skeletalna** ako za su bilo koja dva medjusobno izomorfna objekta u $\mathcal{C}$ jednaka.

0.10.1. (Zadatak 0.4) Ukoliko prihvatimo aksiom izbora, tada za svaku kategoriju $\mathcal{C}$ postoji skeletalna kategorija $\mathcal{D}$ ekvivalentna kategoriji $\mathcal{C}$. Izbor $\mathcal{D}$ je jedinstven do na izomorfizam kategorija i zovemo ga **skeleton** kategorije $\mathcal{C}$.

0.10.2. Funktor $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ je **esencijalno surjektivan (na objektim)** (kratica e.s.o.) ako za svaki objekt H u $\mathcal{H}$ postoji objekt G u $\mathcal{G}$ i isomorfizam $F(G) \stackrel{cong}{\to} H$.

0.10.3. Theorem. *Funktor je ekvivalencija akko je potpun, vjeran i esencijalno surjektivan.*

0.11. Kategorija **Cat**. Objekti u **Cat** su male kategorije. Morfizmi su funktori, a kompozicija je **kompozicija funktora** dana s $F \circ G = (F_0, F_1) \circ (G_0, G_1) := (F_0 \circ G_0, F_1 \circ G_1)$ gdje su kompozicije s lijeve strane kompozicije funkcija skupova. **Bifunktor** je funktor čija je domena kartezijev produkt dviju kategorija.

0.12. Neka su $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dvije kategorije. **Kartezijev produkt** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ je kategorija zadana s $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, $\mathrm{Mor}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$, $s(c,d) = (s^{\mathcal{C}}(c), s^{\mathcal{D}}(d))$, $t(c,d) = (t^{\mathcal{C}}(c), t^{\mathcal{D}}(d))$ i $(f,g) \circ (f',g') = (f \circ^{\mathcal{C}} f', g \circ^{\mathcal{D}} g')$, za sve $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, d \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}, f, f' \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}, g, g' \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$. Ova definicija se na očit način poopćava na kartezijev produkt bilo koje (male) familije kategorija.

0.13. Dijagram $d : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ u kategoriji $\mathcal{C}$ je funktor iz male kategorije $\mathcal{D}$ u kategoriju $\mathcal{C}$. Fiksirajmo malu kategoriju $\mathcal{D}$. **Konus** tipa d u kategoriji $\mathcal{C}$ je prirodna transformacija $\gamma : \mathrm{const}_x \Rightarrow d$ gdje je $\mathrm{const}_x : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ konstantni funktor $D \mapsto x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Objekt x je **vrh konusa** γ. **Kokonus** tipa d u kategoriji $\mathcal{C}$ je konus tipa $\mathcal{D}$ u kategoriji $\mathcal{C}^0$.

Konusi tipa d u kategoriji $\mathcal{C}$ čine klasu objekata $\mathrm{Ob}\,\mathrm{cone}(d,\mathcal{C})$. Morfizam konusa $f:\alpha\to\beta$ je morfizam $s:x\to y$ u $\mathcal{C}$ gdje je x vrh konusa α, y vrh konusa β i za svaki $D\in\mathcal{D}$, $\beta_D\circ s=\alpha_D$. Morfizmi konusa tipa d čine klasu $\mathrm{Mor}\,\mathrm{cone}(d,\mathcal{C})$. Kompozicija morfizama konusa je kompozicija pripadnih morfizama u $\mathcal{C}$. Time je definirana kategorija $\mathrm{cone}(d,\mathcal{C})$; analogno se definira kategorija kokonusa $\mathrm{cocone}(d,\mathcal{C})=\mathrm{cone}(d,\mathcal{C}^0)$. Terminalni objekt kategorije konusa tipa d je **univerzalni konus** ili **limes** dijagrama d; njegov vrh se označava s $\lim d$; inicijalni objekt kategorije kokonusa tipa d je **univerzalni kokonus** ili **kolimes** dijagrama d čiji vrh označavamo s $\mathrm{colim}\,d$. Ponekad se pod limesom (kolimesom) dijagrama neprecizno podrazumijeva njegov vrh.

Prirodnu transformaciju funktora $\alpha:d\Rightarrow d':\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ zovemo morfizam dijagrama. Dijagrami i prirodne transformacije čine kategoriju $\mathrm{Nat}(\mathcal{D},\mathcal{C})$. Ukoliko umjesto dijagrama gledamo velike kategorije, tada analogna kategorija nije dobro definirana.

Ako je $\alpha:d\Rightarrow d'$ morfizam dijagrama i $s:\mathrm{const}_x\Rightarrow d$ konus nad dijagramom d, tada je $\alpha\circ s:\mathrm{const}_x\Rightarrow d'$ konus nad dijagramom d'. Ako je $s'=\lim d'$ univerzalni konus nad d' s vrhom x' tada po univerzalnom svojstvu limesa postoji jedinstveni morfizam $x\to x'$ koji je ujedno morfizam konusa nad d'. Taj morfizam označavamo s $\lim\alpha$.

(Zadatak 0.5) Dokaži da je ta korespodencija funktorijalna:
$\lim:\mathrm{Nat}(\mathcal{D},\mathcal{C})\to\mathcal{C}$ je funktor; $\mathrm{colim}:\mathrm{Nat}(\mathcal{D},\mathcal{C})^0\to\mathcal{C}$ je funktor.

0.14. Kategorija $\mathcal{C}$ je **diskretna** ako je jedinica $i:\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\to\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ bijekcija. Očito je svaka diskretna kategorija skeletalna, ali ne i obratno. Za svaku klasu S postoji kategorija $\mathrm{Disc}(S)$, jedinstvena do na izomorfizam kategorija, čija klasa objekata je S (kanonski reprezentant te klase ima i istu klasu morfizama, gdje je jedinica identiteta $\mathrm{id}_S:S\to S$). Primijeti da se, sa skupova S, korespodencija $S\mapsto\mathrm{Disc}(S)$ može proširiti do funktora $\mathbf{Set}\to\mathbf{Cat}$.

Neka je A skup, i $\{s_a, a\in A\}$ (mala) familija objekata $s_a\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ (tj. funkcija $s:A\to\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$). **Produkt** $(\prod_{a\in A}s_a,p)$ je limes funktora $\mathrm{Disc}(A):\mathrm{Disc}(S)\to\mathcal{C}$, ako postoji (ili njegov vrh). Komponente univerzalnog konusa $p_b:\prod_a s_a\to s_b$ se zovu **kanonske projekcije** produkta. Koprodukt je kolimes funktora $\mathrm{Disc}(A):\mathrm{Disc}(S)\to\mathcal{C}$; vrh univerzalnog konusa se označava s $\coprod_{a\in A}s_a$ a njegove komponente $i_b:s_b\to\coprod_{a\in A}s_a$ se zovu **kanonske injekcije** koprodukta.

0.14.1. (Zadatak 0.6) Produkt male familije objekata u **Cat** je kanonski izomorfan njihovom kartezijevom produktu.

0.15. Morfizmi f,g su **paralelni** ako imaju istu domenu i kodomenu. Dijagram oblika $A\xrightarrow{h}B\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}C$ nazivamo **vilica** ukoliko $f\circ h=g\circ h$; očito vilica odgovara konusu nad paralelnim parom $B\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}C$. Univerzalna vilica, tj. limes paralelnog para naziva se i **ujednačitelj** (am. engl. **equalizer**). Analogno, kolimes univerzalnog para $B\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}C\xrightarrow{u}D$ nazivamo **koujednačitelj**. Kategorija $\mathcal{C}$ je **(ko)zatvorena** ako ima (ko)limese svih malih dijagrama $d:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$. Kategorija je **konačno zatvorena** ako ima (ko)limese svih konačnih dijagrama (dijagrama s konačno mnogo objekata i konačno mnogo morfizama).

0.16. Theorem. *Kategorija $\mathcal{C}$ je (konačno) zatvorena akko ima sve (konačne) produkte i ujednačitelje svih paralelnih parova. Kategorija je (konačno) kozatvorena ako ima sve (ko)načne koprodukte i koujednačitelje.*

Dokaz. Po dualnosti je dovoljno pokazati slučaj kolimesa. Netrivijalan smjer je da je postojanje produkata (redom, konačnih produkata) i koujednačitelja dovoljno za postojanje svih limesa. Promatrajmo dakle proizvoljni dijagram $d : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Po pretpostavci postoje produkti $P = \prod_{D\in\mathcal{D}_0} d(D)$ i $Q = \prod_{(f:D\to D')\in\mathcal{D}_1} d(D')$ s projekcijama $p_D : P \to d()$ i $q_f : Q \to d(\mathrm{cod} f)$. Po univerzalnom svojstvu produkta Q postoje jedinstveni paralelni par $F, G : P \to Q$ takav da $p_{\mathrm{cod} f} = q_f \circ F$ i $f \circ p_{\mathrm{dom} f} = q_f \circ G$ za sve f u $\mathcal{D}(D, D')$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "p_{D'}"'] & Q \arrow[d, "q_f"] \\ & D' \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "G"] \arrow[d, "p_D"'] & Q \arrow[d, "q_f"] \\ D \arrow[r, "f"] & D' \end{tikzcd}$$

Neka je $u : A \to P$ ujednačitelj tog para. Tvrdnja: $p_D \circ u : A \to d(D)$ je komponenta projekcije limesa $\lim d$ u D. Najprije provjeravamo da te projekcije zaista čine konus:

$$f \circ p_{\mathrm{dom} f} \circ u = q_f \circ G \circ u = q_f \circ F \circ u = p_{\mathrm{cod} f} \circ u : A \to d(\mathrm{cod} f).$$

Neka su $w_D : B \to d(D)$ komponente bilo kojeg drugog konusa nad d; dakle $f \circ w_{\mathrm{dom} f} = w_{\mathrm{cod} f}$ for all $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$. Po univerzalnom svojstvu produkta P postoji jedinstveni morfizam $v : B \to P$ takav da $p_D \circ v = w_D$ za sve $D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$. Po definiciji F i G,

$$q_f \circ F \circ v = p_{D'} \circ v = w_{D'} = f \circ w_D = f \circ p_D \circ v = q_f \circ G \circ v, \tag{1}$$

što po univerzalnom svojstvu produkta Q implicira $F \circ v = G \circ v$, tj.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "v"] & P \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, shift right, "G"'] & Q \end{tikzcd}$$

je vilica. Stoga, po univerzalnosti ujednačitelja (A, u), postoji jedinstveni morfizam $z : B \to A$ tako da je $u \circ z = v : B \to P$. No posljednja jednakost je ekvivalentna (po univerzalnom svojstvu produkta P) familiji identiteta $p_D \circ u \circ z = p_D \circ v$ gdje D ide po $\mathcal{D}_0$. Potonji uvjet se može napisati kao $(p_D \circ u) \circ z = w_D$; stoga je z, pri tome jedinstveni, morfizam iz konusa (B, w_D) u konus $(A, p_D \circ u)$; dakle $(A, p_D \circ u)$ je limes početnog dijagrama d.

0.17. Korolar. *Kategorija skupova* **Set** *je zatvorena i kozatvorena kategorija.*

Skica dokaza. Dovoljno je pokazati da je (kategorijski) produkt familije skupova A_i njihov Kartezijev produkt s prirodnim projekcijama $p_i : \times_j A_j \to A_i$ te da je ujednačitelj dva preslikavanja $f, g : A \to B$ skup $\{a in A | f(a) = g(a)\}$.

0.18. Neka je $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktor ($\mathcal{D}$ sad nije nužno malena kategorija). Par (r, u) gdje je r objekt u $\mathcal{D}$ i $u : c \to Sr$ morfizam u $\mathcal{C}$, zovemo **univerzalna strelica** ako za svaki objekt d u $\mathcal{D}$ i svaki $f : c \to Gd$ postoji jedinstveni morfizam $f' : r \to d$ tako da je $Gf' \circ u = f$.

0.19. Primjer. Neka je **Grp** kategorija grupa i homomorfizama grupa, **Set** kategorija skupova i za svaki skup S neka je FS slobodna grupa s bazom S, te U : **Grp** $\to$ **Set** "zaboravni" funktor koji grupi pridružuje njen pripadni skup. Tada je za svaki skup S, par skupa S i prirodnog ulaganja baze S u FS kao morfizam skupova univerzalna strelica.

0.20. (Notacija) Kompoziciju funktora ćemo često označavati konkatenacijom. Za danu transformaciju $\alpha : F \Rightarrow G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i funktor $H : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ s $\alpha H = \alpha_H : FH \Rightarrow GH : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ označavamo transformaciju s komponentama $(\alpha_H)_A := \alpha_{H(A)}$. Ako je $L : \mathcal{D} \to \mathcal{G}$ funktor tada s $L\alpha = L(\alpha) : LF \Rightarrow LG : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ označavamo transformaciju s komponentama $(L\alpha)_C := L(\alpha_C)$. U praksi često s $\mathcal{C}(C, C')$ označavamo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$.

0.21. Neka su $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $U : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dva funktora. Par prirodnih transformacija $\eta : \mathrm{id} \Rightarrow UF$, $\epsilon : FU \Rightarrow \mathrm{id}$ su redom **jedinica** i **kojedinica adjunkcije** ako vrijede "trokutni" identiteti $U(\epsilon) \circ \eta_U = \mathrm{id}_U$, $\epsilon_F \circ F(\eta) = \mathrm{id}_F$. Tada kažemo da je funktor F **lijevo adjungiran** funktoru U ili, ekvivalentno, da je funktor U **desno adjungiran** funktoru F i pišemo $F \dashv U$.

0.22. Propozicija. *$F \dashv U$ akko postoji (bi)prirodni izomorfizam bifunktora $b : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}, U) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, \mathrm{Id}) : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to$ **Set** tj. za svaki par objekata C iz $\mathcal{C}$, D iz $\mathcal{D}$ možemo izabrati bijekciju $b_{C,D} : \mathcal{C}(C, UD) \cong \mathcal{D}(FC, D)$ i te bijekcije su prirodne u oba argumenta.*

Dokaz. Pretpostavimo da je dana adjunkcija. Kojedinica adjunkcije η inducira preslikavanje $b_{C,D}$ formulom $b_{C,D}(f) = \epsilon_D \circ Ff$, a jedinica njen inverz $g \mapsto Ug \circ \eta_C$. Trokutne relacije impliciraju da su te dvije funkcije zaista inverzi. Prirodnost nije teško provjeriti.

Obratno, ako je zadana biprirodni izomorfizam b, tada je jedinica adjunkcije dana s $\eta_C = b^{-1}_{C,FC}(\mathrm{id}_{FC}) : C \to UFC$, a kojedinica adjunkcije s $\epsilon_D = b_{UD,D} \circ \mathrm{id}_{UD} : FUD \to D$.

(Zadatak 0.7) Ispuni preostale detalje ovog dokaza.

0.23. Propozicija. *Neka je $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ekvivalencija kategorija. Tada postoji adjunkcija $F \dashv G$ čija su jedinica i kojedinica izomorfizmi.* Drugim riječima, svaka ekvivalencija se može zamijeniti adjungiranom ekvivalencijom.

0.24. Neka je $\mathcal{S}$ neka standardna kategorija (npr. kategorija skupova), a $\mathcal{C}$ kategorija. Tipičan primjer kategorije $\mathcal{C}$ u tom kontekstu je kategorija $\mathrm{Ouv}(X, \tau)$ otvorenih skupova i ulaganja otvorenih skupova u topološkom prostoru (X, τ). Funktor $\mathcal{C}^0 \to \mathcal{S}$ se naziva **Predsnop na $\mathcal{C}$ s vrijednostima u $\mathcal{S}$** je bilo koji kontravarijantni funktor iz $\mathcal{C}$ u $\mathcal{S}$. **Reprezentabilan predsnop** je predsnop skupova koji je izomorfan predsnopu oblika $h_C = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}, C)$. **Mali predsnop skupova** je predsnop koji je izomorfan limesu nekog dijagrama reprezentabilnih predsnopova.

0.25. Neka je $\mathcal{D}$ mala kategorija, a $\mathcal{C}$ kategorija. Kategorija funktora i prirodnih transformacija $\mathrm{Nat}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ se ponekad označava eksponencijalnom notacijom $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$. Ukoliko $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ i $\mathcal{D}$ mala, tada se s $\hat{\mathcal{D}} := \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^0}$ označava kategorija predsnopova skupova na $\mathcal{D}$. Ako $\mathcal{D}$ nije mala, tada ili $\mathbf{Set}$ zamijenimo s $\mathbf{Set}_{\mathcal{U}}$, ili gledamo samo male predsnopove.

0.26. Definicija. *Korespodencija*

$$h : D \mapsto h_D := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, D),\ \ D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D},\ \ h(f)(g) = f \circ g : C \to E,$$

gdje su $f : D \to E$, $g : C \to E$ *morfizmi u* $\mathcal{D}$ *je funktor* $h : \mathcal{D} \to \hat{\mathcal{D}}$ *kojeg nazivamo* **Yonedino ulaganje**.

0.27. Teorem. (Yonedina lema, jaka verzija) *Neka je* $P : \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ *bilo koji predsnop skupova. Tada postoji, prirodna u* D*, bijekcija skupova*

$$\mathrm{Nat}(h_D, P) \cong P(D).$$

Koristan savjet čitatelju: pokušajte najprije sami dokazati ovaj teorem.

Dokaz. Neka je $\alpha : h_D \Rightarrow P$ prirodna transformacija s komponentama $\alpha_C : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C, D) \to P(D)$. Tada definiramo $X_\alpha \in P(D)$ sa $X_\alpha = \alpha_D(\mathrm{id}_D)$. Dovoljno je pokazati da preslikavanje $X : \alpha \mapsto X_\alpha\ \mathrm{Nat}(h_D, P) \stackrel{\cong}{\to} P(D)$ ima inverz. Za svaki y u $P(D)$ definiramo prirodnu transformaciju $e(y) : h_D \Rightarrow P$ s komponentama $e(y)_C : (f \in h_D(C)) \mapsto (P(f)(y) \in P(C))$ (sjetimo se da je P kontravarijantan, dakle $P(f) : P(D) \to P(C)$). Tada

$$e(X_\alpha)_C(f) = P(f)(\alpha_D(\mathrm{id}_D)) = \alpha_C \circ P(f)(\mathrm{id}_D) = \alpha_C \circ \mathrm{id}_C = \alpha_C,$$

$$X_{e(y)} = (e(y)_D)(\mathrm{id}_D) = P(\mathrm{id}_D)(y) = y.$$

Dakle preslikavanja $y \mapsto e(y)$ i $\alpha \mapsto X_\alpha$ su jedan drugome inverzi.

Dijagrame prirodnosti ostavljamo čitatelju za provjeru.

0.28. Korolar. (Yonedina lema, slaba verzija) **Yonedino ulaganje** $h : D \mapsto h_D$ *je potpun i vjeran funktor* $h : \mathcal{D} \to \hat{\mathcal{D}}$.

Dokaz. U teoremu **0.27** stavimo $P = h_C$. Tako dobivamo bijekciju $\mathrm{Nat}(h_D, h_C) \cong \mathcal{D}(D, C)$ za svaki par C, D, tj. funktor $D \mapsto h_D$ je ulaganje kategorija.

0.29. Primijetimo da se Yonedino ulaganje prirodno razlaže u kompoziciju $\mathcal{D} \xrightarrow{h^{\mathrm{sm}}} \hat{\mathcal{D}}^{\mathrm{sm}} \hookrightarrow \hat{\mathcal{D}}$ gdje je $\hat{\mathcal{D}}^{\mathrm{sm}}$ kategorija malih predsnopova, a $\hat{\mathcal{D}}^{\mathrm{sm}} \hookrightarrow \hat{\mathcal{D}}$ kanonsko ulaganje. Naime svaki reprezentabilni snop je mali po definiciji.

0.30. Kažemo da funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ **čuva limese** ukoliko šalje univerzalne konuse u univerzalne konuse. Drugim riječima za svaki dijagram $d : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, za koji postoji limes u $\mathcal{C}$, postoji i limes dijagrama $F \circ d$ te $\lim(F \circ d) = F(\lim d)$ (pri čemu potonja jednakost za vrh limesa, podrazumijeva i da projekcije od $\lim d$ funktor F šalje u odgovarajuće projekcije od $\lim(F \circ d)$).

1 Snopovi nad topološkim prostorima i etalni prostori

1.1. Neka je (B, τ) topološki prostor. Tada s $\mathrm{Ouv}_{(B,\tau)} = \mathrm{Ouv}_B$ označavamo kategoriju kojoj su objekti otvoreni podskupovi u B, a morfizmi ulaganja otvorenih podskupova $i : U \hookrightarrow V$.

Kažemo da je familija objekata $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ pokrivač u Ouv_B pokrivač objekta U ako $\cup_i U_i = U$.

1.1.1. Predsnop P nad topološkim prostorom B, s vrijednostima u kategoriji $\mathcal{C}$ je predsnop iz male kategorije Ouv_B (tj. kontravarijantni funktor) u $\mathcal{C}$. Prirodne transformacije su **morfizmi predsnopova** nad B. Predsnopovi nad B i njihove transformacije čine kategoriju $\mathbf{PFas}_B$.

1.1.2. Ako je $P : \mathrm{Ouv}_B^0 \to \mathbf{Set}$ predsnop skupova i $i : U \hookrightarrow V$, tada ćemo morfizam $P(i) : P(V) \to P(U)$ u **Set** označavati i s r_{UV} i $x \mapsto x|_U$ i zvati **restrikcija** s V na U. Elementi skupa $P(U)$ se nazivaju i **prerezi predsnopa** P **nad** U.

1.1.3. Separirani predsnop skupova ili **monopredsnop** nad topološkim prostorom (B, τ) je predsnop $P : \mathrm{Ouv}_B^0 \to \mathbf{Set}$ takav da za svaki pokrivač $\mathcal{U}$ od U, i svaka dva različita elementa $x \neq y$ u $P(U)$ postoji i takav da je $x|_{U_i} \neq y|_{U_i}$.

1.1.4. Epipredsnop skupova je predsnop $P : \mathrm{Ouv}_B^0 \to \mathbf{Set}$ takav da za svaki pokrivač $\mathcal{U}$ od U, ukoliko je $\{x_i\}_i$ familija elemenata $x_i \in P(U_i)$ i vrijedi $x_i|_{U_i\cap U_j} = x_j|_{U_i\cap U_j}$, tada postoji x u $P(U)$ takav da je $x|_{U_i} = x_i$.

1.1.5. $\boxed{\textbf{Snop} \text{ je separirani epipredsnop.}}$

1.1.6. Ovu definiciju možemo izreći i ovako: snop je predsnop P takav da je za svaki pokrivač $\mathcal{U}$ od U dijagram

$$P(U) \xrightarrow{\prod_i (r_{UU_i})} \prod_i P(U_i) \rightrightarrows \prod_{ij} P(U_i \cap U_j)$$

ujednačitelj paralelnog para dva očita prirodna morfizma sastavljenih od restrikcija $\prod_{ij}(r_{U_i,U_{ij}})$ i $\prod_{ij}(r_{U_j,U_{ij}})$. Ta definicija ima smisla za predsnopove s vrijednostima u bilo kojoj zatvorenoj kategoriji $\mathcal{C}$ umjesto **Set**, npr. kategoriji grupa **Grp** ili kategoriji Abelovih grupa **Ab**.

1.1.7. Morfizam snopova $\alpha : F \to G$ nad bazom B je morfizam predsnopova nad B iz snopa F u snop G, tj. prirodna transformacija kontravarijantnih funktora. Snopovi nad B i njihovi morfizmi čine dakle punu potkategoriju $\mathbf{Fas}_B$ kategorije $\mathbf{PFas}_B$ predsnopova nad B.

1.2. Inicijalni objekt u kategoriji skupova je prazan skup, a u kategoriji Ouv_X je takodjer. Terminalni objekt u **Set** je skup s jednim elementom (singleton), a u Ouv_B je B. Dakle netrivijalni predsnop skupova ne može slati prazan skup u prazan skup, jer po kontravarijantnosti bi trebao postojati morfizam iz $P(U)$ u $P(\emptyset)$, no ne postoji preslikavanje iz $P(U)$ u $\emptyset$ ukoliko je $P(U)$ neprazan.

Fibrirani produkti u kategoriji Ouv_B su naprosto presjeci skupova.

1.3. Neka je $\mathcal{C}$ bilo koja kategorija, a B objekt u $\mathcal{C}$. Tada s $\mathcal{C}/B$ označavamo **kategoriju kriški** nad B (engl. *slice category*). Objekti kategorije $\mathcal{C}/B$ su morfizmi oblika $f : E \to B$ u $\mathcal{C}$, a morfizmi $\alpha : f \to g$ u $\mathcal{C}/B$ su komutativni trokuti oblika

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & & G \arrow[dl, "g"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

u $\mathcal{C}$.

1.4. Kategorija $\mathbf{Bun}_B := \mathbf{Top}/B$. Objekte u $\mathbf{Bun}_B$ nazivamo (topološkim) prostorima nad (bazom) B. Ponekad se kaže svežanj nad B, ili raslojenje nad B (engl. *bundle*); mi ćemo, medjutim rezervirati riječ svežanj za jedan specijalni ali važan slučaj: lokalno trivijalni raslojeni prostor (fibre bundle) s tipičnim slojem koji će se pojaviti u kasnijim lekcijama. Morfizme u $\mathbf{Bun}_B$ zovemo (neprekidna) **preslikavanja prostora nad** B.

1.4.1. Kategorija **etalnih prostora** je puna potkategorija $\mathbf{Et}_B \subset \mathbf{Bun}_B$ čiji su objekti **lokalni homeomorfizmi** $\pi : E \to B$. To znači da za svaku točku $e \in E$ postoji okolina $U^{\mathrm{otv}} \ni e$, takva da je $\pi(U)$ otvoreni skup u B i restrikcija $\pi|U : U \to \pi(U)$ homeomorfizam.

1.4.2. Natkrivanje (engl. *covering space*) topološkog prostora B je prostor $\pi : E \to B$ nad B takav da je π surjekcija i za svaki $b \in B$ postoji $U^{\mathrm{otv}} \ni b$ tako da postoji familija disjunktnih otvorenih podskupova $U_\alpha \subset E$ sa svojstvom $\pi^{-1}(U) = \coprod_\alpha U_\alpha$ i $\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ je homeomorfizam za svaki α. Ukoliko su E i B glatke mnogostrukosti tada je dobiveno natkriva nje glatko ukoliko možemo izabrati U tako da je $\pi|_{U_\alpha}$ difeomorfizam. Svako natkrivanje je primjer etalnog prostora, ali ne i obratno: kod etalnih prostora, okoline U_α točaka $p_\alpha \in \pi^{-1}(b)$ koje se homeomorfno preslikavaju na svoje slike imaju slike $\pi(U_\alpha)$ koje se medjusobno razlikuju (mogu biti i nehomeomorfne slike, no to nije bitno). Ako je $\pi^{-1}(b)$ beskonačan skup tada je moguće da presjek $\cap_\alpha \pi(U_\alpha)$ nije zatvoren. Natkrivanja prostora čine punu potkategoriju $\mathbf{Cov}_B \subset \mathbf{Et}_B$. U praksi se često razmatra samo potkategorija povezanih natkrivanja povezanih prostora.

1.5. Neka je b točka u B i P predsnop skupova nad B. Neka je $\sim_b$ relacija ekvivalencija na uniji $\cup_{U^{\mathrm{otv}} \ni b} P(U)$, gdje $P(U) \ni (U, y) \sim_b (V, z) \in P(V)$ akko postoji $W^{\mathrm{otv}} \ni U \cap V$ takva da $b \in W$ i $y|W = z|W$. Klase ekivalencija zovemo **klice** prereza (ili sekcija) predsnopa P u točki b. Klasa ekvivalencije prereza x u točki b se označava s $[x]_b$. Skup svih klasa ekvivalencija u točki b nazivamo **vlat** asociranog etalnog prostora $E(P)_b$ u točki b.

1.6. (Zadatak 1.1) Dokaži da je skup klasa ekvivalencija $E(P)_b$ jednak kolimesu $\mathrm{colim}_{U \ni b} P(U)$ dijagrama koji je restrikcija predsnopa P na punu potkategoriju u Ouv_B čiji su objekti otvorene okoline od b u B.

1.6.1. Totalni skup asociranog etalnog prostora $E(P) = \coprod_b \mathrm{colim}_{U \ni b} P(U)$ predsnopa skupova P je disjunktna unija svih vlati asociranog snopa.

1.6.2. Neka je P predsnop i $s \in P(U)$. Označi sa $\tilde{s} : U \to E(P)$ funkciju danu sa $\tilde{s}(b) = [s]_b$. Postoji kanonsko preslikavanje kojemu je domena disjunktna unija $\coprod_U P(U)$ a kodomena skup svih podskupova totalnog skupa asociranog prostora zadano s $P(U) \ni x \mapsto \{\tilde{x}(b) = [x]_b | b \in U\}$. Postoji najmanja topologija u kojoj su svi elementi *slike* tog preslikavanja (a ti elementu su slike prereza $\tilde{s} : U \to E(P)$) otvoreni ("slike svih sekcija $\tilde{s}$ čine bazu topologije u $E(P)$"). **Totalni prostor asociranog etalnog prostora** $E(P)$ je totalni skup asociranog etalnog prostora s tom topologijom. **Projekcija** asociranog etalnog prostora je preslikavanje $\pi : E(P) \to B$ dano s $\pi([s]_b) = b$.

1.6.3. Propozicija. *$\tilde{s} : U \to E(P)$ je neprekidno preslikavanje i $\pi \circ \tilde{s} = \mathrm{id}_U$.*

Dokaz. Jednakost je očita: $b \overset{\tilde{s}}{\mapsto} [s]_b \overset{\pi}{\mapsto} b$. Dakle treba pokazati neprekidnost.

Pretpostavimo suprotno, tj. postoji točka b u kojoj $\tilde{s}$ nije neprekidno. To znači da postoji okolina $W^{\mathrm{otv}} \ni \tilde{s}(b) = [s]_b$ tako da za svaku okolinu $V^{\mathrm{otv}} \ni b$, $\tilde{s}(V)$ nije podskup od W. Kako je W otvoren i sadrži $[s]_b$ to postoji element baze topologije oblika $\tilde{t}(Z^{\mathrm{otv}}) \subset W$ gdje $Z \ni [s]_b$, $t \in P(Z)$. To znači da $[t]_b = [s]_b$, dakle postoji okolina $Z' \subset Z \cap U$ tako da je $t|Z' = s|Z'$. Ako stavimo $V = Z'$ tada je V otvorena i sadrži b, te $\tilde{s}(V) = \tilde{t}(V) \subset \tilde{t}(Z) \subset W$ s kontradikcijom.

1.6.4. Propozicija. *Projekcija $\pi : E(P) \to B$ dana s $\pi([s]_b) = b$ je neprekidno, i štoviše, etalno preslikavanje.*

Dokaz. Ova projekcija je dobro definirana jer je $E(P)$ po definiciji *disjunktna* unija vlati.

π je etalan ako za svaku točku $e \in E(P)$ postoji okolina $U^{\mathrm{otv}} \ni e$ tako da je $\pi(U)$ otvoren u B i $\pi|_U : U \to \pi(U)$ homeomorfizam. Po definiciji totalnog skupa, e je klica $[s]_b$ nekog prereza $s : V^{\mathrm{otv}} \to E(P)$, a slika $\tilde{s}(V)$ je otvorena okolina točke e. Dakle $\pi \circ \tilde{s}(V) = V$ je otvoren skup, a $\pi|_{\tilde{s}(V)} : \tilde{s}(V) \to V$ bijekcija. Preslikavanja π i π_U su oba neprekidna u točki p ako za svaku okolinu $b \in W^{\mathrm{otv}} \subset V \cap \pi(U)$ postoji okolina $p \in Z^{\mathrm{otv}} \subset U$, tako da $\pi(Z) = \pi|_U(Z) \subset\subset W$. No to je lako: stavimo naprosto $Z := \tilde{s}(W)$. Dakle π i $\pi|_W$ su neprekidni. Kako je takodjer $\tilde{s}$ neprekidno prema **1.6.3** i $\pi \circ \tilde{s} = \mathrm{id}_V$ to je $\pi|_Z$ homeomorfizam na sliku.

1.7. Propozicija. *(i) Ako $s \in P(U)$ tada je $\tilde{s}$ neprekidno i $\pi \circ \tilde{s} = \mathrm{id}_U$.*

(ii) Preslikavanje $t : U \to E(P)$ koje zadovoljava $\pi \circ t = \mathrm{id}_U$ je neprekidno samo ako oko svake točke $b \in U$ postoji okolina $b \in W^{\mathrm{otv}} \subset U$ takva da je $t = \tilde{s}$ za neki $s \in P(W)$.

(iii) Neka su $t, s \in P(U)$. Tada $\tilde{t} = \tilde{s}$ akko postoji pokrivač $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ od U tako da je $t|_{U_i} = s|_{U_i}$ za sve i.

Dokaz. (i) Po definiciji topologije u $E(P)$, ako $s \in P(U)$ tada je $\tilde{s}$ neprekidno. Takodjer $(\pi \circ \tilde{s})(b) = \pi([s]_b) = b$.

(ii) Neka je $b \in U$. Tada po definiciji topologije u $E(P)$ postoji $W^{\mathrm{otv}} \subset U$, $b \in W$ i postoji element $s \in P(W)$ takav da je $t(b) \in \tilde{s}(W) \subset t(U)$. Kako je $\pi \circ t = \mathrm{id}_U$ i $\pi \circ \tilde{s} = \mathrm{id}_W$, vrijedi $\tilde{s}(w) = t(w)$ za svaki $w \in W$.

(iii) Neka je $b \in U$. Tada $[s]_b = \tilde{s}[b] = \tilde{t}[b] = [t]_b$, tj. postoji $b \in W_b^{\mathrm{otv}} \subset U$ takav da $s|_{W_b} = t|_{W_b}$. Dakle $\{W_b\}_b$ je traženi pokrivač. Obratno, činjenica da je $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ implicira da $[s]_b = [t]_b$ za svaki $b \in U_i$; kako je $\mathcal{U}$ pokrivač isto slijedi za sve $b \in U$, pa prema definiciji $\tilde{s} = \tilde{t}$.

1.8. Propozicija. *Postoji kanonski funktor* $\Gamma : \mathbf{Bun}_B \to \mathbf{PFas}_B$ *koji je na objektima* $(\pi_E : E \to B)$ *u* $\mathbf{Bun}_B$ *zadan s* $\Gamma : (E \xrightarrow{\pi} B) \mapsto \Gamma E$ *gdje*

$$(\Gamma E)(U) = \Gamma_U(E) = \{s : U \to E \text{ neprekidno} \mid s \circ \pi_E = \mathrm{id}_U\}$$
$$r^{\Gamma E}_{VU} = (\Gamma E)(V \hookrightarrow U) : s \mapsto s|_V, \quad V \subset U,\, s \in \Gamma_U(E).$$

Ovdje je ΓE naravno skraćenica za $\Gamma(E \xrightarrow{\pi} B)$ ili, ekvivalentno, $\Gamma\pi_E$.
Kažemo da su elementi od $\Gamma_U(E)$ (neprekidne) **sekcije** nad U.

Dokaz. Treba zadati taj funktor i na morfizmima u $\mathbf{Bun}_B$ i pokazati funktorijalnost. Neka je dakle $f : E \to F$ neprekidno preslikavanje prostora nad bazom B, tj. $\pi_E = \pi_F \circ f$. Malo je nezgodno označavati vrijednost funktora Γ na f s Γf, ili preciznije $\Gamma(f/B)$ jer se ne radi o sekcijama preslikavanja f, nego induciranom morfizmu medju sekcijama $\Gamma(E \to B)$ i $\Gamma(F \to B)$. Transformacija $\Gamma(f/B) : \Gamma\pi_E \Rightarrow \Gamma\pi_F$ je dana u komponentama naprosto s $\Gamma_U(f/B)(s) = f \circ s$, gdje je $s \in \Gamma_U(E)$. Funktorijalnost je očita iz formule.

1.9. Propozicija. *Predsnop prereza* $\Gamma(E \to B)$ *bilo kojeg prostora nad* B *je snop.*

Dokaz. Separiranost. Neka je $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ pokrivač od U i $r, t \in \Gamma_U(\pi_E)$ te $r|_{U_i} = t|_{U_i}$ za sve i. Tada za svaki $b \in U_i$ $r(b) = t(b)$, a kako U_i pokrivaju U, tada je $r = t$ kao preslikavanja skupova.

Svojstvo epipredsnopa. Neka je dalje $v_i \in P(U_i)$ familija prereza čije restrikcije se podudaraju na presjecima $U_i \cap U_j$. To znači da formula $v(b) = [v_i]_b$ za $b \in U_i$ ne zavisi o predstavniku. Dakle $v : b \mapsto v(b)$ je dobro definirana sekcija i $v|U_i = v_i$. Neprekidnost v se provjerava lokalno, no kako je lokalno $v|U_i = v_i$ slijedi iz neprekidnosti v_i; analogno izlazi i svojstvo prereza $\pi \circ v = \mathrm{id}_B$ iz $\pi \circ v_i = \mathrm{id}_{U_i}$.

1.9.1. (Napomene i primjeri.) Slično, ukoliko je $E \to B$ neprekidna projekcija u kategoriji topoloških prostora s nekom dodatnom strukturom ili svojstvom, tada možemo gledati umjesto $\Gamma_U E$ samo prereze koji respektiraju dodatnu strukturu ili svojstvo. Na primjer, ukoliko je $E \to B$ glatko (analitičko) preslikavanje glatkih (analitičkih) tada je asociranje otvorenom skupu U prostora glatkih (analitičkih) prereza $\Gamma^{\mathrm{sm}}_U E$ (redom, $\Gamma^{\omega}_U E$) snop. No, to ne vrijedi za svojstva koja nisu lokalne prirode. Npr. ukoliko promatramo potprostor *ograničenih* prereza $\Gamma^{\mathrm{b}}_U E$, tada imamo separirani predsnop, no općenito nemamo snop! Naime prerez može biti neograničena na nekoom otvorenom skupu U, a da je ograničena na svakom elementu U_i nekog pokrivača $\{U_i\}_i$ od U. Ukoliko je $E = B \times R$ gdje je R neki topološki prostor (moguće s dodatnom strukturom) tada se prerezi mogu poistovjetiti s funkcijama $B \to R$. Na taj način uvodimo snopove neprekidnih funkcija, glatkih funkcija i analitičkih funkcija. Snopifikacija $a\Gamma^{\mathrm{b}\omega}(E, \mathbf{C})$ separiranog predsnopa $C^{\mathrm{b}\omega}_E = \Gamma^{\mathrm{b}\omega}(E, \mathbf{C})$ ograničenih analitičkih funkcija $B \to \mathbf{C}$ izomorfna je kao snop, snopu analitičkih funkcija

$C^{\omega}_E = \Gamma^{\omega}(E, \mathbf{C})$ (ograničenost se ne movže razlikovati na klicama, pa nestaje prelaskom na prostor klica, dakle i prelaskom na asocirani snop).

1.10. Propozicija. *Korespodencija $P \mapsto (E(P) \to B)$ se može kanonski proširiti do funktora $\mathcal{L} : \mathbf{PFas}_B \longrightarrow \mathbf{Bun}_B$.*

Dokaz. Neka je $\alpha : P \Rightarrow Q$ prirodna transformacija predsnopova. Definiramo $\mathcal{L}(\alpha) : E(P) \to E(Q)$ na klicama s $\mathcal{L}(\alpha)([s]_b) = [\alpha_U(s))]_b$ gdje je $s \in P(U)$ proizvoljni predstavnik klice $[s]_b$. Treba pokazati da ta definicija ne zavisi od izbora predstavnika. Neka je $t \sim_b s$, gdje je $t \in P(V)$. Dakle postoji $W^{\mathrm{otv}} \subset U \cap V$ s $b \in W$ takav da $s|W = t|W$. Iz prirodnosti $\alpha : P \Rightarrow Q$ (za morfizme $W \hookrightarrow U$, $W \hookrightarrow V$) slijedi da $\alpha_U(s)|W = \alpha_W(s|W) = \alpha_W(t|W) = \alpha_V(t)|W$, dakle $\alpha_U(s) \sim_b \alpha_V(t)$ što smo i tražili.

Pokažimo da je $\mathcal{L}(\alpha)$ morfizam u $\mathbf{Et}_B \subset \mathbf{Bun}_B$, tj. *neprekidno* preslikavanje nad B. Kako slike prereza čine bazu topologije, dovoljno je pokazati da je za svaki U^{otv}, za svaki $s \in Q(U)$, praslika

$$\mathcal{L}(\alpha)^{-1}(\tilde{s}(U)) = \{\mathcal{L}(\alpha)^{-1}([s]_b) \,|\, b \in U\}$$

otvoren skup u $E(P)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji točka $y \in \mathcal{L}(\alpha)^{-1}(\tilde{s}(U)) \subset E(P)$ s $b = \pi(y)$ tako da y nije u interioru tog skupa. Tada $\mathcal{L}(\alpha)(y) = [s]_b$. To znači da postoji $W^{\mathrm{otv}} \ni b$ i $r \in \Gamma_U(E)$ tako da je $[r]_b = y$ i $\mathcal{L}(\alpha)([r]_b) = [\alpha_W(r)]_b = [s]_b$. Dakle prijelaskom na manju okolinu $b \ni Z^{\mathrm{otv}} \subset W$ možemo postići da je $\alpha_Z(r|_Z) = \alpha_W(r|_W)|_Z = s|_W|_Z = s|_Z$. To znači da je $r(Z) \subset \mathcal{L}(\alpha)^{-1}(\tilde{s}(U))$. Kako je $r(Z)$ otvorena okolina od y dobili smo kontradikciju.

Provjera funktorijalnosti $\mathcal{L}$ je ostavljena čitatelju.

1.10.1. Kako je, prema **1.6.4**, projekcija $[x]_b \mapsto b$ s $E(P) \to B$ etalni prostor, funktor $\mathcal{L}$ se faktorira kao $\mathcal{L} : \mathbf{PFas}_B \to \mathbf{Et}_B \hookrightarrow \mathbf{Bun}_B$.

1.11. Neka je P predsnop nad prostorom $B = (B, \tau)$. Tada je **snopifikacija** predsnopa P morfizam predsnopova $\alpha : P \to a(P)$ gdje je $a(P)$ **asocirani snop** tj. snop takav da za bilo koji drugi snop F i morfizam predsnopova $P \to F$ postoji jedinstvena dekompozicija $P \xrightarrow{\alpha} a(P) \to F$. Očito se to može izreći kao univerzalno svojstvo, pa je snopifikacija, ako postoji, jedinstvena do na izomorfizam snopova.

1.12. Teorem. *Kompozicija $a = \Gamma \circ \mathcal{L} : \mathbf{PFas}_B \to \mathbf{Fas}_B$ je funktor, takav da je morfizam predsnopova $P \Rightarrow a(P)$, koji je po komponentama $P(U) \to (aP)(U)$ dan sa $s \mapsto \tilde{s}$ snopifikacija (* **1.11** *) predsnopa P, tj. zadovoljava univerzalno svojstvo snopifikacije. Dakle snopifikacija bilo kojeg predsnopa P s vrijednostima u kategoriji skupova postoji. Funktor a nazivamo funktor snopifikacije ili asociranog snopa.*

Dokaz. Neka je F neki drugi snop i $\alpha : P \Rightarrow F$ transformacija (morfizam predsnopova) s komponentama $\alpha_U : s \mapsto \alpha_U(s)$. Tražimo morfizam predsnopova $\beta : aP \Rightarrow F$ takav da $\alpha = \beta \circ \eta_P$, drugim riječima takav da $\tilde{s} \mapsto \alpha_U(s)$ za svaki $s \in P(U)$. Neka je $t \in (aP)(U)$ proizvoljni element ('prerez'). Tada postoji pokrivač $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ od U, i elementi $r_i \in P(U_i)$ takvi da je $t|_{U_i} = \tilde{r}_i$. Definiramo $\beta_U(t)$ s $\beta_U(t)|U_i = \alpha_U(r_i)$. Kako je F snop, $\beta_U(t)$ je odredjen svojim restrikcijama an elemente pokrivača, ukoliko se podudaraju na presjecima, tj. ukoliko $\alpha_{U_i}(\tilde{r}_i)|_{U_i\cap U_j} = \alpha_{U_j}(\tilde{r}_j)|_{U_i\cap U_j}$. U tu svrhu primijeti $\tilde{r}_i|_{U_i\cap U_j} = t|_{U_i}|_{U_i\cap U_j} = t|_{U_j}|_{U_i\cap U_j} = \tilde{r}_j|_{U_i\cap U_j}$, dakle za svaku točku $b \in U_i \cap U_j$ (prema **1.7** (iii)) postoji okolina $Z^{\rm otv} = Z_b \subset U_i \cap U_j$ takva da $r_i|_Z = r_j|_Z$. Tada $\alpha_Z(r_i|_Z) = \alpha_Z(r_j|_Z)$, dakle, po prirodnosti transformacije α, $\alpha_{U_i}(r_i)|_Z = \alpha_Z(r_i|_Z) = \alpha_Z(r_j|_Z) = \alpha_{U_j}(r_j)|_Z$, pa, kako je F snop, i kako Z_b za razne $b \in U_i \cap U_j$ čine pokrivač od $U_i \cap U_j$, to $\alpha_{U_i}(r_i)|_{U_i\cap U_j} = \alpha_{U_j}(r_j)|_{U_i\cap U_j}$.

Moramo pokazati da ta definicija ne zavisi od izbora pokrivača $\mathcal{U}$ te izbora r_i (sjetimo se da $r \mapsto \tilde{r}$ nije nužno ni injekcija). Neka je dakle $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ drugi pokrivač i $v_j \in P(V_j)$ takvi da je $\tilde{v}_j = t|_{V_j}$. Tada za svaki $b \in U$ postoje $i \in I$, $j \in J$ i okolina $W_b^{\rm otv} \in b$, $W_b \subset U_i \cap U_j$ tako da $v_j|_{W_b} = t_{W_b} = r_i|_{W_b}$. Dakle $\alpha_{W_b}(v_j|_{W_b}) = \alpha_{W_b}(r_i|_{W_b})$ i, kako je F snop, i to vrijedi za sve $b \in U_i \cap V_j$, i prema prirodnosti α, $\alpha_{U_j}(v_j)|_{U_i\cap V_j} = \alpha_{U_i\cap U_j}(v_j|_{U_i\cap V_j}) = \alpha_{U_i\cap U_j}(r_i|_{U_i\cap V_j}) = \alpha_{U_i}(r_i)|_{U_i\cap V_j}$ kako je traženo.

Konačno treba pokazati da je $\beta : U \to \beta_U$ prirodna transformacija. Neka je dakle $W \hookrightarrow U$ inkluzija otvorenih skupova u B i $t \in aP(U)$. Neka je $b \in W$. Tada postoji $Y^{\rm otv} \subset W$, $Y \in b$, $\tilde{r}|_Y = t|_W|_Y = t|_Y$. Tada po definiciji β,

$$\beta_W(t|_W)|_Y = \alpha_Y(r_Y) = \beta_U(t)|_Y = \beta_U(t)|_W|_Y.$$

Kako je b proizvoljan, slijedi $\beta_W(t|_W) = \beta_U(t)|_W$.

Analogni teorem vrijedi i za snopove s vrijednostima u nekim drugim, ali ne svim zatvorenim kategorijama. Postoji ovakvo profinjenje gornjeg teorema:

1.12.1. Theorem. *Ulaganja kategorija*

$$\text{SNOPOVI} \hookrightarrow \text{SEPARIRANI PREDSNOPOVI} \hookrightarrow \text{PREDSNOPOVI}$$

imaju lijeve adjunkte. Funktor snopifikacije a je kompozicija ta dva lijeva adjunkta, a njegova restrikcija na kategoriju separiranih predsnopova je lijevi adjunkt ulaganja snopova u separirane predsnopove.

Ovaj teorem će biti dokazan kao korolar naših daljih razmatranja u ovoj i slijedećoj lekciji. No, prije toga ćemo konstruirati lijevi adjunkt $\mathrm{sep} : \mathbf{PFas}_B \to \mathbf{sepPFas}_B$ ulaganja separiranih predsnopova u predsnopove. Za to definiramo relaciju ekvivalencije $\sim_U$ na $P(U)$ gdje $s \sim t$ akko postoji pokrivač $\{U_i\}_i$ skupa i takav da $s|_{U_i} = t|_{U_i}$. Tada stavimo $(\mathrm{sep}P)(U) = P(U)/\sim_U$, te za svako ulaganje $V \hookrightarrow U$ i $s \in \tilde{P}(U)$ $s|_V$ je klasa po $\sim_V$ bilo kojeg predstavnika klase s po $\sim_U$.

1.12.2. (Zadatak 1.2) Pokaži da je $\mathrm{sep}P$ dobro definirani separirani predsnop.

1.13. Propozicija. *Korespodencija $P \mapsto \eta_P$, gdje je η_P morfizam predsnopova P u njegov asocirani snop $a(P)$, s komponentama $(\eta_P)_U : (s \in P(U)) \to (\tilde{s} \in \Gamma_U\mathcal{L}(P))$ (gdje je preslikavanje $s \mapsto \tilde{s}$ opisano u* **1.6.2***), je prirodna transformacija $\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{PFas}_B} \Rightarrow a$.*

Dokaz. Neka je $\alpha : P \to Q$ morfizam predsnopova. Moramo pokazati da dijagram

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta_P"'] & Q \arrow[d, "\eta_Q"] \\ aP \arrow[r, "a(\alpha)"] & aQ \end{tikzcd}$$

komutira. Drugim riječima, ukoliko je $s \in P(U)$ tada $\widetilde{\alpha_U(s)} = \Gamma_U(\mathcal{L}(\alpha))(\tilde{s})$, što, ako definicije raspišemo u proizvoljnoj točki $b \in U$ vodi na tautologiju $[\alpha_U(s)]_b = [\alpha_U(s_b)]_b$.

1.14. Teorem. *Postoji adjunkcija $\mathcal{L} \dashv \Gamma$ čija jedinica je $\eta : P \mapsto \eta_P$. Ta adjunkcija se restringira na adjungiranu ekvivalenciju*

$$\mathcal{L}|_{\mathbf{Fas}_B} : \mathbf{Fas}_B \cong \mathbf{Et}_B : \Gamma|_{\mathbf{Et}_B}$$

izmedju kategorije snopova i kategorije etalnih prostora nad B.

Dokaz. Zadajmo komponentu kojedinice $\epsilon_{\pi_E} : \mathcal{L}\Gamma E \to E$ sa $\epsilon_{\pi_E} : [s]_b \mapsto s(b)$. Naime svaka točka u E je oblika $[s]_b$ gdje je $s : U^{\mathrm{otv}} \to E$ prerez od π, i $U^{\mathrm{otv}} \ni b$. To je dobro definirano jer ukoliko je $[s]_b = [t]_b$ onda se s i t podudaraju u nekoj okolini točke b, dakle *a fortiori* u samoj točki b. Takodjer je očito da $\pi_F \circ \epsilon_{\pi_E} = \pi_E$ jer obe strane šalju $[s]_b$ u b.

Treba pokazati da su relacije ("trokuti") adjunkcije zadovoljene. Neka je P predsnop, izračunajmo kompoziciju

$$\mathcal{L}P \xrightarrow{\mathcal{L}(\eta_P)} \mathcal{L}\Gamma\mathcal{L}P \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{L}P}} \mathcal{L}P \tag{2}$$

Neka je $[s]_b \in \mathcal{L}P$, tada $\mathcal{L}(\eta_P)([s]_b) = [\tilde{s}]_b$; nadalje $\epsilon_{\mathcal{L}P}([\tilde{s}]_b) = \tilde{s}(b) = [s]_b$, dakle kompozicija (2) je identiteta.

Neka je, s druge strane, $E = (E \xrightarrow{\pi} B)$ prostor nad B i neka je $s \in \Gamma_U E$. Tada $(\eta_{\Gamma E})_U(s) = \tilde{s} \in \Gamma_U(\mathcal{L}\Gamma E)$ i $\Gamma(\epsilon_E)(\tilde{s})(b) = (\epsilon_E \circ \tilde{s})(b) = \epsilon_E(\tilde{s}(b)) = \epsilon_E([s]_b) = s(b)$. Dakle, kompozicija

$$\Gamma E \xrightarrow{\eta_{\Gamma E}} \Gamma\mathcal{L}\Gamma E \xrightarrow{\Gamma(\epsilon_E)} \Gamma E \tag{3}$$

je identiteta.

Ranije smo pokazali da restrikcija Γ na potkategoriju snopova $\mathbf{Fas}_B$ zaista prima vrijednosti u potkategoriji etalnih prostora $\mathbf{Et}_B$, i obratno, restrikcija funktora $\mathcal{L}$ na $\mathbf{Et}_B$ prima vrijednosti u $\mathbf{Fas}_B$. Treba pokazati da su dvije kompozicije restrikcija funktora izomorfne identiteti, pri čemu su izomorfizmi jedinica i kojedinica neke adjunkcije. Naravno, to će biti restrikcija gore definirane adjunkcije.

Neka je dakle $E = (E \xrightarrow{\pi} B)$ etalni prostor. Pokažimo da je komponenta ϵ_E izomorfizam.

1.14.1. (Zadatak 1.3) Komponenta u U komponente u P jedinice $(\eta_P)_U : P(U) \to (aP)(U)$ (dana s $s \mapsto \tilde{s}$) nije općenito ni injekcija ni surjekcija (nadji primjere!). Dokaži da je η_P injekcija onda i samo onda ako je predsnop P monopredsnop i surjekcija onda i samo onda ako je P epipredsnop.

1.15. Korolar. *Kategorija snopova nad B je reflektivna potkategorija kategorije predsnopova nad B, tj. inkluzija je potpun i vjeran funktor koji ima lijevi adjunkt. Ekvivalentno, kojedinica adjunkcije $\Gamma \circ \mathcal{L} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{Bun}_B}$ je izomorfizam.*

1.16. (Zadatak 1.4) Pokaži da je morfizam etalnih prostora $j : E \to F$ nad B monomorfizam u **Et** akko je injektivan kao preslikavanje totalnih skupova nad B i slika $j(E)$ je *otvoren podskup* u F.

2 Snopovi struktura i operacije nad snopovima

2.1. Definicija. *Etalni prostor $\pi : E \to B$ je* **etalni prostor s vlatima u grupama** *(abelovim grupama, prstenovima) ako je za svaku vlat $\pi^{-1}(b)$ zadana struktura grupe i ako grupovne operacije neprekidno zavise od vlati do vlati.* Drugim riječima neka je $E_n \subset E^{\times n}$ topološki potprostor Tihonovljeve (kartezijeve) n-t potencije prostora E koji se sastoji od takvih n-torki elemenata u E čije sve komponente pripadaju istoj vlati; i neka je $\{m_b : \pi^{-1}(b)^n \to \pi^{-1}(b)\}_{b\in B}$ porodica preslikavanja iste signature. Tada ta porodica inducira preslikavanje $m : E_n = \coprod_b \pi^{-1}(b)^n \to \coprod_b \pi^{-1}(b) = E$; tražimo da je to preslikavanje neprekidno.

2.2. Teorem. *Kategorija snopova grupa (prstenova) je adjungirano ekvivalentna kategoriji etalnih prostora s vlatima u grupama (prstenovima) (po definiciji podrazumijevamo da su algebarske operacije neprekidne).*

Dokaz je analogan slučaju snopova skupova.

2.3. (Izračunavanje limesa i kolimesa u kategoriji snopova)

2.4. Primjer: kojezgra preslikavanja snopova

2.5. Kategorija s množenjem je par kategorije $\mathcal{C}$ i bifunktora množenje $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Ukoliko je množenje striktno asocijativno (na objektima i na morfizmima), i postoji jedinični objekt $\mathbf{1}$ s obzirom na množenje, tada se množenje naziva **striktni monoidalni produkt** a trojka $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ je **striktna monoidalna kategorija**.

Kažemo da je kategorija $\mathcal{C}$ **kartezijeva** ako ima kartezijeve produkte prozvoljnih familija objekata. Kartezijeva kategorija je kartezijevo zatvorena kategorija ako za svaki Y postoji funktorijalni u X izbor produkta $X \times Y$, pri čemu funktor $X \mapsto X \times Y$ ima lijevi adjunkt, koji označavamo s $X \mapsto \mathbf{Hom}(X, Y)$; naravno to daje bifunktor $\mathbf{Hom}(-, -)$. Drugim riječima, postoji prirodni izomorfizam funktora

$$\mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z) \cong \mathrm{Hom}(X, \mathbf{Hom}(Y, Z))$$

2.5.1. *Propozicija. Neka je $\mathcal{C}$ kategorija s bifunktorijalnim produktom $\otimes$ koji je asocijativan do na izomorfizam (ne nužno koherentni) i unutarnjim homobjektom* **Hom**. *Tada*

$$\mathbf{Hom}(X \otimes Y, Z) \cong \mathbf{Hom}(X, \mathbf{Hom}(Y, Z))$$

Dokaz. Za svaki objekt W u $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(W, \mathbf{Hom}(X \otimes Y, Z)) &\cong \mathrm{Hom}(W \otimes (X \otimes Y), Z) \cong \\ &\cong \mathrm{Hom}((W \otimes X) \otimes Y, Z) \\ &\cong \mathrm{Hom}(W \otimes X, \mathbf{Hom}(Y, Z)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(W, \mathbf{Hom}(X, \mathbf{Hom}(Y, Z)))\end{aligned}$$

Kako je $W \mapsto \mathrm{Hom}(W, -)$ vjeran funktor (Yonedino ulaganje za $\mathcal{C}^0$) tvrdnja slijedi.

2.5.2. *Trivijalni primjer.* U kategoriji skupova **Set** unutarnji i obični hom se podudaraju.

2.6. Teorem. *Kategorije* $\mathbf{PFas}_B$ *i* $\mathbf{Fas}_B$ *su zatvorene kartezijeve kategorije.*

Skica dokaza. Općenito, ako su $\mathcal{D}, \mathcal{A}$ male kategorije, i $\mathcal{C}$ ima $\mathcal{D}$-indeksirane limese, i ako je $\mathcal{P} : \mathcal{D} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ dijagram funktora, tada $\lim \mathcal{P}$ postoji i $(\lim \mathcal{P})(U) = \lim_D(\mathcal{P}(D))$ gdje je limes na desnoj strani limes (dijagrama s vrijednostima) u $\mathcal{C}$, dakle postoji. Stavimo li $\mathcal{A} = \mathrm{Ouv}_B^0$ i $\mathcal{D}$ mala diskretna kategorija dobivamo postojanje $\mathcal{D}$-indeksiranih produkata u $\mathbf{PFas}_B$. Unutarnji hom-objekt $\mathbf{Hom}_{\mathbf{PFas}}(X, Y)$ je predsnop $U \mapsto \mathrm{Hom}(X(U), Y(U))$.

U kategoriji snopova, produkt je naslijedjen iz kategorije predsnopova, tj. $(\prod_i X)(U) = \prod_i X_i(U)$, a unutranji hom-objekt $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fas}}(X, Y) = a(\mathbf{Hom}_{\mathbf{PFas}}(X, Y))$ je asocirani snop unutarnjeg homa u kategoriji predsnopova.

2.6.1. (Zadatak 1.4) Provjeri da $(X, Y) \mapsto a(\mathbf{Hom}_{\mathbf{PFas}}(X, Y))$ zaista reprezentira unutarnji hom-funktor u kategoriji snopova, tj. provjeri adjunkciju.

3 Snopovi nad raznim bazama

3.1. Neka je **Top** kategorija topoloških prostora i **Arr**(**Top**) kategorija morfizama (strelica) u **Top**: njeni objekti su morfizmi u **Top**, a morfizmi (α, f) : $(E \xrightarrow{\pi} X) \to (E' \xrightarrow{\pi'} X')$ su komutativni kvadrati oblika

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

s očitom kompozicijom kvadrata. Neka je **Et** puna potkategorija od **Arr**(**Top**) čiji su objekti etalni prostori nad raznim bazama. Kažemo da je α **morfizam etalnih prostora** nad f. Ta terminologija poopćava prijašnju jer ako uzmemo $f = \mathrm{id}_B$ tada su morfizmi etalnih prostora nad id_B upravo ono što smo prije zvali morfizmi etalnih prostora nad B. Dakle $\mathbf{Et}_B \subset \mathbf{Et}$ je potkategorija etalnih prostora nad id_B.

3.2. Teorem. *Neka je* $f : X \to Y$ *neprekidno preslikavanje i* $E \xrightarrow{\pi} Y$ *etalni prostor nad* Y. *Tada postoji etalni prostor* f^*E *nad* X, *zajedno s preslikavanjem*

$f^{\square}_E : f^*E \to E$ *nad* f*, jedinstven do na izomorfizam etalnih prostora nad* X*, koji zadovoljava slijedeće univerzalno svojstvo: za svaki etalni prostor* $\sigma : F \to X$ *i morfizam etalnih prostora* $\alpha : F \to E$ *nad preslikavanjem* f *postoji jedinstvena dekompozicija* $\alpha = \beta \circ f^{\square}_E$ *gdje je* β *preslikavanje etalnih prostora nad* id_B*.*

Preslikavanja tipa $f^{\square}$ za neki f i neki E kao u ovom teoremu nazivamo *kartezijevim morfizmima* etalnih prostora. Objašnjenje te terminologije ćemo dati kasnije u kontekstu *raslojenih (fibriranih) kategorija*.

Dokaz teorema. Najprije konstruiramo totalni prostor etalnog prostora f^*E kao potprostor $f^*E = \{(e,x) \,|\, \pi(e) = f(x)\} \subset E \times X$, i naravno, projekcija je dana s $\pi_{f^*E}(e,x) = x$. Treba pokazati da je $f^*E \xrightarrow{\pi_{f^*E}} X$ etalni prostor. Po definiciji inducirane topologije, te topologije Tihonova na $E \times X$, za svaku $(e,x) \in f^*E$, postoji okolina oblika $U^\sharp = f^*E \cap U \times f^{-1}(\pi(U)) \ni (e,x)$ gdje $e \in U$, U i $\pi(U)$ su otvoreni i $\pi|U$ je homeomorfizam na sliku. Nadalje $\pi_{f^*E}(U^\sharp)$ je cijeli $f^{-1}(\pi(U))$ a to je otvoreni skup (ako je $z \in f^{-1}(\pi(U))$, $((\pi|U)^{-1}(f(z)), z)$ je element iz $U^\sharp$ u vlati nad z. $\pi_{f^*E}|U^\sharp$ je injektivno jer ako (e,x) i (e',y) pripadaju istoj vlati, tada $x = y$ i dakle $\pi(e) = f(x) = \pi(e')$, a kako je $\pi|U$ homeomorfizam, dakle injektivan, $e = e'$. Projekcija $\pi_{f^*E}|U^\sharp$ je neprekidna, jer za svaki otvoreni $V^{\mathrm{otv}} \ni x$, $V \subset f^{-1}(\pi(U))$, skup $(\pi_{f^*E}|_{U^\sharp})^{-1}(V) = f^*E \cap U \times V$ je otvoren. Treba pokazati da je $\pi_{f^*E}|U^\sharp$ otvoreno preslikavanje. Neka je $f^*E \cap Z \times f^{-1}(\pi(W))$ neprazni element baze topologije u $U^\sharp$, gdje je $Z^{\mathrm{otv}} \subset U$ i $W \subset U$ i $(e',y) \in f^*E \cap Z \times f^{-1}(\pi(W))$. Tada $\pi(e') = f(y)$ dakle $(e',y) \in f^*E \cap (Z \cap W) \times f^{-1}(\pi(Z \cap W)) = (Z \cap W)^\sharp \subset U^\sharp$ i $Z \cap W \subset U$ je otvoren. $\pi|(Z \cap W)^\sharp$ je bijekcija na $f^{-1}(\pi(Z \cap W))$ (svakog $r \in f^{-1}(\pi(Z \cap W))$ pogodimo kao sliku elementa $(\pi^{-1}(f(r)), r)$).

Preslikavanje $f^{\square}_E : f^*E \to E$ je dano formulom $(x,e) \mapsto e$.

Sad treba pokazati univerzalno svojstvo. Neka je dakle morfizam $\sigma : F \to E$ nad f fiksiran. Promotrimo $(\pi_F, \sigma) : F \to f^*E$ tj. $h \mapsto (\pi_F(h), \sigma(h))$. To je dobro definirano preslikavanje, jer je f preslikavanja nad f pa $f \circ \pi_F = \pi_E \circ \sigma$ i dakle $(\pi_F(h), \sigma(h)) \in f^*E \subset X \times E$; neprekidnost je očita kao i $f^{\square} \circ (\pi_F, \sigma) = \sigma$. Jedinstvenost ostavljamo čitatelju.

3.3. Propozicija. *Neka je* $U^{\mathrm{otv}} \subset X$*. Svaki prerez* $s : U^{\mathrm{otv}} \to f^*E$ *je nužno oblika* $s : x \mapsto (x, s'(x))$ *gdje* $s' = f^{\square}_E \circ s : U \to E$ *neka funkcija. Taj prerez je neprekidan akko* $\forall x \in U$, $\exists U'^{\mathrm{otv}} \ni x$, $\exists V^{\mathrm{otv}} \ni f(x)$ *takvi da je* $f(U') \subset V$ *i* $\exists r : G \to E$ *neprekidni prerez i* $r \circ f|_{U'} = s'|_{U'}$*. Drugim riječima* $s : U \to f^*E$ *je neprekidan prerez akko postoji pokrivač* $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ *od* U *i familija otvorenih skupova* $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_\alpha$ *i prereza* $r_\alpha : V_\alpha \to E$ *tako da je* $f(U_\alpha) \subset V_\alpha$ *i* $r_\alpha \circ f|_{U_\alpha} = s'|_{U_\alpha}$*.*

3.4. Neka je $s : V \to E$ prerez etalnog prostora E nad $V^{\mathrm{otv}} \subset Y$. Označimo s $t_s : f^{-1}V \hookrightarrow f^{-1}E$ preslikavanje $t_s : x \mapsto (x, [s]_{f(x)})$.

3.4.1. (Zadatak) Pokaži da ako je s neprekidan prerez, tada je t_s neprekidno preslikavanje.

3.5. Propozicija. *Neka je* $k : f^*E \to G$ *preslikavanje etalnih prostora nad* X*. Tada je* k *neprekidno akko je za svaki* $V^{\mathrm{otv}} \subset Y$ *i za svaki prerez* $s : V \to E$ $k \circ t_s : f^{-1}V \to G$ *neprekidno preslikavanje.*

Dokaz. Ako su t_s i k neprekidni tada je očito i njehova kompozicija. S druge strane, kako je t_s neprekidni prerez, to je i $\mathrm{Im}t_s$ je otvoren; nadalje skupovi oblika $\mathrm{Im}t_s$ pokrivaju f^*E. Dakle inverz $k^{-1}(W)$ otvorenog skupa $W \subset G$ je otvoren akko je $k^{-1}(W) \cap t_s(f^{-1}U)$ otvoren, dakle akko je $t_s^{-1}(k^{-1}(W) \cap t_s(f^{-1}U))$ jer inverz $t_s^{-1} : \mathrm{Im}t_s \to f^{-1}U$ homeomorfizam.

3.6. (Potiskivanje predsnopa uzduž neprekidnog preslikavanja f) Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Ono inducira funktor $f^{-1} = \mathrm{Ouv}(f) : \mathrm{Ouv}_Y \to \mathrm{Ouv}_X$, dan s $U \mapsto f^{-1}(U)$ i na morfizmima $(U \hookrightarrow V) \mapsto (f^{-1}(U) \hookrightarrow f^{-1}(V))$. Yonedino ulaganje je kontravarijantno funktorijalno na zamjenu bazne kategorije, tj. ako je $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor medju malim kategorijama, tada ga možemo proširiti do funktora $\hat{F} : \hat{\mathcal{D}} \to \hat{\mathcal{C}}$ s $\hat{F}(P) = P \circ F : \mathcal{C}^0 \to \mathbf{Set}$ za svaki $P : \mathcal{D}^0 \to \mathbf{Set}$. Stavimo $F = f^{-1}$ i dobivamo funktor $f_* = \widehat{f^{-1}} : \mathbf{PFas}_X \to \mathbf{PFas}_Y$. Drugim riječima, $f_*(P)(U) = P(f^{-1}(U))$ za $P \in \mathbf{PFas}_X$ i $U^{\mathrm{otv}} \subset Y$.

3.7. (Povlačenje predsnopa uzduž f) Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Ono nazivamo **otvoreno** preslikavanje akko šalje otvorene skupove u otvorene tj. $U \mapsto f(U)$ je funktor $\mathrm{Ouv}_X \to \mathrm{Ouv}_Y$. Općenito slika $f(U)$ nije otvorena pa umjesto nje gledamo inverzno usmjerenu kategoriju svih okolina $V^{\mathrm{otv}} \supset f(U)$ i ulaganja. Preciznije, definiramo funktor inverzne slike $f^{-1} : \mathbf{PFas}_Y \to \mathbf{PFas}_X$ formulom

$$f^{-1}(P)(U) := \mathrm{colim}_{V^{\mathrm{otv}} \supset f(U)} P(V) = \mathrm{colim}_{U \subset f^{-1}(V)} P(V). \tag{4}$$

Kako je P kontravarijantan, sustav $P(V)$ je usmjereni skup (restrikcije su strelice). Kako kolimesi ne čuvaju lijevu egzaktnost, inverzna slika za snopove je definirana s

$$f^{-1}\mathcal{F} := a(U \mapsto \mathrm{colim}_{U \subset f^{-1}(V)} \mathcal{F}(V)).$$

3.8. Kolimes u formuli (4) je kolimes dijagrama čija je domena primjer tzv. zarezne (engl. *comma*) kategorije. Neka je dan dijagram kategorija i funktora

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{C}.$$

Zarezna kategorija je kategorija $(F \downarrow G)$ čiji objekti su uredjene trojke (a, f, b) gdje je $a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $b \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ i $(F(a) \xrightarrow{f} G(b)) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$; čiji morfizmi su parovi $(\alpha, \beta) : (a, f, b) \longrightarrow (a', f', b')$ gdje su $\alpha : a \to a'$ morfizam u $\mathcal{A}$ i $\beta : b \to b'$ morfizam u $\mathcal{B}$ takvi da $G(\beta) \circ f = f' \circ F(\alpha) : F(a) \to G(b')$; i gdje se kompozicija morfizama izvrijednjuje po komponentama: $(\alpha_1, \beta_1) \circ (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 \circ \alpha_2, \beta_1 \circ \beta_2)$.

3.8.1. Zarezna kategorija je dana zajedno s projekcijama $p_{\mathcal{A}} : (F \downarrow G) \to \mathcal{A}$, $p_{\mathcal{B}} : (F \downarrow G) \to \mathcal{B}$, $p_{\mathcal{A}}(a, f, b) = a$, $p_{\mathcal{A}}(\alpha, \beta) = \alpha$, $p_{\mathcal{B}}(a, f, b) = b$ i $p_{\mathcal{B}}(\alpha, \beta) = \beta$, te s prirodnom transformacijom $\nu : F \circ p_{\mathcal{A}} \to G \circ p_{\mathcal{B}}$ s komponentama $\nu_{(a,f,b)} = f$.

3.8.2. (Univerzalno svojstvo zarezne kategorije) Neka je $\mathcal{D}$ kategorija, $F' : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ i $G' : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ funktori, te $\sigma : F \circ F' \Rightarrow G \circ G' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ prirodna transformacija. Tada postoji jedinstveni funktor $H : \mathcal{D} \to (F \downarrow G)$ tako da je $F' = p_{\mathcal{A}} \circ H$, $G' = p_{\mathcal{B}} \circ H$ i $\nu H = \sigma$. Funktor H je odredjen formulom $H : d \mapsto (F'(d), \sigma_d, G'(d))$ na objektima i $H : \delta \mapsto (F'(\delta), G'(\delta))$ na morfizmima. Prirodnost transformacije σ povlači da je par $H(\delta)$ zaista morfizam u $(F \downarrow G)$.

3.8.3. (Jednostavniji slučajevi zarezne kategorije) Ukoliko $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ i $F = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ tada označavamo $(\mathcal{A} \downarrow G) := (\mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \downarrow G)$, i slično $(F \downarrow \mathcal{B}) := (F \downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{B}})$. Ukoliko je $\mathcal{A} = \{c\}$ (inicijalna kategorija koja se sastoji od samo jednog objekta c i jednog morfizma id_c), i $F = \mathrm{const}_c : 1 \mapsto c$ tada označavamo $(c \downarrow G) := (\mathrm{const}_c \downarrow G)$; ukoliko je uz to i $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ i $G = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ tada $c/\mathcal{C} := (c \downarrow \mathcal{C}) = (c \downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ je **kategorija kokriški** (engl. *coslice category*) ili kategorija objekata (is)pod (objekta) c. Slično ako je $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ i $G = \mathrm{const}_c$ označimo $(F \downarrow c) := (F \downarrow \mathrm{const}_c)$ i ako je, uz to $F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, tada $\mathcal{C}/c := (\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathrm{const}_c)$ je **kategorija kriški** (engl. *slice category*) ili kategorija objekata (iz)nad c.

3.8.4. Uz korištenje pojma zarezne kategorije formulu (4) možemo napisati kao

$$f^{-1}P(U) = \mathrm{colim}_{(U,i,V)\in(\mathrm{Ouv}_X \downarrow f^{-1})} P(U) = \mathrm{colim}_{x\in(\mathrm{Ouv}_X \downarrow f^{-1})} P(p_{\mathrm{Ouv}_X}(x))$$

gdje je $i : U \hookrightarrow f^{-1}V$ jedino ulaganje za dane U, V. Mada ta formula izgleda kompliciranija, zgodna je u generalizacijama. Za snopove moramo dobiveni kolimes jos snopificirati.

3.9. Theorem. *Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora, $\mathcal{F}$ snop nad X i $\mathcal{G}$ snop nad Y. Tada postoji adjunkcija*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fas}_X}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fas}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Dat ćemo dva dokaza (i kasnije, treći u generalizaciji nad sajtovima).

3.10. Prvi dokaz je preko direktne konstrukcije jedinice i kojedinice adjunkcije. Primijetimo da $f_*f^{-1}\mathcal{G}(U) = f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}U) = \mathrm{colim}_{ff^{-1}U\subset V^{\mathrm{otv}}} \mathcal{G}(V)$, te da $ff^{-1}U \subset U$ ali tipično nije otvoreni podskup od U. Kako je $\mathcal{G}$ kontravarijantan funktor, to kod kolimesa možemo uzeti kofinalni dio dijagrama koji se sastoji samo od $V \subset U$. No za taj kofinalni dio postoje restrikcije $r_{VU} : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$.

Komponenta jedinice $\eta_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to f_*f^{-1}\mathcal{G}$ je morfizam snopova nad Y s komponentama $\eta_{\mathcal{G}}(U) : \mathcal{G}(U) \to f_*f^{-1}\mathcal{G}(U) = \mathrm{colim}_{ff^{-1}U\subset V} \mathcal{G}(V)$ danim formulom $\eta_{\mathcal{G}}(U) = \mathrm{colim}_{ff^{-1}U\subset V\subset U} r_{UV}$. Drugim riječima $\eta_{\mathcal{G}}(U)$ šalje prerez $s \in \mathcal{G}(U)$ u klicu $[s]_{ff^{-1}U}$ oko $ff^{-1}U$ "restrikcijom" koja je kolimes restrikcija. Ukoliko je $ff^{-1}U$ otvoren onda je ta "restrikcija" prava restrikcija $r_{ff^{-1}U,U}$.

S druge strane, $f^{-1}f_*\mathcal{F}$ je snop nad X s

$$f^{-1}f_*\mathcal{F}(U) = \mathrm{colim}_{f(U)\subset V^{\mathrm{otv}}} f_*\mathcal{F}(V) = \mathrm{colim}_{f(U)\subset V^{\mathrm{otv}}} \mathcal{F}(f^{-1}V).$$

Kako je $U \subset f^{-1}f(U) \subset f^{-1}V$, za V u formuli, to su definirane restrikcije $r_{U,f^{-1}V} : \mathcal{F}(f^{-1}V) \to \mathcal{F}(U)$. Kako $r_{U,f^{-1}V'} = r_{U,f^{-1}V} \circ r_{f^{-1}V,f^{-1}V'}$, po univerzalnom svojstvu kolimesa induciramo prelikavanje, koje je komponenta kojedinice naše adjunkcije

$$\epsilon_{\mathcal{F}}(U) : \mathrm{colim}_{f(U)\subset V^{\mathrm{otv}}} \mathcal{F}(f^{-1}V) \to \mathcal{F}(U).$$

Provjeru trokutnih relacija ostavljamo čitatelju.

3.11. (Drugi dokaz, kao MacLane-Moerdijk)

4 Komorfizmi i prstenovani prostori

4.1. Neka su M, N mnogostrukosti (npr. domene u euklidskim prostorima) i $f : M \to N$ neprekidno preslikavanje. Promatrajmo snopove glatkih funkcija C^∞_M, C^∞_N. Za svaki U^{otv}, $C^\infty(U)$ je algebra i restrikcije su preslikavanja algebri; tako da su C^∞_M, C^∞_N snopovi algebri. Algebre globalnih sekcija se označavaju $C^\infty(M) = C^\infty_M(M)$.

f inducira prelikavanje algebri $C^\infty(U) \to C^\infty(f^{-1}U)$, $g \mapsto g \circ f$ za sve $U^{\mathrm{otv}} \subset N$ akko je f glatko. To je lako vidjeti: laka strana je da je kompozicija glatkih preslikavanja glatko prelikavanje; manje očito je koristiti da kad raspišemo da je inducirano prelikavanje u lokalnim koordinatama glatko, onda je dovoljno provjeriti da su kompozicije s koordinatnim funkcijama glatke, a one su specijalne C^∞ lokalno definirane glatke funkcije. Preslikavanja algebri $C^\infty(U) \to C^\infty(f^{-1}U)$ su uskladjena s restrikcijama, tako da dobivamo prelikavanje $C^\infty_N \to f_* C^\infty_M$ snopova nad N.

Mnogostrukosti i glatke funkcije u ovom primjeru mogle su biti zamijenjene mnogim drugim geometrijskim primjerima. Primijetimo, da ova situacija *ne* odredjuje morfizam $C^\infty_M \to C^\infty_N$ snopova nad f, tj. prelikavanje etalnih prostora nad različitim bazama općenito. Osnovna razlika je u tome da morfizam $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ snopova nad f ima jedinstvenu dekompoziciju u kompoziciju $\mathcal{F} \to f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{G}$, gdje je $\mathcal{F} \to f^{-1}\mathcal{G}$ preslikavanje snopova nad X, a $f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ odabrano kartezijevo preslikavanje nad f. U našem slučaju, postoji slična dekompozicija u terminima inverzne slike, morfizma nad X i nekog preslikavanja nad f koje spominje samo $\mathcal{G}$; no prvo preslikavanje je u suprotnom smjeru: $f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$. Pošto je taj fenomen nešto općenitiji, mi najprije definiramo pojam *komorfizma*.

4.2. Komorfizam (pred)snopova $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ nad neprekidnim preslikavanjem $f : X \to Y$ je morfizam (pred)snopova $\phi : \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ nad Y.

4.3. Propozicija. *Komorfizmi su u korespodenciji s familijama $\{\phi_x\}_{x\in X}$ morfizama vlati $\phi_x : \mathcal{G}_{f(x)} \to \mathcal{F}_x$, takvima da je za svaki prerez $s \in \Gamma_U\mathcal{G}$, preslikavanje $\phi_x \circ s \circ f$ neprekidni prerez snopa $\mathcal{F}$ nad $f^{-1}(U)$.*

4.4. Korolar. *Komorfizmi snopova su u prirodnoj bijekciji s morfizmima $\phi' : f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ nad Y.*

4.5. Korolar. *Svaki komorfizam $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ima jedinstvenu dekompoziciju na vlatima $\mathcal{G}_{f(x)} \to (f^{-1}\mathcal{G})_x \to \mathcal{F}_x$ gdje je s $\mathcal{G}_{f(x)} \to (f^{-1}\mathcal{G})_x$ dan kanonski komorfizam nad f dan jedinicom adjunkcije $f^{-1} \dashv f_*$, a $f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ je morfizam nad X. Isti komorfizam ima i jedinstvenu dekompoziciju na vlatima $\mathcal{G}_{f(x)} \to (f_*\mathcal{F})_{f(x)} \to \mathcal{F}_x$ gdje je $\mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ morfizam nad X, a s $(f_*\mathcal{F})_{f(x)} \to \mathcal{F}_x$ dan kanonski komorfizam nad f dan kojedinicom adjunkcije $f^{-1} \dashv f_*$.*

4.6. Prstenovani prostor je par $(X, \mathcal{F})$ gdje je X topološki prostor, a $\mathcal{F}$ je snop prstenova nad X. Snop prstenova $\mathcal{F}$ naziva se **strukturni snop** prstenovanog prostora $(X, \mathcal{F})$. Morfizam prstenovanih prostora je par $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ gdje je $f^\sharp : \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ morfizam snopova prstena nad Y, tj. komorfizam snopova prstena $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

4.7. Mala varijanta prstenovanih prostora su **lokalno prstenovani prostori**; oni su objekti potkategorije kategorije prstenovanih prostora čiji strukturni snopovi su snopovi *lokalnih prstenova*, tj. prstenova koji imaju jedinstveni maksimalni ideal; a čiji su komorfizmi nad f zapravo morfizmi snopova lokalnih prstenova nad Y, tj. za svaki $U^{\mathrm{otv}} \subset Y$, $f^\sharp : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(f^{-1}U)$ je morfizam lokalnih prstenova (slika maksimalnog ideala u $\mathcal{G}(U)$ je maksimalni ideal u $\mathcal{F}(f^{-1}U)$).

4.8. Ako je $X \subset Y$ i $(Y, \mathcal{G})$ prstenovani prostor tada je prirodno definiran prstenovani prostor nad X, $(X, \mathcal{G}|_X)$ koji nazivamo **restrikcija** $(Y, \mathcal{G})$ **na** X. Ako je $j : X \hookrightarrow Y$ ulaganje tada je $\mathcal{G}|_X = j^{-1}\mathcal{G}$.

5 Sheme

5.1. **Shema** je lokalno prstenovani prostor $(X, \mathcal{F})$ takva da postoji otvoreni pokrivač $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$, $\cup_\alpha U_\alpha = X$ i restrikcija $(U, \mathcal{F}|_U)$ je izomorfan lokalno prstenovanom prostoru oblika $\mathbf{Spec}\, R$ gdje je R neki prsten.

Lokalno prstenovani prostor $\mathbf{Spec}\, R$ će biti definiran u nekoliko koraka. Najprije definiramo $\mathbf{Spec}\, R$ kao skup: to je skup svih *prostih ideala* u R. Tada definiramo topologiju Zariskog na tom skupu. Onda definiramo podkategoriju topologije Zariskog, koji se sastoji od tzv. glavnih otvorenih podskupova D_f i pokazujemo da oni čine bazu topologije Zariskog. Tada definiramo predsnop lokalnih prstenova na podkategoriji glavnih otvorenih podskupova uz pomoć komutativne lokalizacije. Tada pokazujemo da taj predsnop zadovoljava varijantu snopovskog uvjeta. Na kraju pokazujemo da predsnop koji zadovoljava tu varijantu se proširuje s baze na čitavu topologiju do (strukturnog) snopa lokalnih prstenova na cijeloj topologiji Zariskog.