FAKULTET GRAĐEVINSKIH ZNANOSTI

SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

MLADEN PAVIČIĆ

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ FIZIKE

DRUGO IZDANJE

ZAGREB, 1984.

Odobrenje Predsjednika skupštine Sveučilišta u Zagrebu
Br. 02-788/1 od 13. VII 1984. god.

Cijena za studente Sveučilišta u Zagrebu
Din 246.–

Tisak: Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, Trg maršala Tita 14
Broj 1468/SL

Predgovor

Zbirci koja je pred Vama, potrebno je predmetnuti nekoliko riječi.

Nastava fizike na Fakultetu građevinskih znanosti koncentrirana je u prvom semestru nastave. Kao posljedica toga , njoj ne stoji na raspolaganju osnovni matematski aparat više matematike, koji se postepeno obrađuje, u pripadnom kolegiju, tokom prva dva semestra (mehanika se izlaže bez primjene diferencijalnog i integralnog, a toplina i elektricitet bez primjene integralnog računa). Da bi se nadoknadio relativno kratak vremenski kontakt studenata s pojedinim područjima fizike, dan je znatan broj detaljno riješenih zadataka, koji homogeno prekrivaju nastavno gradivo i omogućuju studentima njegovo aktivno individualno svladavanje - kao dodatak neriješenim zadacima koji se prorađuju na vježbama. Odsutstvo matematskog aparata više matematike, s druge strane, za većinu nije moglo biti nadoknađeno drugačije nego pozivanjem na gotove rezultate i formule. Međutim, za naprednije studente, kao i za one koji žele proširiti svoje znanje, spomenuti rezultati i formule su ipak izvedeni, ali primjenom graničnih vrijednosti i beskonačnih suma, tj. historijskim oblikom (razvoja) diferencijalnog i integralnog računa. Takvi zadaci, kao i svi oni koji zahtijevaju rutinu i predznanje veće od prosječno pretpostavljenog, su označeni slovom "X" na margini.

I još nekoliko tehničkih napomena. Poredak i izrade zadataka pretpostavljaju kontinuiran rad studenta. Izrada pojedinih zadataka se, naime, relativno često poziva na izradu nekog prethodnog zadatka. Isto tako se numeričke vrijednosti potrebnih fizikalnih konstanata, početno, eksplicitno navode u tekstu zadataka, ali se nakon većeg broja ponavljanja pojedinih (npr. naboja elektrona), pretpostavlja da se student s njima upoznao, te se počinje izostavljati njihovo eksplicitno navođenje.

Autor je svjestan mogućnosti postojanja koncepcijskih i izvedbenih nedostataka i propusta, i sa zahvalnošću će primiti svaku sugestiju i primjedbu.

I na kraju, želim se zahvaliti Petru Coliću na podršci i brojnim savjetima i diskusijama.

Autor

Zagreb, 2o.1o.1981.

Predgovor drugom izdanju

Na osnovu nastavnog iskustva u protekle dvije godine, u ovom izdanju izmijenjeno je nekoliko zadataka i povećana je preglednost rješenjâ. Sami studenti predložili su neke od izmjena i uočili nekoliko omaški. Na tome im se zahvaljujem.

Također se zahvaljujem Petru Coliću i prof. Emilu Babiću koji su recenzirali zbirku i svojim mi sugestijama pomogli da njen tekst u ovom izdanju jezično i metodski pročistim.

Autor

Zagreb, 15.o2.1984.

Sadržaj

Četvrti dio. ELEKTRICITET

Prvi dio

MEHANIKA

I VEKTORSKI RAČUN

a) Neriješeni zadaci za vježbe

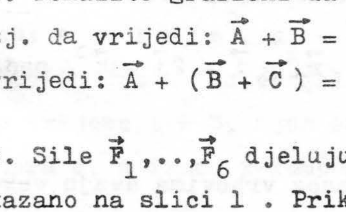
1. Pokažite grafički da je zbrajanje vektora komutativno, tj. da vrijedi: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$, i asocijativno, tj. da vrijedi: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$.

2. Sile $\vec{F}_1, .., \vec{F}_6$ djeluju na neki objekt P, kao što je prikazano na slici 1 . Prikažite grafički silu kojom je potrebno djelovati na objekt da bi ostao u stanju mirovanja.

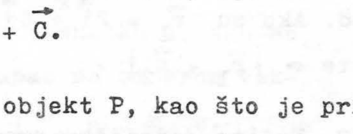
3. Za vektore koji su dani na slici 2 konstruirajte:

a) $\vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C}$;

b) $3\vec{C} - \frac{1}{2}(2\vec{A} - \vec{B})$.



sl. 1



sl.2

4. Odredite veličinu (iznos) vektora $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

5. Ako su dana dva neparalelna vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$, nađite izraz za proizvoljan vektor $\vec{R}$ koji leži u ravnini određenoj vektorima $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

6. Dokažite: ako su dva vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$ neparalelna onda $x\vec{A} + y\vec{B} = \vec{0}$ implicira $x = y = 0$.

b) Riješeni zadaci

7. Nađite radijus-vektore točaka P(2,4,3) i Q(1,-5,2), te njihov zbroj - grafički i analitički.

8. Ako su $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ i $\vec{r}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, nađite : $|\vec{r}_1 + \vec{r}_2|$.

9. Nađite jednadžbu pravca određenog vrhovima dvaju vektora čija su hvatišta u istoj točci O.

lo. Dokažite da spojnice središta susjednih stranica bilo kakvog četvorokuta tvore paralelogram.

11. Formulirajte i dokažite analogon 6. zadatka za tri vektora koji ne leže u istoj ravnini.

12. Ako je $x_1\vec{A} + y_1\vec{B} = x_2\vec{A} + y_2\vec{B}$, gdje su $\vec{A}$ i $\vec{B}$ neparalelni, onda je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$. Analogno za tri vektora koji ne leže u istoj ravnini. Dokažite!

II KINEMATIKA

a) Neriješeni zadaci za vježbe

13. Gibanje materijalne točke predstavljeno je vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r} = (bt + c)\vec{i} + (dt + e)\vec{j}$$

gdje je : t - vrijeme, b = 4 m/s, c = 2 m, d = -1 m/s, e = 2 m.

Odredite njenu putanju, brzinu i akceleraciju.

14. Komponente vektora ubrzanja, $\vec{a}$, materijalne točke jesu: $a_x = 1\ m/s^2$, $a_y = 2\ m/s^2$ i $a_z = -2\ m/s^2$. Nađite brzinu materijalne točke u trenutku t, ako se, u vrijeme t = 0, njen smjer poklapao sa smjerom vektora $\vec{a}$, a iznos x-komponente bio : $v_x = 3\ m/s$.

15. Ako je automobil prevalio prvu polovinu puta brzinom od 4o km/h, a drugu brzinom od 6o km/h, kolika je njegova srednja brzina na čitavom putu?

16. Tijelo se giba jednoliko usporeno tako da u toku prve sekunde prevali 2 m puta, a pola sekunde nakon toga se zaustavlja. Odredite početnu brzinu tijela i usporenje.

17. Izrazite brzinu materijalne točke koja se giba jednoliko ubrzano pomoću njenog položaja.

18. Ako s visine od 2 m ispustimo tijelo, koliko će dugo ono padati od visine 1 m do podnožja, s obzirom na koje mjerimo visinu? (Trenje zraka zanemarujemo.)

19. Iz točke na visini y_o iznad površine Zemlje izbačena su, kroz interval t_o, jedno za drugim, dva tijela jednakom brzinom v_o i to: prvo tijelo vertikalno prema gore, a drugo vertikalno prema dolje. Kroz koje će se vrijeme, od početka gibanja prvog tijela, oba tijela nalaziti na udaljenosti Δy jedno od drugoga, pod uvjetom da je: $2v_o > t_o g$?

b) Riješeni zadaci

X 2o. Iz točke s koordinatama x_o, y_o izbačeno je tijelo pod kutem α_o prema horizontu, početnom brzinom v_o. Nađite:

a) položaj i brzinu tijela kroz vrijeme t;

b) jednadžbu putanje tijela;

c) normalno i tangencijalno ubrzanje tijela;

d) najveću visinu uspinjanja;

e) kut pod kojim treba izbaciti tijelo da bi maksimalna visina i domet bili jednaki za $x_o = y_o = 0$.

21. Iz neke točke na površini Zemlje izbačeno je tijelo, vertikalno uvis, brzinom v_o. Nakon kojeg vremena će ponovo pasti na isto mjesto?

22. Vozilo se 10 s kreće brzinom od 6 m/s, u jednom smjeru, 2o s brzinom 8 m/s, u suprotnom. Koliki je srednji iznos brzine vozila i srednja brzina na cijelom putu?

X 23. Gibanje tijela zadano je jednadžbom:

$$s = at - bt^2 + ct^3$$

gdje je : t - vrijeme, $a = 2\ m/s$, $b = 3\ m/s^2$, i $c = 4\ m/s^3$. Treba naći:

a) kako brzina i akceleracija ovise o vremenu;

b) prevaljeni put, brzinu i akceleraciju 2 s nakon početka gibanja;

c) graf od s(t), v(t) i a(t) za $\frac{1}{2}s \leq t \leq 3s$;

d) srednju brzinu unutar $t = \frac{1}{2}$ s i $t = 1$ s.

24. Avion leti na nekoj relaciji i natrag, brzinom v. Nađite srednju brzinu za svaki od preleta ako:

a) u jednom smjeru, a uzduž rute, puše vjetar brzinom u;

b) okomito na rutu, puše vjetar istom brzinom.

25. Pješak trči brzinom od 6 m/s za autobusom koji stoji kod semafora. U trenutku paljenja zelenog svjetla pješak je od autobusa udaljen za 24 m. Autobus počinje jednoliko ubrzavati akceleracijom od $1\ m/s^2$. Kolika je najmanja udaljenost na koju će pješak približiti autobusu?

26. Gibanje materijalne točke predočeno je vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r} = (b_x + c_x t)\vec{i} + (b_y + c_y t)\vec{j} + (b_z + c_z t)\vec{k}$$

gdje je: t - vrijeme, $b_x = 3$ m, $b_y = 2$ m, $b_z = 4$ m, $c_x = 2$ m/s, $c_y = 6$ m/s, $c_z = -3$ m/s.
Odredite putanju, brzinu i akceleraciju materijalne točke.

III STATIKA I DINAMIKA

a) Neriješeni zadaci za vježbe

27. Čovjek vozi táčke stalnom brzinom. Dio puta ih gura pred sobom, a dio vuče za sobom. U oba slučaja ručke s horizontalnim putem zatvaraju kut od $\frac{\pi}{6}$ rad. U kojem slučaju čovjek ulaže veću silu, i koliku, ako je koeficijent trenja $k = 0,2$, a masa táčki, zajedno s teretom, $m = 50$ kg?

28. Da bi se s mjesta pomakle saonice mase 100kg potrebna je sila od 500 N. Nakon što se pokrenu, potrebno je primijeniti silu od 150 N da bi klizile dalje. Treba odrediti koeficijent početnog trenja i trenja klizanja.

29. U dizalu mase $m_1 = 200$ kg obješen je teret mase $m_2 = 10$ kg na visini od 1,5 m od poda dizala. Dizalo se diže (s ubrzanjem) djelovanjem sile od 2300 N. Nađite:

a) ubrzanje dizala s teretom;

b) napetost niti kojom je teret pričvršćen za strop dizala;

c) ubrzanje dizala i tereta, nakon što se nit iznenada prekinula;

d) vrijeme potrebno da teret, nakon prekida niti, padne na pod dizala.

3o. Dinamometar na Zemlji pokazuje težinu utega od 10 N. Na Mjesecu, jedan kamen mjeren istim dinamometrom, ima također težinu od 10 N. Na Mjesecu su se kamen i uteg, povezani nerastezljivom niti prebačenom preko koloture, počeli gibati ubrzanjem od $1,2\ m/s^2$. Kolika je masa kamena?

31. Automobil teži 10000 N. Za vrijeme jednolikog gibanja, na automobil djeluje sila trenja jednaka jednoj desetini njegove težine. Ako se automobil giba uz brdo s nagibom od 1 m na svakih 25 m puta, kolika će biti vučna sila njegova motora?

32. Na strop vagona koji se giba s ubrzanjem od 1 g, obješena je kuglica. Koliki kut zatvara nit, o koju je kuglica obješena, s podom vagona?

33. Dvije sile, od 5 N i od 3 N, djeluju na materijalnu točku tako da im smjerovi djelovanja zatvaraju kut od $\frac{\pi}{3}$ rad. Odredite iznos rezultante tih dviju sila.

34. Na materijalnu točku djeluju tri sile u ravnoteži. Odredite kutove koje one međusobno zatvaraju ako su njihovi iznosi: 6 N, 8 N i 10 N.

35. Na krajevima kolica dugačkih 5 m, mase 260 kg, nalaze se dva čovjeka masâ 60 kg i 80 kg. Za koliko će se promijeniti položaj kolica u odnosu na zemlju, ako ljudi zamijene mjesta? (Kolica su na horizontalnoj podlozi, a trenje se zanemaruje.)

36. Odredite položaj centra mase homogenog trapeza, ako je: $AB = 2BC = 2CD$, $AB \perp BC$ i $AB \parallel CD$.

37. Nađite težište homogene ploče, pravokutnog oblika, iz koje je izrezan dio kružnog oblika.

38. Štap, duljine L, presavinut na polovici pod pravim kutem, obješen je za jedan od krajeva. Kolike će kuteve pojedini dijelovi štapa zatvarati s okomicom koja prolazi kroz objesište?

b) Riješeni zadaci

39. Na podlozi, koja s površinom Zemlje zatvara kut α, nalazi sa tijelo P. Vanjska sila $\vec{F}_v$ gura tijelo uz podlogu. Ako je koeficijent trenja između tijela i podloge k, kut između $\vec{F}_v$ i podloge β i težina tijela G, koliki mora biti iznos sile $\vec{F}_v$, da bi se tijelo gibalo jednoliko?

4o. Na tijelo mase 5 kg, u horizontalnom smjeru djeluje sila od 20 N. Odredite ubrzanje tijela, ako je koeficijent trenja između tijela i horizontalne podloge 0,4.

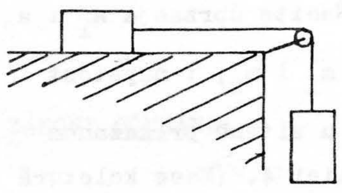
41. Na tijelo mase 2 kg djeluju sile $F_1 = 3$ N i $F_2 = 4$ N pod kutovima $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ rad i $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$ rad, respektivno, prema početnoj brzini $v_o = 20$ m/s. Nađite:

a) ubrzanje tijela;

b) brzinu tijela na kraju desete sekunde gibanja.

42. Na niti, koja može izdržati maksimalnu napetost od 2000 N, diže se teret težine 1000 N iz stanja mirovanja vertikalno uvis. Sila otpora sredine je 19 N. Nađite najveću visinu na koju se može podići teret u vremenu od 2s.

43. Dva tijela jednakih masa nalaze se u situaciji prikazanoj slikom 3. Nađite ubrzanje tijelâ, ako je koeficijent trenja između tijela i podloge o,1, a trenje u koloturi zanemarujemo.



Sl. 3

44. Avion leti pravocrtno i horizontalno uslijed konstantne vučne sile elise od 50000 N. Otpor zraka je $F_o = -bv^2$, gdje je b = o,5 kg/m. Odredite najveću moguću brzinu aviona.

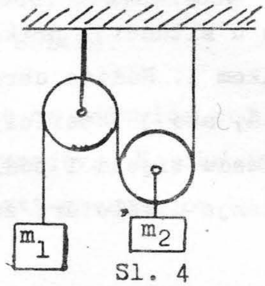
45. Za vrijeme gibanja,na automobil mase 1000 kg djeluje sila trenja jednaka 0,1 njegove težine. Nađite iznos vučne sile njegova motora prilikom gibanja konstantnom brzinom a) uzbrdo, b) nizbrdo.

46. Koliki je nagib kosine, ako u vozilu, koje se bez trenja giba niz nju, uteg mase 1 kg teži 6 N, u smjeru $\vec{g}$?

47. Automobil težak 10000 N zaustavlja se, prilikom kočenja, za 5 s, prelazeći tada razdaljinu od 25 m. Nađite silu kočenja, ako je usporavanje jednoliko.

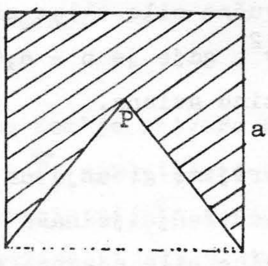
48. Na mirnoj vodi nalazi se splav dužine 10 m i mase 900 kg. Na jednom kraju mirujuće splavi nalazi se čovjek mase 80 kg, na drugom dječak mase 20 kg. Koji će biti novi položaj splavi prema zemlji, ako dječak dođe na sredinu, čovjek na drugu stranu splavi, a s otporom vode ne računamo?

49. Nađite ubrzanja a_1 i a_2 masâ m_1 i m_2, i napetost niti u sitemu prikazanom na slici 4. (Mase koloturâ i niti, kao i trenje u koloturama, zanemarujemo.)



Sl. 4

X 50. Iz metalne tanke ploče kvadratnog oblika treba izrezati jednakokračni trokut tako da se dobiven lik (prikazan na sl.5) obješen u točki P nalazi u ravnoteži, bez obzira na položaj lika u prostoru. Kolika je visina isječenog trokuta ako je stranica kvadrata duljine a?



Sl. 5

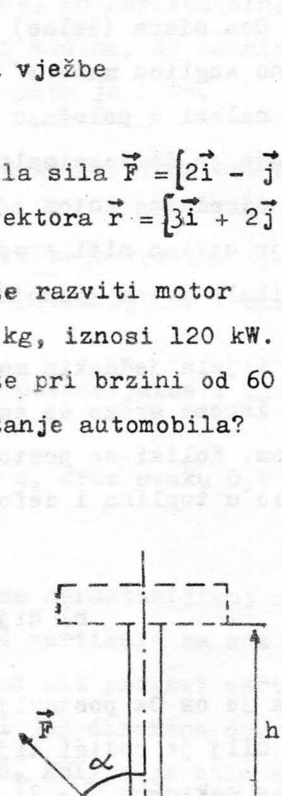
IV RADNJA, ENERGIJA I ZAKONI OČUVANJA

a) Neriješeni zadaci za vježbe

51. Nađite rad koji je izvršila sila $\vec{F} = [2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}]$ N pokrećući neki objekt uzduž vektora $\vec{r} = [3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}]$ m.

52. Maksimalna snaga koju može razviti motor jednog automobila, mase 1000 kg, iznosi 120 kW. Ako se ta maksimalna snaga postiže pri brzini od 60 km/h, koliko je u tom trenutku ubrzanje automobila?

53. Prema slici 6, na tijelo mase 5 kg djeluje sila F i pokreće ga po vertikalnom nosaču do visine h = 0,5 m. Kut djelovanja sile je stalan: $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad. Kada tijelo slobodno klizi koeficijent trenja je 0,3. Koliki je izvršeni rad i stupanj korisnog djelovanja?

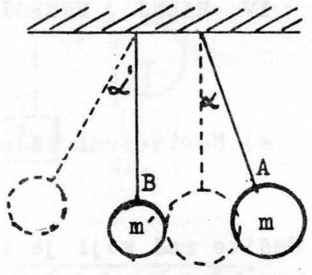


Sl. 6

54. Kuglica njihala, mase m i zanemarivih dimenzija (otpor zraka, kuglici i niti na kojoj ona visi, zanemarujemo), ima u srednjem (vertikalnom) položaju

brzinu v. Koliki će biti otklon niti od vertikale u krajnjim položajima, ako je duljina niti l.

55. Iz položaja A (v. sl. 7) ispuštamo čeličnu kuglicu mase m. Ona udara (čelno) u nepomičnu kuglicu mase m′ koja se nalazi u položaju B i odbacuje je do maksimalnog otklona određenog kutom α'. Koliki je otklon niti prve kuglice od vertikale u tom trenutku? (Sudar je elastičan.)



Sl. 7

56. Dva tijela jednakih masa gibajući se brzinama jednaka iznosa sraze se savršeno neelastično pod pravim kutom. Koliki se postotak njihove ukupne energije pretvorio u toplinu i deformacije?

b) Riješeni zadaci

57. Neka je os Oz postavljena okomito na površinu Zemlje. Cilj je podići tijelo, mase m = 1 kg, uzduž puta određenog vektorom $\vec{r} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$ m, djelovanjem sile $\vec{F} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 6\vec{k}$ N, na 3 m viši nivo od početnog. Koliki je izvršeni rad i stupanj korisnog djelovanja?

58. Prilikom vertikalnog podizanja tereta mase 2 kg na visinu od 1 m konstantnom silom F bio je izvršen rad od 80 J. S kolikim ubrzanjem je bio podignut teret?

59. S kosine, čiji je jedan kraj uzdignut za 1 m i koja je dugačka 10 m, klizi tijelo mase 1 kg. Nađite:

a) kinetičku energiju tijela u dnu kosine;

b) brzinu tijela u dnu kosine;

c) put kojeg tijelo pređe, po horizontalnoj podlozi na kojoj se nalazi kosina, do zaustavljanja.

Koeficijent trenja na čitavom putu je 0,05.

60. Kamen mase 1 kg bačen je uvis početnom brzinom od 9,8 m/s. Nacrtajte graf:

a) ovisnosti visine i brzine o vremenu t;

b) ovisnosti kinetičke, potencijalne i ukupne energije o vremenu;

c) ovisnosti kinetičke, potencijalne i ukupne energije o visini;

za vremenski interval $0 \leqslant t \leqslant 2$ s, kroz svaku 0,2 s. Otpor zraka zanemarujemo.

61. Kugla mase m obješena je na nerastezljivoj niti duljine L. Kuglu otklanjamo od vertikale za kut α i zatim ispuštamo. U trenutku kad nit prolazi vertikalnim položajem u kuglu se, dolazeći joj direktno ususret, zabija tane i zaustavlja kuglu. Kolika je bila brzina taneta, ako je njegova masa m'?

62. Tijelo, teško 30 N, giba se brzinom od 4 m/s i nalijeće, centralno i savršeno neelastično, na drugo, mirujuće tijelo jednake težine. Kolika se količina topline oslobodila prilikom udara?

V KRUŽNO GIBANJE, VRTNJA KRUTOG TIJELA I GRAVITACIJA

a) Neriješeni zadaci za vježbe

63. Kolotura Atwoodovog stroja ima promjer od 0,2 m. Utezi, obješeni na krajevima niti prebačene preko koloture, gibaju se s ubrżanjem od 0,2 m/s^2. Odredite broj okretaja i kutnu brzinu koloture 3 s nakon početka gibanja.

64. Koliki je pritisak na podlogu točkova kamiona teškog 75000 N (uzimajući da je površina guma u kontaktu s podlogom = cca 1 m^2) na udubljenom dijelu ceste, s polumjerom zakrivljenosti od 60 m, ako se kamion giba brzinom od 70 km/h?

65. Željeznička pruga ima zavoj polumjera 200 m. Koliku maksimalnu brzinu možemo omogućiti, uzdizanjem vanjske tračnice, teretnom vlaku, čiji pojedini, natovareni vagoni imaju težište 3 m iznad nivoa (a između) tračnica (normalnog kolosjeka, 1435 mm)? (Uputa: Vagoni se ne smiju prevrnuti ako vlak stane u zavoju.)

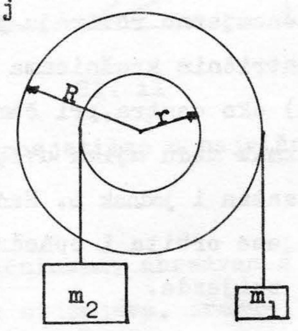
X 66. Prsten i disk jednakog promjera i jednake mase kotrljaju se bez klizanja jednakom linearnom brzinom. Kolika je kinetička energija diska ako je kinetička energija prstena 1 J?

67. Koliko puta je kinetička energija umjetnog Zemljinog satelita, koji se giba po kružnici, manja od apsolutne vrijednosti njegove gravitacijske potencijalne energije?

68. Nađite izraz za prvu kosmičku brzinu, tj. onu brzinu koju tijelo mora imati prilikom ulaska u kružnu orbitu, oko planete polumjera R i mase M, na visini h od površine planete.

b) Riješeni zadaci

X 69. U dvostrukoj koloturi, prikazanoj na slici 8, na veći kotur namotana je nit s utegom m_1, a na manji - nit s utegom m_2. Iz poznatih radijusa R i r, i eksperimentalno utvrđenog podatka da se, od početka gibanja, za tri sekunde kolotura okrene za točno 2 puna okreta, nađite:



Sl. 8

a) masu utega m_1, ako je poznata masa utega m_2;

b) akceleracije pojedinih utega a_1 i a_2;

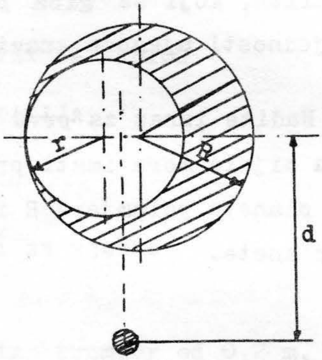
c) napetosti pojedinih niti T_1 i T_2.

7o. Automobil se giba po kružnici radijusa r brzinom v, prekoračenjem koje dolazi do "proklizavanja". Nađite minimalni koeficijent trenja klizanja pri kojem ne dolazi do "proklizavanja".

X 71. Stup, visine L, pada iz vertikalnog položaja. Nađite brzinu gornjeg kraja stupa prilikom udara o zemlju.

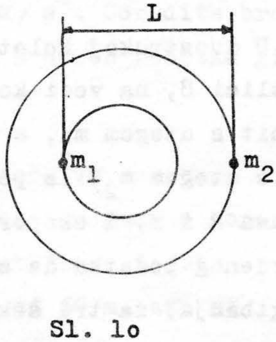
72. Radijus Zemljine orbite je r; radijus Sunca - R. Nađite srednju gustoću Sunca.

73. Unutar kuglastog tijela (v. sl. 9) polumjera R i gustoće ρ nalazi se šupljina polumjera r. Kolika je gravitacijska privlačnost ove kugle i tijela mase m, udaljenog za d od pravca koji prolazi središtima kugle i šupljine?



Sl. 9

74. Dvije zvijezde masâ m_1 i m_2 ravnomjerno rotiraju po koncentričnim kružnicama (v. sl. lo) oko centra, pri čemu je razmak među njima uvijek konstantan i jednak L. Nađite radijuse orbita i ophodne periode zvijezda.

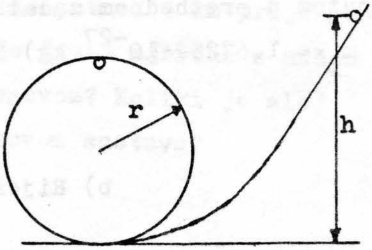


Sl. lo

— Nađite moment inercije homogene kugle mase m i radijusa R. (Za rješenje v. zadatak 178.)

VI REFERENTNI SUSTAVI I RELATIVNOST

a) Neriješeni zadaci za vježbe



Sl. 11

75. U Luna parku je tobogan (v. sl. 11) konstruiran tako da saonice, uz zanemarivo trenje, polaze s visine h, ulaze u petlju spirale (približno kružnica) radijusa $r = \frac{2}{5}h$ i produžuju. Koliku će vlastitu težinu moći registrirati posjetilac u najvišoj točki petlje?

76. Vagon je, po horizontalnim tračnicama, ubrzavan s akceleracijom od 1 g. Za koliko će stupnjeva, promatraču u vagonu koji ne zna da je ubrzavan, biti nagnut pod s obzirom na njegov vertikalan položaj?

77. Dva se automobila mimoiđu na ravnom dijelu puta, krećući se brzinom od 100 km/h, svaki. Kojom se brzinom udaljuju jedan od drugoga?

78. Dva se fotona mimoiđu, krećući se brzinom od c = 1080000000 km / h. Kojom se brzinom udaljuju jedan od drugoga?

79. Protoni u kosmičkim zrakama gibaju se brzinom $v = (1-10^{-20})\,c$. Kad bi se mogao sagraditi kosmički brod koji bi mogao postići takvu brzinu, koliko bi vremena astronautima, s njihove točke gledišta, bilo potrebno da takvom brzinom stignu s jednog kraja naše galaksije na drugi (10^{21} m)? A s naše točke gledišta?

80. Kolika je masa protona koji se kreće brzinom spomenutom u prethodnom zadatku (masa mirovanja protona je $m_p = 1{,}67252 \cdot 10^{-27}$ kg)?

b) Riješeni zadaci

X 81. Koliku će akceleraciju imati saonice, mase m, iz zadatka 75., u trenutku kad im brzina bude usmjerena vertikalno?

82. Iz jedne baze lansirana je raketa, vertikalno uvis, s akceleracijom 2 g. Horizontalnim pravcem, za d udaljenim od putanje rakete, konstantnom brzinom kreće se kontrolni avion. Koliku akceleraciju rakete registrira promatrač u avionu?

83. Na kosini nagnutoj pod kutom od 30^{o} ubrzava se, prema gore, vozilo s akceleracijom od 0,6 g. U kojem omjeru je težina utega u tom vozilu prema težini utega jednake mase u mirnom prostoru?

84. Nađite brzinu kosmičke čestice, ako je njena ukupna energija pet puta veća od energije mirovanja.

X 85. Dva se elektrona gibaju u suprotnom pravcu brzinom od 0,80 c , svaki. Nađite:

a) masu pojedinog elektrona;

b) ukupnu i kinetičku energiju pojedinog elektrona;

c) relativnu brzinu dvaju elektrona.

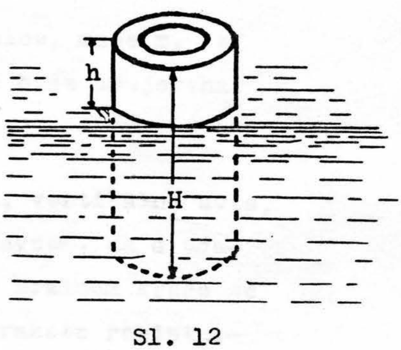
86. U gornjim slojevima atmosfere formiran μ-mezon, giba se brzinom od 0,99c. Prešao je put od 5 km prije nego što se raspao. Koliko dugo je živio mjereno u našem sustavu, a koliko mjereno u njegovom? Koliki je sloj atmosfere prošao mjereno u njegovom sustavu?

VII HIDRO- I AEROMEHANIKA

a) Neriješeni zadaci za vježbe

87. U 2 dl vode, u čaši, pliva kocka leda, volumena 10 cm^3. Za koliko će se promijeniti nivo vode kad se led potpuno otopi? A u slučaju da led sadrži mjehurić zraka, volumena 2 cm^3?

88. Cijev pluta, uspravljena u vodi, kao što je prikazano na sl. 12, tako da jedan njen dio, dužine h = 5 cm, strši iznad vode. Kolika je ukupna dužina cijevi, H, ako ona može biti potpuno napunjena uljem, gustoće ρ = 900 kg/m^3, a da joj se položaj s obzirom na površinu ne promijeni? (Gustoća vode je ρ' = 1000 kg/m^3)



Sl. 12

89. Katodna cijev televizora (kineskop) ima ekran dimenzija 44 cm X 58 cm. Kojom silom djeluje zrak na ekran uz atmosferski tlak od 1 at? (Tlak unutar cijevi je praktički jednak nuli.) (1 at = 1 tehnička atmosfera = $9{,}81 \cdot 10^4$ Pa)

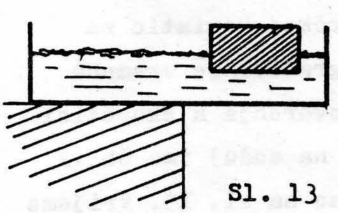
9o. Ako uhvatimo dva lista papira prstima, tako da vise paralelno jedan uz drugog, međusobno udaljeni za 3 - 4 cm, i puhnemo među njih, papiri se neće razmaknuti već skupiti. Zašto?

91. Neboder ima 15 katova a svaki kat je visok 2,5 m. Koliki je tlak u vodovodnim cijevima u prizemlju, ako je tlak na 15 katu 2 atm (= 2,o2 bar = 2,o2$\cdot 10^5$ Pa) ?

92. Mlaz vode ističe iz cijevi promjera d = 1 cm brzinom od 1 m/s i udara u vertikalan zid. Odredite silu kojom mlaz djeluje na zid, ako je cijev okomita na njega i ako zanemarimo rasprskavanje vode (tj. ako pretpostavimo da je udar vode o zid savršeno neelastičan).

b) Riješeni zadaci

93. Posuda cilindričnog oblika s tekućinom nalazi se u ravnoteži na rubu stola (v. sl. 13). Da li će se posuda prevrnuti ako u nju stavimo komad drveta kao što je prikazano slici?

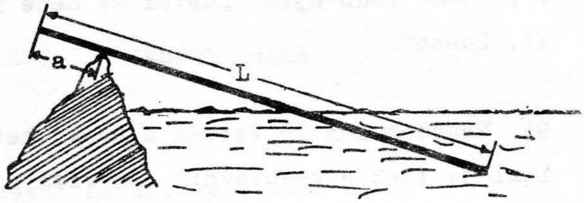


Sl. 13

94. Gumena lopta, mase m i radijusa R, potopljena je u vodu do dubine h i otpuštena. Do koje će visine lopta iskočiti iz vode, ako zanemarimo otpor vode i zraka? Koju

će brzinu lopta imati u trenutku izranjanja iz vode?

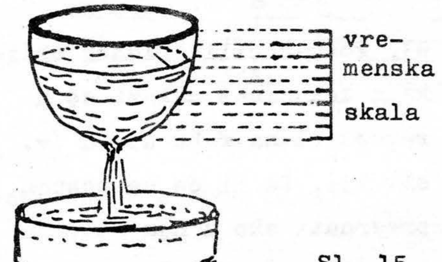
95. Letva dužine L, položena je djelomično u vodu, a djelomično leži na stijeni, kao što je prikazano na sl. 14. Koji je dio letve potopljen, ako je specifična težina drva γ?



Sl. 14

96. U širem dijelu horizontalno položene cijevi naftovoda teče nafta brzinom 2 m/s. Odredite brzinu protoka nafte u užem dijelu cijevi ako je razlika tlakova između širokog i suženog dijela 50 mm stupca žive, a gustoća nafte 900 kg/m^3. (1 mm Hg (žive) = $1{,}33 \cdot 10^2$ Pa)

97. Klèpsidra (vodeni sat koji se u staroj Grčkoj koristio za ograničenje vremena govorenja u skupštini i na sudu) ima oblik kao na sl. 15. Vrijeme se određuje prema nivou vode u posudi. Kojom jednadžbom će biti određen oblik koji mora imati posuda da bi vremenska skala bila uniformna?



Sl. 15

98. (Einsteinov čaj) Zašto se listići čaja skupljaju u sredini šalice nakon mješanja?

Drugi dio

TOPLINA I MOLEKULARNA FIZIKA

VIII TOPLINA I TOPLINSKA SVOJSTVA TIJELA

a) Neriješeni zadaci za vježbe

99. Ako se volumen kocke kod zagrijavanja od 0^oC do 10^oC poveća za 1%, koliki će biti koeficijent linearnog rastezanja materijala od kojeg je kocka napravljena?

loo. Željezni obruč treba namjestiti na drveni točak radijusa 0,5 m. Promjer obruča je 5 mm manji od promjera točka. Do koje temperature treba najmanje zagrijati obruč u tu svrhu ako je koeficijent linearnog rastezanja željeza: $\alpha_{Fe} = 12 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$.

lol. Da li će temperatura u kuhinji pasti ako otvorimo vrata od frižidera?

lo2. Cigla mase m spuštena je na kolica mase M, koja se gibaju pravolinijski, konstantnom brzinom v_o. Nađite količinu topline, oslobođene tom prilikom.

lo3. Jedan kraj, uzdužno izoliranog, željeznog štapa, dužine 28 cm i presjeka 2 cm^2, zagrijava se do 100^oC, a drugi dodiruje led. Koeficijent toplinske vodljivosti željeza je: 59 $W\ m^{-1}\ K^{-1}$. Kolika je brzina prolaza topline kroz štap?

1o4. Kamion mase 3600 kg kreće se, autoputom, nekom stalnom brzinom, svladavajući otpor kretanju 0,05 vlastite težine, pri čemu je koeficijent korisnog djelovanja njegova motora 18%. Za koliko kilometara puta će kamionu biti dovoljno 40 l benzina, ako je toplina sagorijevanja benzina $4{,}6\cdot10^{7}$ J/kg, a gustoća benzina 700 kg/m^3 ?

b) Riješeni zadaci

X 1o5. Sat s klatnom ide, kod temperature od 0^{o}C, $\tau_1 = 8$ s naprijed na dan, a kod temperature $t_2 = 25^{o}$C kasni $\tau_2 = 10$ s na dan. Od kakvog je materijala načinjeno klatno sata?

X 1o6. Čelična šipka, koja treba biti učvršćena između dvije nepomične stijene je prethodnom obradom bila zagrijana. Prilikom učvršćenja, nije se pričekalo da se šipka potpuno ohladi, već je montirana kod temperature od 150^{o}C. Na kojoj će temperaturi, uslijed toga, šipka popucati? (Koeficijent linearnog rastezanja čelika je: $\alpha = 13\cdot10^{-6}$ K^{-1}; Youngov modul elastičnosti čelika je: $E = 2\cdot10^{11}$ N/m^2; maksimalno naprezanje koje čelik, prilikom rastezanja, može izdržati a da ne pupuca je: $\sigma = 4\cdot10^{8}$ N/m^2.)

1o7. Rezervoar kod temperature t_1 sadrži masu m_1 tekućine, a kod temperature t_2 masu m_2. Odredite koeficijent linearnog rastezanja materijala od kojeg je napravljen rezervoar, ako je koeficijent volumnog rastezanja tekućine β_2.

1o8. Olovna sačma mase m_1 se brzinom v_1 horizontalno zabija u komad željeza mase m_2, koji leži na glatkoj horizontalnoj podlozi (trenje zanemarujemo). Kolika će biti njihova temperatura nakon udara, ako je prije njega temperatura željeznog komada bila t_2, a sačme t_1?

1o9. U zadatku 1o3. odredite količinu leda koja će se otopiti tokom jednog sata, ako je latentna toplina taljenja leda 79,7 kcal/kg. (1 cal = 4,19 J)

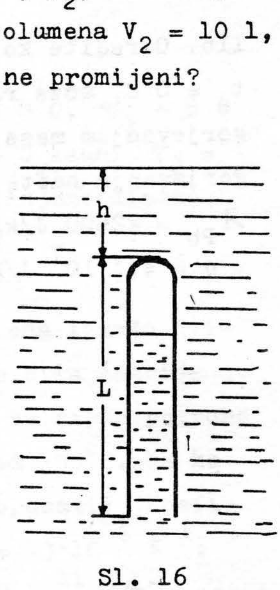
11o. Odredite koja se količina olova, početne temperature $t_o = 0^oC$, može rastaliti količinom topline polučenom sagorjevanjem mase m_1 = 1 kg nafte, ako je efikasnost sagorjevanja nafte 80% .(c_{pb} = 126 J kg^{-1} K^{-1}; latentna topl. = λ_{Pb} = 22600 J/kg; specifična toplina izgaranja nafte = = q = $4,4 \cdot 10^7$ J/kg)

IX SVOJSTVA IDEALNOG PLINA

a) Neriješeni zadaci za vježbe

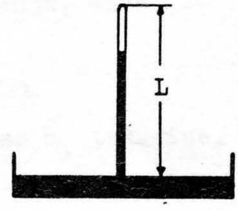
111. Volumen posude, napunjene plinom pod tlakom od $p_1 = 1{,}2 \cdot 10^5$ Pa, je $V_1 = 6$ l. Koliki će tlak, p_2, biti u posudi, ako je spojimo s drugom posudom, volumena $V_2 = 10$ l, u kojoj je vakuum, i ako se temperatura ne promijeni?

112. Epruveta dužine $L = 50$ cm i presjeka $A = 0{,}5$ cm^2 je potopljena u vodu kao što je prikazano na sl. 16. Koliku silu treba upotrijebiti za držanje epruvete pod površinom na dubini h od vrha preokrenute epruvete uz atmosferski tlak od 760 mm Hg? Težina epruvete je $G = 0{,}15$ N. (1 mm Hg $= 1{,}33 \cdot 10^2$ Pa)



Sl. 16

113. Barometar pokazuje netočne vrijednosti jer je prisutno nešto zraka iznad žive u staklenoj cijevi (v. sl. 17). Kod tlaka od $p_{o1} = 755$ mm Hg, barometar pokazuje $p_1 = 748$ mm Hg, a kod $p_{o2} = 740$ mm Hg pokazuje



Sl. 17

p_2 = 736 mm Hg. Nađite dužinu L cijevi barometra.

114. Prilikom zagrijavanja plina za 1 K, kod konstantnog tlaka, njegov se volumen poveća za 0,005 prvobitnog volumena. Na kojoj se temperaturi nalazi plin?

115. Kisik u plinovitom stanju (molekularna masa 32), mase m = 10 g, se nalazi pod tlakom $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Pa, kod temperature od $t_1 = 10^oC$. Poslije širenja uzrokovanog zagrijavanjem, kod stalnog tlaka, plin je zauzimao volumen V_2 = 10 l. Nađite volumen, V_1, i gustoću, ρ_1, plina prije ekspanzije, i temperaturu, t_2, i gustoću, ρ_2, nakon ekspanzije.

116. Dvije zatvorene posude su međusobno spojene pomoću cijevi s ventilom. Dok je ventil još zatvoren, u prvoj se posudi plin nalazi pod tlakom $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa, a u drugoj pod $p_2 = 1{,}2 \cdot 10^5$ Pa. Volumen prve posude je V_1 = 2 l, a druge V_2 = 6 l. Temperatura je u obje posude jednaka. Kakav će se tlak uspostaviti u posudama, ako otvorimo ventil?

b) Riješeni zadaci

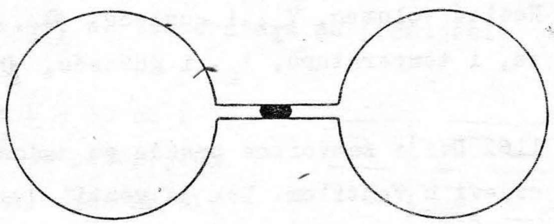
X 117. Što je teže: kilogram olova ili kilogram perja?

118. Svakim radnim (dvostrukim) taktom klip pumpe usisava volumen v_o zraka. Prilikom isisavanja zraka, takvom pum-

pom, iz posude volumena V, bilo je izvedeno n radnih taktova klipom. Početni tlak unutar posude, p_o, bio je jednak atmosferskom tlaku. Nakon toga je drugom pumpom jednakog aktivnog volumena v_o, izvedeno također n radnih taktova klipom, da bi se upumpao atmosferski zrak. Koliki će, na kraju, biti tlak u posudi?

119. Da li je tlak unutar plina jednak pritisku plina na jediničnu površinu stijena posude koja ga sadrži?

12o. Dvije jednake staklene kugle, napunjene plinom, povezane su cjevčicom koja sadrži kapljicu žive u sredini. Pod kojim uvjetima može naprava poslužiti kao termometar?



Sl. 18

121. Na kojoj dubini vode će radijus mjehurića zraka biti dvostruko manji nego na površini, ako je atmosferski tlak na površini jednak 760 mm Hg? (1 mm Hg = $1,33 \cdot 10^2$ Pa)

122. U sobi volumena $V_1 = 60\ m^3$ je temperatura porasla sa $t_1 = 17^oC$ na $t_2 = 27^oC$. Tlak se pri tome izmijenio od $p_1 = 1,03 \cdot 10^5$ Pa (744.4 mm Hg) na $p_2 = 1,06 \cdot 10^5$ Pa (797 mm Hg) . Za koliko se promijenila

masa zraka u sobi? (Srednja masa jednog kilomola zraka je: μ = 29 kg/kmol)

X MOLEKULARNO-KINETIČKA TEORIJA I TERMODINAMIKA

a) Neriješeni zadaci za vježbe

123. Koliko molekula plina sadrži posuda volumena $V = 60\ l$, pri temperaturi $T = 300^{o}K$ i tlaku $p = 5\cdot 10^{3}\ N/m^{2}$?

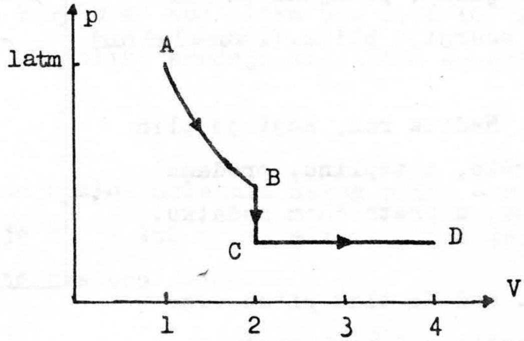
124. Koliko molekula vodika smije sadržavati sferna posuda promjera 1 m, da međusobni sudari molekula plina ne budu statistički značajni? (Promjer molekule vodika je 10^{-10} m)

125. Plin zaprema volumen $V = 4\ l$ pod tlakom $p = 5\cdot 10^{2}\ N/m^{2}$. Odredite ukupnu kinetičku energiju kaotičnog gibanja molekula, na sobnoj temperaturi.

126. Plin, mase $m = 15$ kg, sadrži $N = 5{,}64\cdot 10^{26}$ molekula, koje se sastoje od atoma ugljika i vodika. Odredite masu atoma ugljika i vodika, koji tvore molekulu tog plina.

127. Koliko sudara, pod normalnim uvjetima, doživi molekula ugljičnog dioksida (ako joj je srednji slobodni put jednak $4\cdot 10^{-8}$ m) u toku jedne sekunde?

128. Plin, na temperaturi od $17^{o}C$, koji zauzima volumen $V_A = 1$ l, kod tlaka $p_A = 1$ atm, širi se, izotermno (kod jednake temperature), do dvostrukog volumena $V_B = 2$ l. Zatim mu se tlak prepolovljuje izohorno (kod konstantnog, jednakog, volumena), i na kraju se izobarno (kod konstantnog tlaka) volumen još jednom podvostručuje (v. sl. 19). Kolika je temperatura u točkama C i D? Koliki je tlak u točki C? Kojim procesom plin vrši najveći rad? (1 atm = 1,ol·10^5 Pa)



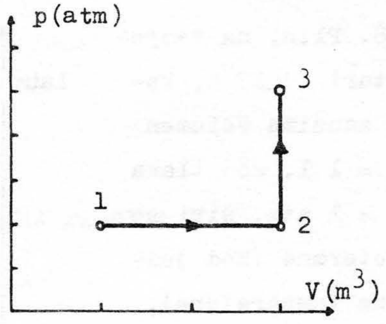
Sl. 19

129. Pokažite, za idealni plin čija unutarnja energija ovisi samo o temperaturi, da je razlika među specifičnim molnim toplinama (količina topline potrebna za zagrijavanje 1 kmol tvari za 1 K; 1 kmol je masa tvari, izražena u kilogramima, numerički jednaka molekularnoj masi tvari) kod konstantnog tlaka i konstantnog volumena jednaka plinskoj konstanti, R,:

$$C_p - C_V = R$$

13o. Kisik (μ = 32 kg/kmol), mase 2 kg, zaprema volumen od 1 m^3, pod tlakom od 2 atm. Plin je isprva bio izobarno (v. zadatak 128) zagrijavan do volumena od 3 m^3, a zatim, izohorno (v. zadatak 128) do tlaka od 5 atm (v. sl.

2o). Nađite promjenu unutarnje energije plina. (1 atm = 1,01 bar)



Sl. 2o

131. Nađite rad, koji je plin izvršio, i toplinu, predanu plinu, u prethodnom zadatku.

132. Kad će tlak plina više porasti: kad se komprimira toplinski izoliran (adijabatski) ili kad se komprimira izotermno (v. zadatak 128).

b) Riješeni zadaci

133. Zatvorena posuda sadrži 1 l vode na temperaturi od 17°C. Koji bi tlak bio u posudi kad bi sile između molekula odjednom iščezle?

134. Da li je koncentracija molekula unutar posude koja sadrži plin (misli se na sredinu posude) jednaka koncentraciji molekula plina uz stijenke posude?

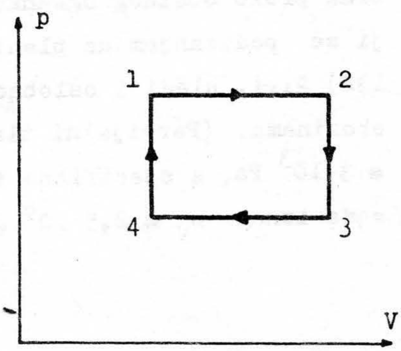
135. Izračunajte srednju udaljenost između središta molekula idealnog plina u normalnim uvjetima.

X 136. Koliko se, prosječno, molekula dvoatomnog plina nalazi u posudi volumena $V = 20\ m^3$ kod tlaka $p = 1.06\cdot10^4$ Pa i temperature $t = 27^oC$? Koliku srednju kinetičku energiju imaju te molekule?

137. Srednja kvadratna brzina molekula nekog plina - njihova efektivna brzina - je $v_{ef} = 450\ m/s$, a tlak plina je: $p = 7\cdot10^4\ N/m^2$. Nađite gustoću plina.

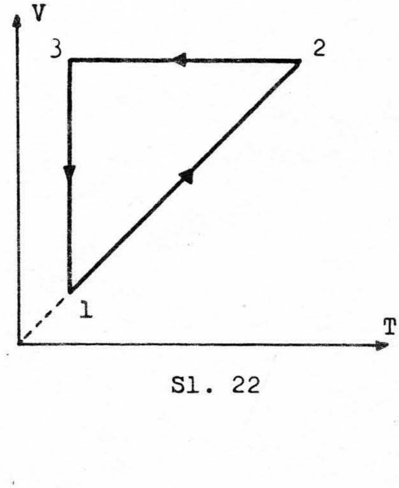
138. Nađite srednji slobodni put molekula zraka kod normalnih uvjeta, ako je efektivni promjer molekule zraka $d = 3\cdot10^{-10}$ m.

139. Na sl. 21 je prikazana promjena stanja idealnog plina u koordinatama pV. Predočite taj proces u koordinatama pT i VT.



Sl. 21

X 14o. Neka količina idealnog plina podvrgnuta je zatvorenom kružnom procesu prikazanom na sl. 22. Prikažite taj proces u koordinatama pV i nađite u kojim stadijima plin apsorbira, a u kojim daje toplinu.



Sl. 22

X 141. Odbojkaška lopta mase 200 g i volumena 8 l, napumpana je do tlaka od 1,2 atm. Lopta je bila izbačena na visinu od 20 m i poslije pada na tvrdo tlo ponovo je odskočila na tu istu visinu. Ocijenite maksimalnu temperaturu zraka u lopti u momentu udara o tlo, ako je temperatura okolnog zraka 27 °C, a specifični toplinski kapacitet (specifična toplina) $c_V = 700$ J/(kg·K).

X 142. "Izračunajte" Veliku američku pustinju (Great American Desert, unutar koje je i poznata Dolina smrti, Death Valley), tj. njenu temperaturu, znajući da s Tihog oceana u nju puše vlažan ($\varphi = 60\%$), topao (25 °C) zrak preko obalnog ogranka Kordiljera (Coast Range) koji se podizanjem uz planinu, adijabatski (v. zadatak 132) širi, hladi i oslobađa vlage kondenzacijom, tj. oborinama. (Parcijalni tlak vodenih para je $p_{H_2O} \approx 3 \cdot 10^3$ Pa, a specifična toplina isparavanja vode iznosi $c_V \approx 2,5 \cdot 10^6$ J/kg.)

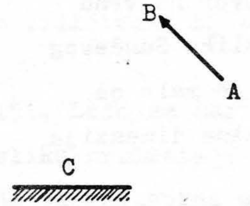
Treći dio

OPTIKA

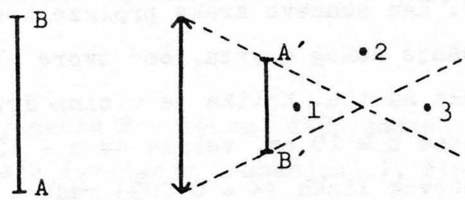
XI GEOMETRIJSKA OPTIKA

a) Neriješeni zadaci za vježbe

143. Nađite grafički, na sl. 23, položaj čovjekovog oka koji će mu omogućiti da u ogledalu C vidi upravo u potpunosti strelicu AB. Konstruirajte, također, sliku koju će čovjek vidjeti u ogledalu.

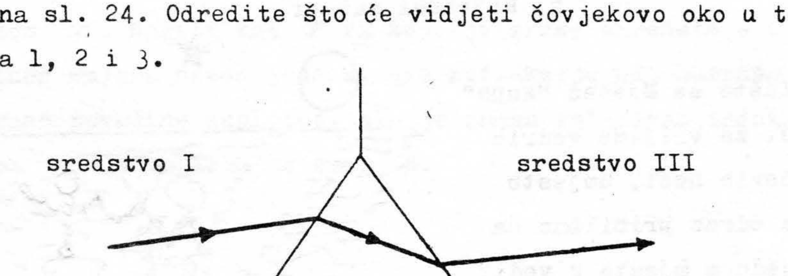


Sl. 23



Sl. 24

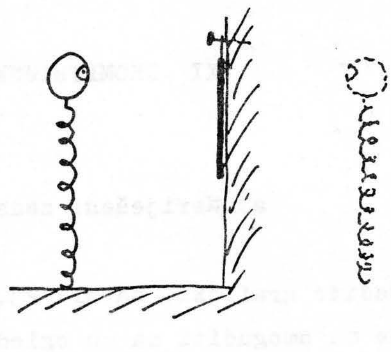
144. Leća daje sliku B′A′ predmeta AB, kao što je prikazano na sl. 24. Odredite što će vidjeti čovjekovo oko u točkama 1, 2 i 3.



Sl. 25

145. Na sl. 25 je prikazan prolaz zrake svjetlosti kroz tri optička sredstva. Odredite međusobne odnose ($\gtreqless$) optičkih gustoća pojedinih sredstava.

146. Kolika minimalna visina ogledala pričvršćenog vertikalno na zid (v. sl. 26) omogućuje nekom čovjeku da se vidi u punoj svojoj visini? Na kojoj udaljenosti od poda se mora nalaziti donji rub ogledala?

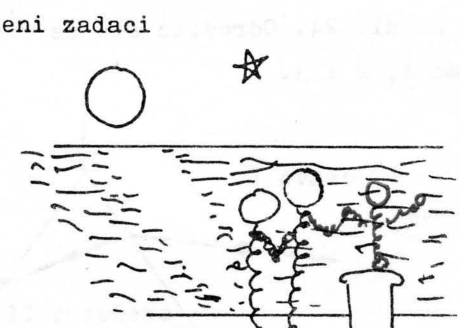


Sl. 26

147. Kad sunčeve zrake prolaze kroz mali otvor na vrhu krošnje nekog drveta, one tvore eliptičnu sliku Sunčevog diska na tlu. Kolika je visina drveta, ako je mala os elipse b = 10 cm, velika os a = 12 cm, a kutna dimenzija Sunčevog diska α = 0.0093 rad?

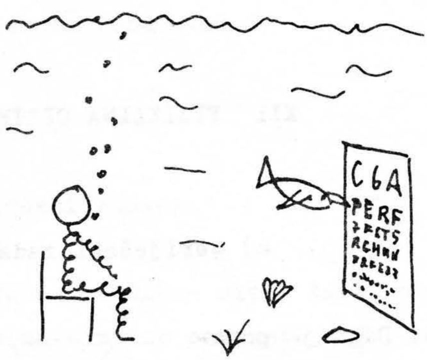
b) Riješeni zadaci

148. Zašto se Mjesec "kupa" u moru, za vrijeme vedrih Mjesečevih noći, umjesto da ima odraz približno na samo jednom mjestu u vodi? (v. sl. 27)



Sl. 27

149. Da li je čovjek koji u vodi vidi normalno dalekovidan ili kratkovidan? (v. sl. 28)



Sl. 28

X 15o. U zadimljenoj okolini neke tvornice, vidljivost je $L_1 = 50$ m. Čestice dima imaju radijus $r_1 = 5 \mu m$, a 1 m^3 zraka sadrži masu m = 0,04 g (čestica) dima. Koliko dima u 1 m^3 ima u okolini druge tvornice, ako je radijus česticâ njenog dima $r_2 = 10 \mu m$, a vidljivost $L_2 = 20$ m?

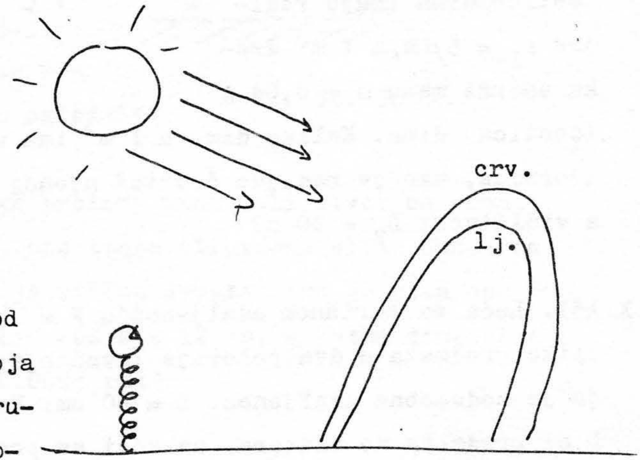
X 151. Leća sa žarišnom udaljenošću F = 16 cm daje jasnu sliku predmeta u dva položaja (uvećanje i umanjenje), čija je međusobna udaljenost L = 60 cm. Nađite udaljenost D od predmeta do zastora, na koji se projiciraju slike.

152. Zraka svjetlosti pada na kuglastu kapljicu vode pod kutom α. Nađite kut ϑ za koji je zraka skrenuta s početnog smjera nakon jednostruke refleksije od unutrašnje strane površine kapljice, ako je zadan relativni indeks loma vode s obzirom na zrak, n.

XII FIZIKALNA OPTIKA I FOTOMETRIJA

a) Neriješeni zadaci za vježbe

153. Dúga je pojava refleksije Sunčevih zraka od unutrašnje strane površine vodenih kapljica (v. zadatak 152) u atmosferi. Objasnite zašto je kod primarne dúge (one koja nastaje samo jednostrukom refleksijom u kapljicama) vanjski luk crven, a unutrašnji ljubičast.



Sl. 29

154. Koji dio Sunčeve energije zračenja doseže Zemlju?

155. Lampa svjetlosne jakosti 100 cd, visi iznad sredine okruglog stola promjera D = 3 m na visini od 2 m od stola. Ako se lampa zamijeni drugom čija je svjetlosna jakost 25 cd i koja je spuštena na takvu visinu da osvijetlje-

nost sredine stola bude ista kao i ranije, kako će se onda promijeniti osvijetljenost ruba stola?

b) Riješeni zadaci

156. Koliko visoko iznad centra okruglog stola treba objesiti lampu da bi mu rub bio maksimalno osvijetljen?

X 157. U nekom teleskopu je osvijetljenost slike jedne zvijezde danju 10 puta manja od osvijetljenosti slike samog danjeg neba. Koliko puta je potrebno povećati promjer objektiva da bi omjer bio obratan?

158. Zašto se kod fotografiranja dvaju predmeta, koji se nalaze na različitim udaljenostima od fotoaparata, obično smanjuje "blenda" (otvor objektiva - dijafragme)?

Četvrti dio

ELEKTRICITET

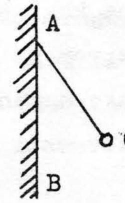
XIII COULOMBOVA SILA, POLJE I POTENCIJAL

a) Neriješeni zadaci za vježbe

159. Za koliko bi se naboji elektrona i protona morali razlikovati da se poništi gravitacijska sila među atomima, ako pretpostavimo da se u jezgrama atomâ nalazi jednak broj protona i neutrona? ($G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$; $e = 1{,}60210\cdot 10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1091\cdot 10^{-31}$ kg ; $m_p = 1{,}67252\cdot 10^{-27}$ kg $= 0{,}99863\cdot m_n$)

160. Promatrajmo dva naboja, q_1 i q_2, međusobno udaljena za L. Gdje moramo postaviti treći naboj i kolikog iznosa on mora biti da bi se nalazio u ravnoteži, ako su naboji q_1 i q_2 a) učvršćeni; b) slobodni ?

161. Neka je (v. sliku 3o) AB ravnomjerno nabijena beskonačna ravnina, a C istoimeno nabijena kuglica težine G. Naboj kuglice je q, a napetost niti F_N. Nađite površinsku gustoću naboja ravnine AB.



Sl. 3o

162. Na krajevima jedne od kateta, dužine L, jednakokračnog pravokutnog trokuta nalaze se naboji q_1 i q_2. Koliko je polje i potencijal u trećem vrhu trokuta?

163. Metalna kugla radijusa r nalazi se u tekućem dielektri-

kumu relativne permitivnosti ε i gustoće ρ. Gustoća materijala kugle je ρ'. Ako u homogenom električnom polju E usmjerenom vertikalno uvis kugla lebdi, koliki joj je naboj?

164. Razmak između dviju metalnih kugala radijusa R_1 i R_2 nabijenih do potencijala φ_1 i φ_2 je velik u usporedbi s njihovim radijusima. Koliki će biti potencijal kugala ako se povežu vodičem.

b) Riješeni zadaci

165. Dvije kuglice jednakih radijusa r i naboja $+q_1$ i $-q_2$ obješene su na dvije niti jednakih dužina L tako da se u vertikalnim položajima niti, kuglice upravo dodiruju. Poslije dodira, u vakuumu, one se razmiču za kut 2α. Kolika je težina kuglica ako su nakon otklona njihovi radijusi mali s obzirom na međusobnu udaljenost? Kolika je gustoća, ρ, kuglica, ako nakon uranjanja u tekućinu gustoće ρ' i relativne permitivnosti ε, niti zatvaraju kut $2\alpha'$.

X 166. Nađite na osnovu Coulombovog zakona : a) polje pravca, ravnomjerno nabijenog linearnom gustoćom χ; b) polje beskonačne ravnine, ravnomjerno nabijene površinskom gustoćom σ.

167. U vrhovima kvadrata, sa stranicom a, nalaze se pozitivni naboji jednakog iznosa q. Koliko je polje i koliki je potencijal u centru kvadrata? Kakav negativni naboj treba smjestiti u centar kvadrata da bi sistem bio u ravnoteži?

168. Dvije beskonačne, paralelne ravnine nabijene su ravnomjerno raspodijeljenim nabojima, površinske gustoće σ_1 i $\sigma_2 (< \sigma_1)$. Odredite jakost polja a) između ravnina i b) izvan ravnina u slučaju kad su 1) obje ravnine nabijene pozitivno; 2) obje ravnine nabijene negativno; 3) jedna pozitivno, a druga negativno. Razmotrite slučaj $|\sigma_1| = |\sigma_2|$.

169. Homogena metalna sfera radijusa $R = 20$ cm nosi ravnomjerno raspodijeljen naboj površinske gustoće $\sigma = 10^{-9}$ C/m^2. Odredite jakost i potencijal polja na udaljenosti $r = 36$ cm od središta sfere.

X 17o. U materiji se naboji jezgre i elektronskog omotača međusobno kompenziraju s izuzetnom točnošću. Da bismo to uvidjeli pretpostavimo da je ta točnost samo 1%. Kolika bi u tom slučaju bila maksimalna privlačna, odnosno odbojna sila između dvaju bakrenih novčića mase 1 g, udaljenih 1 m - jedan od drugoga? Koliki promjer bi morala imati bakrena kugla čija bi težina odgovarala toj sili? ($Z_{Cu} = 29$; $A_{Cu} = 63{,}54$; $\rho_{Cu} = 8930$ kg/m^3)

XIV INFLUENCIJA, RAD, NAPON I KAPACITET

a) Neriješeni zadaci za vježbe

171. Materijalna točka, mase 40 g , pozitivnog naboja 10^{-9} C, giba se brzinom od 10 cm/s. Na koju minimalnu udaljenost se ona može približiti točkastom naboju iznosa $\frac{4}{3}10^{-9}$ C ?

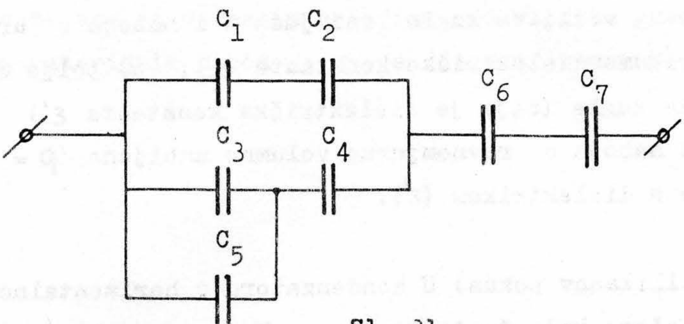
172. U homogeno polje E unesena je metalna pločica površine S. Koliki se naboj inducira na svakoj njenoj strani?

173. Po volumenu kugle od neprovodnog materijala, radijusa R, ravnomjerno je raspodijeljen naboj, gustoće ρ. Nađite polje, E u točkama udaljenim od središta kugle za a) $r_1 < R$, b) $r_2 > R$. Predočite grafički $E = E(r)$.

174. Riješite zadatak 166. primjenom Gaussovog teorema.

175. Da bi se postigao željeni kapacitet kondenzatora njegovim je pločama površine S omogućeno primicinje na n puta manju udaljenost od početne i tom prilikom one izvrše rad W. Jednaki efekt postiže se umetanjem vodljive ploče površine S i debljine b. Koliki su napon i kapacitet kondenzatora prije i nakon umetanja ploče?

176. Nađite kapacitet sistema kondenzatora prikazanog na sl. 31.

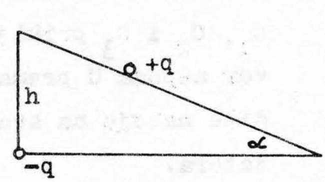


Sl. 31

b) Riješeni zadaci

177. Na vrhovima kvadrata, sa stranicom a, nalaze se naboji, jednaki po apsolutnoj vrijednosti, od kojih su dva pozitivna, a dva negativna. Nađite potencijalnu energiju tog sistema za moguće razmještaje pozitivnih naboja s obzirom na negativne.

X 178. Po kosini (v. sl. 32), nagiba α i visine h, kotrlja se kuglica mase m i radijusa $R \ll h$, nabijena nabojem +q. U vrhu pravog kuta nalazi se naboj −q. Odredite brzinu kojom kuglica stiže do kraja kosine.



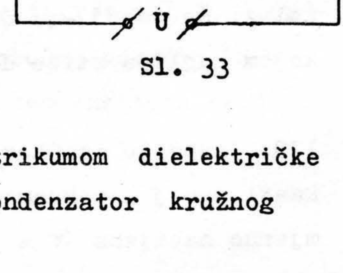
Sl. 32

179. Izvedite iz Gaussovog zakona: a) Coulombov zakon za točkasti naboj u vakuumu; b) polje koje tvori beskonačna ravnomjerno nabijena (σ = const) ravnina uronjena u dielektrikum (ε_r);

c) polje kondenzatora u dielektrikumu (ε) između ploča s površinskom gustoćom naboja $+\sigma$ i $-\sigma$ (zanemarujući rubne efekte); d) polje vodljive kugle radijusa a i naboja q uronjene u dielektrikum dielektričke konstante ε_r ; e) polje dielektričke kugle (čija je dielektrička konstanta ε') radijusa a i naboja q ravnomjerno volumno nabijene (ρ = const) i uronjene u dielektrikum (ε'').

18o. (Millikanov pokus) U kondenzatoru s horizontalno položenim pločama kod određenog napona U nabijena kapljica gustoće ρ lebdi između ploča na udaljenosti s od donje ploče. Nakon smanjenja polja, smanjenjem napona na iznos V, bilježi se vrijeme t u toku kojeg kapljica stiže do donje ploče. Kolika je masa kapljice, ako znamo da je otpor zraka kapljici proporcionalan brzini i polumjeru kapljice (tzv. Stokesova formula - konstanta proporcionalnosti je $6\pi\eta$, gdje je η koeficijent viskoznosti) i ako se odgovarajuće ravnotežno stanje uspostavlja nakon vremena koje je znatno kraće od t?

181. Tri kondenzatora kapaciteta C_1, C_2 i C_3 priključena su na izvor napona U prema sl. 33. Odredite naboje na svakom od kondenzatora.



Sl. 33

X 182. Na dnu posude s tekućim dielektrikumom dielektričke konstante ε pričvršćena je ploča kondenzator kružnog oblika radijusa r. Druga ploča istog oblika, debljine h, pliva nad prvom. Za koliko će uroniti gornja ploča, ako su ploče nabijene raznoimenim nabojima, površinske gustoće σ? Gustoća materijala ploča je ρ, a dielektrikuma ρ'.

XV STRUJA, JOULEOV ZAKON I KIRCHHOFFOVI ZAKONI

a) Neriješeni zadaci za vježbe

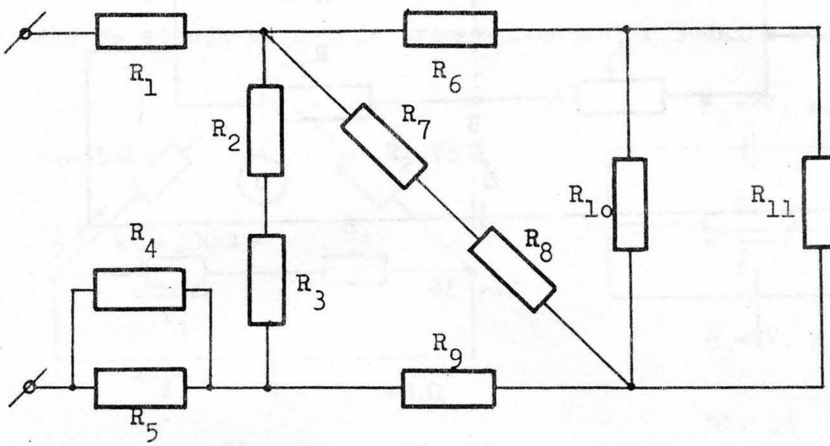
183. Kroz diodu (dvoelektrodnu cijev, elektronku) s ravnim elektrodama prolazi struja I, dok je napon na njoj U. S kakvom silom djeluju elektroni na anodu, ako katodu napuštaju brzinom v_o?

184. Željeznim vodičem presjeka $S = 0{,}64\ mm^2$, teče struja $I = 24\ A$. Odredite srednju brzinu usmjerenog gibanja elektrona uzimajući da je broj slobodnih elektrona u jedinici volumena jednak broju atoma u jedinici volumena vodiča. ($A_{Fe} = 55{,}85$; $\rho_{Fe} = 7870\ kg/m^3$; Avogadrov broj: $N_A = 6{,}022\cdot10^{26}\ kmol^{-1}$)

185. Grijaća ploča štednjaka ima dvije spirale. Kad je uključena prva, 1 litra vode zakipi kroz 8 min, a kad je uključena druga jednaka će količina vode zakipiti za 5 min. Koliko će vremena toj količini vode trebati da zakipi, ako se istovremeno uključe obje spirale spojene a) u seriju, b) paralelno.

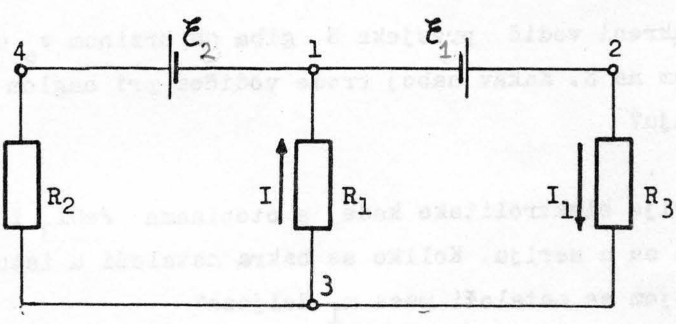
186. Izračunajte otpor električnog kruga prikazanog na sl. 34, ako su vrijednosti pojedinih otpora slijedeće: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 1\Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $R_5 = 6\Omega$, $R_6 = 8\Omega$, $R_7 = 5\Omega$, $R_8 =$

$= 4\Omega$, $R_9 = 2\Omega$, $R_{1o} = 8\Omega$, $R_{11} = 4\Omega$.



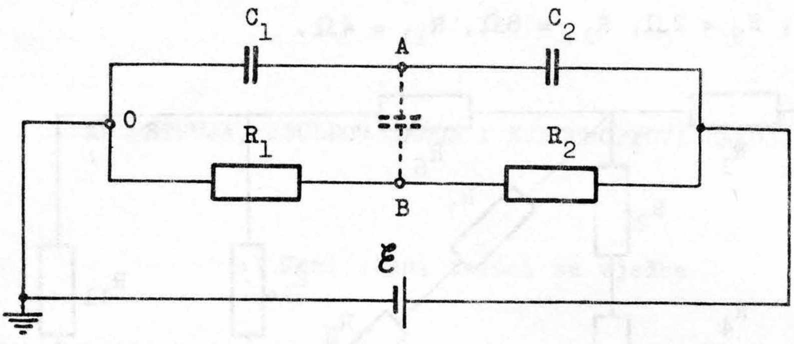
Sl. 34

187. U shemi, prikazanoj na sl. 35, je: $\mathcal{E}_1 = 2$ V, $\mathcal{E}_2 = 2{,}4$ V, $R_1 = 50\Omega$, $R_2 = 10\Omega$ i $R_3 = 15\Omega$. Nađite I, I_1 i I_2.



Sl. 35

188. Nađite razliku potencijala među točkama A i B u shemi prikazanoj na sl. 36. Koliki bi bio naboj kondenzatora kapaciteta C priključenog između točaka A i B, ako je napon izvora $\mathcal{E}$?



Sl. 36

b) Riješeni zadaci

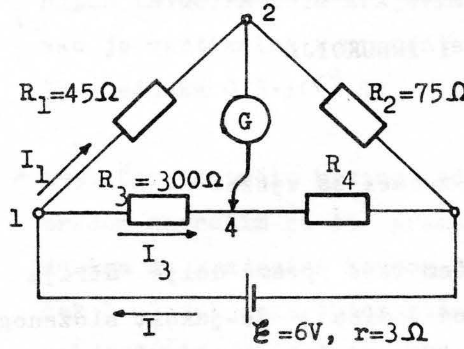
189. Odredite koliku struju tvori elektron koji rotira oko jezgre u atomu vodika, ako je radijus njegove orbite $5{,}3\cdot10^{-11}$ m.

X 19o. Bakreni vodič presjeka S giba se brzinom v_o u smjeru okomitom na S. Kakav naboj prođe vodičem pri naglom zaustavljanju?

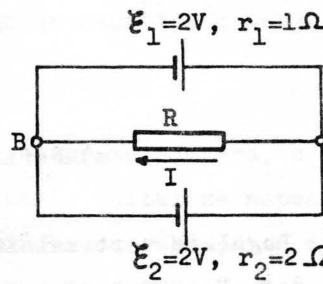
X 191. Dvije elektrolitske kade s otopinama $FeCl_3$ i $CuSO_4$ spojene su u seriju. Koliko se bakra nataloži u isto vrijeme u kojem se nataloži masa m_1 željeza?

192. Dana su dva jednaka izvora elektromotorne sile od po 2 V i unutrašnjim otporom od po 0,3Ω. Kako bi trebalo spojiti izvore, paralelno ili serijski, da bi se polučila veća struja, ako je vanjski otpor a) o,2Ω i b) 16Ω?

193. Nađite struje u pojedinim granama tzv. Wheatstoneovog mosta prikazanog na sl. 37, ako je most izbalansiran, tj. ako je struja koja teče kroz galvanometar jednaka nuli.



Sl. 37



Sl. 38

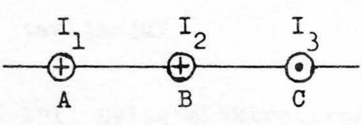
194. U shemi sa sl. 38 nađite: R, I i I_2, ako je $I_1 = 1$ A.

XVI IZMJENIČNA STRUJA, MEĐUDJELOVANJE STRUJA I INDUKCIJA

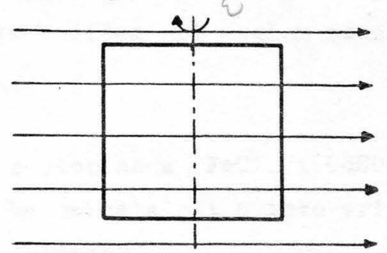
a) Neriješeni zadaci za vježbe

195. Dugačkim vertikalnim vodičem teče prema dolje struja $I = 8$ A. Na kojoj udaljenosti od vodiča r je jakost složenog magnetskog polja, od polja vodiča i polja Zemlje, usmjerena vertikalno uvis, ako je horizontalna komponenta magnetskog polja Zemlje $H_{Zh} = 16$ A/m?

196. Nađite točku na pravcu AC, sa sl. 39, u kojoj je magnetsko polje, izazvano trima strujama I_1, I_2 i I_3, jednako nuli, ako je $I_1 = I_2 = I$, $I_3 = 2I$, AB = BC = 5 cm.



Sl. 39



Sl. 4o

197. U homogenom magnetskom polju indukcije B, se ràvnomjerno, frekvencijom ν okreće okvir površine S. Os rotacije leži u ravnini okvira i okomita je na linije indukcije (v.

sl. 4o). Odredite maksimalno inducirani napon u okviru.

198. Brzina horizontalno letećeg aviona je 900 km/h. Kakav se napon inducira među krajevima njegovih krila ($L = 12,5$ m), ako je vertikalna komponenta indukcije magnetskog polja Zemlje jednaka $0,5 \cdot 10^{-4}$ T?

199. Čovjek trči, brzinom od 12 km/h, prema sjeveru, s kišobranom nagnutim za 45^{o} prema vertikali. Koliki se napon inducira na krajevima kovnog štapa kišobrana, ako je on dugačak 1 m? (Utjecaj žbica kišobrana zanemarujemo; Za magnetsko polje Zemlje v. zadatke 195. i 198.)

2oo. Dugački ravni solenoid načinjen je iz gusto namotane žice promjera 0,5 mm. Kakva je indukcija magnetskog polja unutar solenoida kod prolaza struje $I = 5$ A?

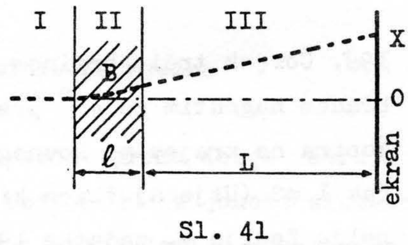
b) Riješeni zadaci

2o1. Dva ravna vodiča položena su paralelno, jedan s obzirom na drugog, na međusobnoj udaljenosti L. Njima teku struje I_1 i I_2 u suprotnim smjerovima. Nađite modul magnetske indukcije u točki koja je za r_1 udaljena od prvog i za r_2 od drugog vodiča.

2o2. Struja I teče bakrenim vodičem presjeka S svinutim u oblik prstena u čijem centru tvori indukciju B. Koliki je napon među krajevima prstena?

X 2o3. Tankim vodičem prstenastog oblika teče struja. Kolika će biti promjena indukcije u centru lika, ako vodiču damo oblik kvadrata?

2o4. Princip reprodukcije televizijske slike (u katodnoj cijevi, tzv. kineskopu) se zasniva na shemi prikazanoj na sl. 41. Snop elektrona ubrzan razlikom potencijala U u području I ulijeće u homogeno magnetsko polje u području II. U odsutstvu magnetskog polja snop pada u točku O ekrana, a nakon uključenja polja u točku X. Nađite pomak OX, ako je polje usmjereno okomito iz ravnine crteža, magnetska indukcija jednaka B, širina polja ℓ, a udaljenost polja od ekrana L.



Sl. 41

2o5. Trima paralelnim ravnim vodičima teku struje I_1, I_2 i I_3, i to tako da kroz jedan od vodičâ struja teče u suprotnom smjeru nego kroz preostala dva. Vodiči su međusobno razmješteni u vrhove jednakostraničnog trokuta stranice a. Kolika sila djeluje na jedinicu duljine svakog od vodiča?

X 2o6. (Generator). U homogenom magnetskom polju indukcije B, rotira solenoid presjeka S i N navoja brzinom od n okretaja u sekundi. Os rotacije je okomita na os solenoida i na $\vec{B}$. Nađite maksimalnu elektromotornu silu induciranu rotacijom solenoida.

XVII EFEKTIVNI NAPONI I STRUJE I KRUGOVI IZMJENIČNE STRUJE

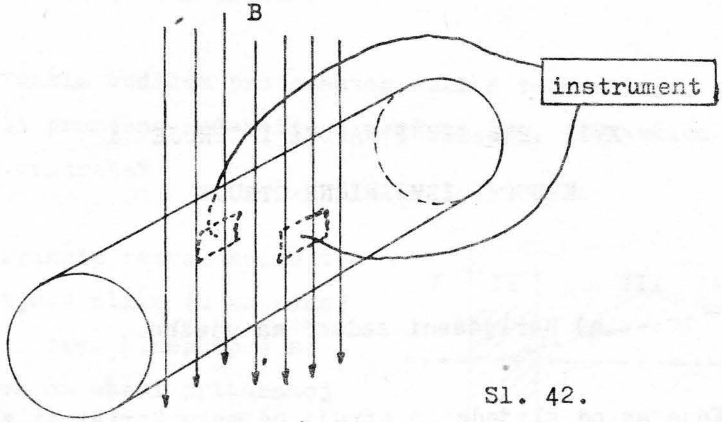
a) Neriješeni zadaci za vježbe

2o7. Koje se od slijedećih struja ne mogu koristiti za elektrolizu: a) $i = I_{max} \sin\omega t$; b) $i = I_{max} |\sin\omega t|$; c) $i = I_{max} \sin(\omega t + \varphi)$; d) $i = I_{max} (\sin\omega t + |\sin\omega t|)$? Zašto? Prikažite struje i njihove efektivne vrijednosti grafički.

2o8. Solenoid duljine L i površine presjeka S ima N navoja kroz koje teče struja I. Nađite srednju elektromotornu silu induciranu u navojima prilikom uključenja struje kroz kratak vremenski period Δt.

2o9. "Superbrzi" električni lonci za vodu ("litra vode uzavrije za 1 min.") rade na principu dviju elektroda (priključenih na gradsku mrežu) uronjenih u vodu. Objasnite kako dolazi do naglog povećanja temperature vode.

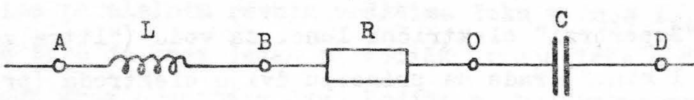
21o. Na sl. 42 je dana shema mjerača brzine protoka plina kroz cijev. Nađite brzinu plina, ako je indukcija magnetskog polja B = 0,01 T, razmak među elektrodama (unutrašnji promjer cijevi) 5 cm, a registrirani napon između elektroda 0,25 mV.



Sl. 42.

211. Dvije dugačke zavojnice namotane su na zajedničku jezgru. Induktivnost prve je $1{,}6\cdot 10^{-4}$ H, a druge 10^{-5} H. Koliko puta je broj navoja prve zavojnice veći od broja navoja druge?

212. Kroz shemu prikazanu na sl. 43 prolazi sinusna struja. Nađite maksimalan napon između točaka A i D, ako su efektivni naponi: $U_{AB} = 30$ V, $U_{BO} = 10$ V i $U_{OD} = 15$ V.

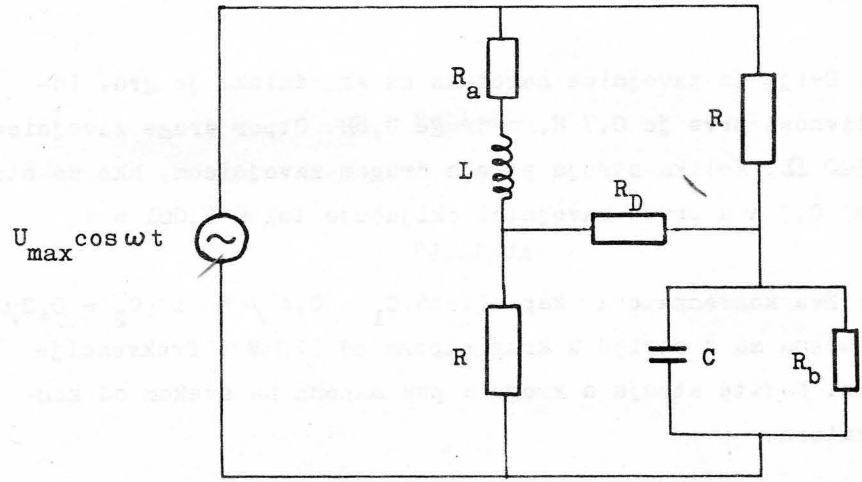


Sl. 43

b) Riješeni zadaci

X 213. Neonska cijev uključena je u gradsku mrežu (220 V, 50 Hz). Nađite postotak vremena u kojem cijev stvarno gori ako je napon na kojem se ona pali, odnosno gasi (uspostavlja i prekida tinjavo izbijanje plina u cijevi), također 220 V (normalno je taj napon niži).

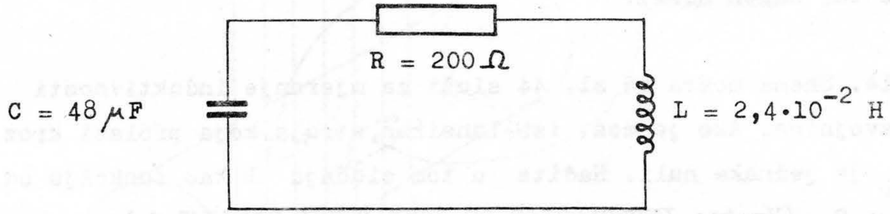
X 214. Shema mosta sa sl. 44 služi za mjerenje induktivnosti zavojnice. Ako je most izbalansiran, struja koja prolazi kroz R_D je jednaka nuli. Nađite u tom slučaju L kao funkciju od R i C. (Uputa: <u>IMPEDANCIJE SU KOMPLEKSNI BROJEVI !</u>)



Sl. 44

215. Zavojnica duljine d i radijusa r s N bakrenih navoja presjeka S uključena je u krug izmjenične struje frekvencije ν. Nađite omjere aktivnog i ukupnog otpora, te induktivnog i ukupnog otpora zavojnice. ($\rho_{Cu} = 1{,}673 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ m)

X 216. Odredite za koliko će se promijeniti frekvencija titrajnog kruga, prikazanog na slici 45, ako se otpor R smanji na nulu.



Sl. 45

217. Dvije su zavojnice namotane na zajedničku jezgru. Induktivnost prve je 0,7 H, a druge 0,8H. Otpor druge zavojnice je 600 Ω. Kolika struja poteče drugom zavojnicom, ako se struja od 0,3 A u prvoj zavojnici uključuje tokom 0,001 s ?

218. Dva kondenzatora kapacitetâ $C_1 = 0{,}4\ \mu F$ i $C_2 = 0{,}2\,\mu F$, uključena su u seriju u krug napona od 220 V i frekvencije 50 Hz. Nađite struju u krugu i pad napona na svakom od kondenzatora.

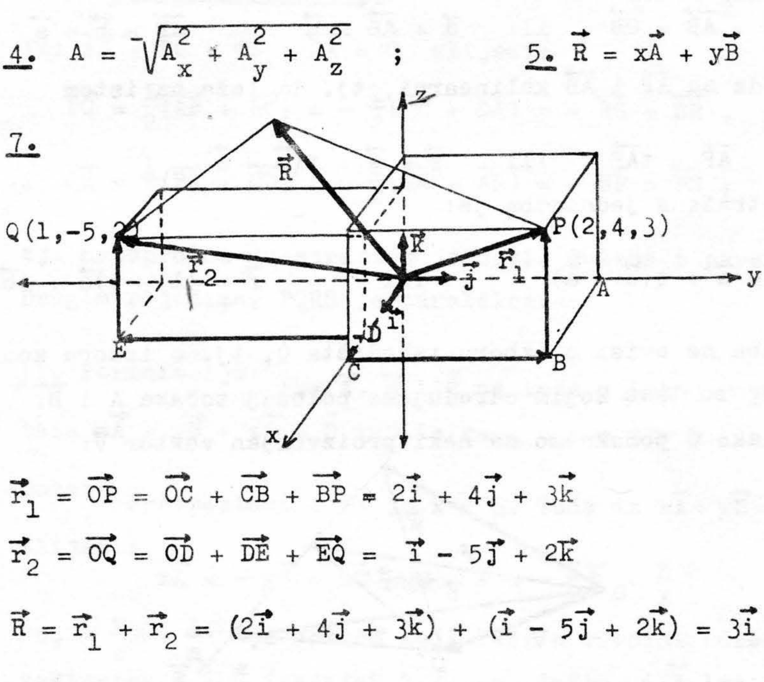
Peti dio

RJEŠENJA

Prvi dio. MEHANIKA

4. $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$; 5. $\vec{R} = x\vec{A} + y\vec{B}$;

7.



$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$

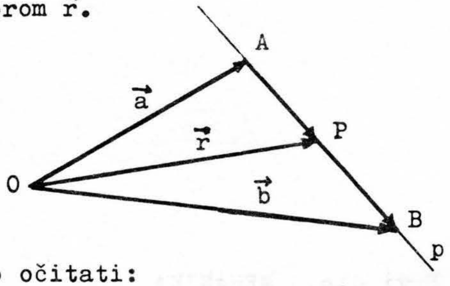
$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EQ} = \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) + (\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}) = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$;

8. $|\vec{r}_1 + \vec{r}_2| = |3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = 7$;

9. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadani vektori u odnosu na zajedničko hvatište O. Oni svojim vrhovima A i B određuju pravac p.

Neka je sada proizvoljna točka P na tom pravcu određena radijvektorom $\vec{r}$.



Iz slike možemo očitati:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} \quad \text{ili} \quad \vec{a} + \overrightarrow{AP} = \vec{r} \qquad \overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$$

$$\text{i :} \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \quad \text{ili} \quad \vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b} \qquad \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

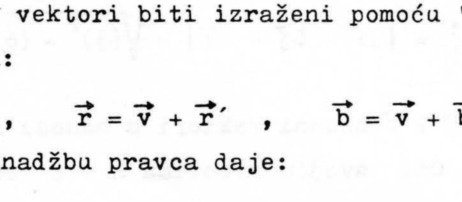
Budući da su $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{AB}$ kolinearni, tj. da leže na istom pravcu:

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} \quad \text{ili} \quad \vec{r} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a}).$$

Dakle, tražena jednadžba je:

$$\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \qquad \text{ili} \qquad \vec{r} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}\,.$$

Jednadžba ne ovisi o izboru ishodišta 0, tj. o izboru koordinatnog sustava kojim određujemo položaj točaka A i B. Naime, ako 0 pomaknemo za neki proizvoljan vektor $\vec{v}$:



onda će "stari" vektori biti izraženi pomoću "novih" na slijedeći način:

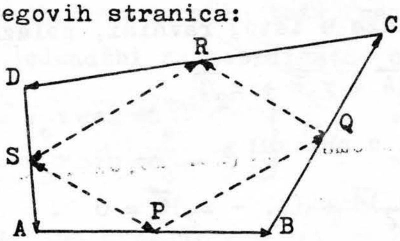
$$\vec{a} = \vec{v} + \vec{a}' \quad , \quad \vec{r} = \vec{v} + \vec{r}' \quad , \quad \vec{b} = \vec{v} + \vec{b}' \quad .$$

Uvrštenje u jednadžbu pravca daje:

$$\vec{v} + \vec{r}' = \vec{v} + \vec{a}' + t(\vec{v} + \vec{b}' - \vec{v} - \vec{a}') \quad , \quad \text{tj.:}$$

$$\vec{r}' = \vec{a}' + t(\vec{b}' - \vec{a}') \quad .$$

10. Neka je ABCD dani četverokut, a P, Q, R i S središta njegovih stranica:



$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$$

$$\vec{QR} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD}$$

$$\vec{RS} = \frac{1}{2}\vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{DA}$$

$$\vec{SP} = \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

Iz: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$ slijedi:

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = -\frac{1}{2}(\vec{CD} + \vec{DA}) = -\vec{RS} = \vec{SR} \; ,$$

i: $$\vec{QR} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CD}) = -\frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{AB}) = -\vec{SP} = \vec{PS} \; ,$$

tj. nasuprotne su stranice jednakih dužina i paralelne; Drugim riječima, PQRS je paralelogram.

11. Formulacija: Ako $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{C}$ ne leže u istoj ravnini, tada $x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = \vec{0}$ implicira $x = y = z = 0$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $x \neq 0$. Tada iz $x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = \vec{0}$ slijedi:

$$x\vec{A} = -y\vec{B} - z\vec{C} \implies \vec{A} = -\frac{y}{x}\vec{B} + \frac{z}{x}\vec{C} \quad .$$

No, $-\frac{y}{x}\vec{B} - \frac{z}{x}\vec{C}$ je vektor koji leži u ravnini određenoj vektorima $\vec{B}$ i $\vec{C}$ (zadatak 5.), pa, dakle, i $\vec{A}$ leži u toj ravnini, što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom. Zaključujemo da mora biti: $x = 0$. Analognim postupkom, također zaključujemo na: $y = 0$ i $z = 0$.

12. Zadani izraz možemo napisati u obliku:

$$x_1\vec{A} + x_2\vec{B} - (x_2\vec{A} + y_2\vec{B}) = \vec{0} \quad \text{ili:} \quad (x_1 - x_2)\vec{A} + (y_1 - y_2)\vec{B} = \vec{0}.$$

Na osnovu zadatka 6. je: $x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = 0$, tj. $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Za tri vekora, koji ne leže u istoj ravnini, polazni izraz:

$$x_1\vec{A} + y_1\vec{B} + z_1\vec{C} = x_2\vec{A} + y_2\vec{B} + z_2\vec{C}$$

se također može napisati u obliku:

$$(x_1 - x_2)\vec{A} + (y_1 - y_2)\vec{B} + (z_1 - z_2)\vec{C} = 0 \quad .$$

Tada je na osnovu zadatka 11.: $x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = z_1 - z_2 = 0$, tj. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ i $z_1 = z_2$.

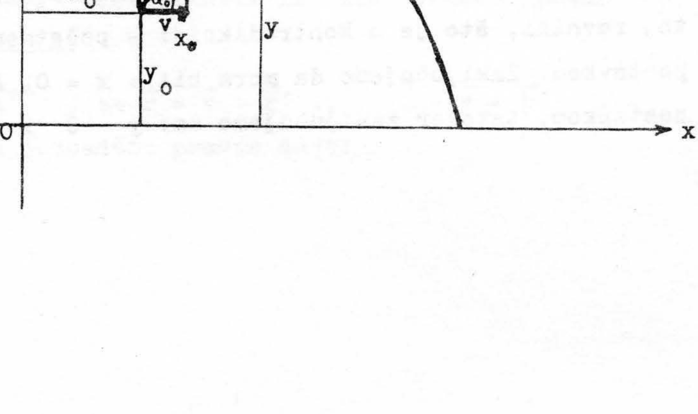
13. $y = -x/4 + 5/2$; $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{j}$; $v = 4{,}1$ m/s ; $\vec{a} = \vec{0}$ m/s^2;

14. $\vec{v} = (t + 3)(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})$ m/s; **15.** $v = 48$ km/h ;

16. $v_o = 3$ m/s , $a = 2$ m/s^2 ; **17.** $v = \sqrt{v_o^2 + 2as}$;

18. $t = 0.19$ s ; **19.** $t = (\Delta y + v_o t_o - \frac{1}{2}g t_o^2) / (2v_o - g t_o)$;

2o.



a) Vektorske jednadžbe gibanja tijela su:

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2}t^2 \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \ .$$

Odaberimo osi Ox i Oy uzduž horizontalnog i vertikalnog smjera s obzirom na silu težu, respektivno. Tada su projekcije jednadžbi na koordinatne osi:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= v_0 t\cos\alpha_0 \\ y - y_0 &= v_0 t\sin\alpha_0 - \frac{g}{2}t^2 \end{aligned}\right\} (1) \qquad \left.\begin{aligned} v_x &= v_0\cos\alpha_0 \\ v_y &= v_0\sin\alpha_0 - gt \end{aligned}\right\} (2)$$

a rezultantna brzina: $v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t\sin\alpha_0 + g^2t^2}$.

Tangens kuta između vektora brzine i osi Ox je:

$\mathrm{tg}\,\gamma = v_y/v_x = \mathrm{tg}\,\alpha_0 - gt/(v_0\cos\alpha_0)$, tj. on se mijenja s vremenom. Taj je rezultat očekivajući jer se brzina geometrijski karakterizira nagibom tangente grafa puta.

b) Jednadžbu puta ćemo dobiti kad iz jednadžbi (1) eliminiramo t. Iz prve jednadžbe dobiveni $t = \dfrac{x - x_0}{v_0\cos\alpha_0}$ uvrštavamo u drugu:

$$y - y_0 = \frac{x - x_0}{\cos\alpha_0}\sin\alpha_0 - \frac{g}{2}\cdot\frac{(x - x_0)^2}{v_0^2\cos^2\alpha_0} \ .$$

Dakle, jednadžba puta je:

$$y = y_0 + (x - x_0)\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 - \frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}$$

c) Ukupno ubrzanje je čitavo vrijeme usmjereno prema dolje i predstavlja ubrzanje sile teže, $\vec{g}$. Tangencijalno ubrzanje je projekcija vektora g na tangentu puta , tj. $-g\sin\gamma$, a normalno - projekcija na na normalu, $-g\cos\vartheta$. Budući da je: $\sin\vartheta = v_y/v$ i $\cos\vartheta = v_x/v$, slijedi: $a_t = -v_y g/v$, $a_n = -v_x g/v$.

d) Najveća visina uspinjanja se dostiže u trenutku t, kad je $v_y = 0$, tj. kad je brzina paralelna s osi Ox (ili - za slučaj kad je $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ - iščezava). Tada iz druge jednadžbe (2) dobivamo $t = v_0 \sin\alpha_0/g$, koji, uvršten u drugu jednadžbu (1) određuje najveću visinu uspinjanja:

$$y_{max} = y_0 + v_0^2 \sin^2\alpha_0/(2g)$$

e) Maksimalan domet nalazimo iz uvjeta $y = 0$ u jednadžbi puta (c)). Uvažavajući i uvjet $x_0 = y_0 = 0$, iz jednadžbe puta dobivamo:

$$x_{max} = v_0^2 \sin 2\alpha_0/g \quad .$$

Izjednačujući $y_{max} = x_{max}$, dobivamo: $\operatorname{tg}\alpha_0 = 4$, $\alpha_0 = 76^{\circ}$.

21. Gibajući se vertikalno uvis, tijelo jednoliko usporavano djelovanjem sile teže dostiže neku točku B, u kojoj mu je brzina jednaka nuli, a zatim se po istoj putanji kreće jednoliko ubrzano do točke O iz koje je i pošao. Točku B dosiže kroz vrijeme t_1. U njoj mu je brzina $v = v_0 - g t_1 = 0$, odakle je: $t_1 = v_0/g$.

Prevaljeni put je OB je :

$$OB = v_0 t_1 - g t_1^2/2 = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Pri povratnom, jednoliko ubrzanom gibanju, tijelo prevali udaljenost BO za vrijeme t_2 uz početnu brzinu jednaku nuli. Dakle, vrijedi: $BO = g t_2^2/2$, tj.:

$$t_2 = \sqrt{2BO/g} = \sqrt{2OB/g} = v_o/g = t_1$$

Prema tome, tijelo se u polaznu točku vraća nakon vremena:
$$t = t_1 + t_2 = 2t_1 = 2t_2 = 2v_o/g \ .$$

22. Putevi koje je vozilo prešlo u jednom i u drugom smjeru su: $s_1 = v_1 t_1 = 60\ m$ i $s_2 = v_2 t_2 = 160\ m$.

Srednji iznos brzine se definira kao omjer ukupno pređenog puta i ukupno utrošenog vremena, tj.:

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{60\ m + 160\ m}{10\ s + 20\ s} = 7{,}3\dot{3}\ m/s \ .$$

Srednja brzina uzima u obzir i smjer i definira se vektorski:
$$\vec{v}_s = \frac{\vec{s}_1 + \vec{s}_2}{t_1 + t_2} = \frac{t_1}{t_1 + t_2}\vec{v}_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2}\vec{v}_2 \ .$$

Budući da se obje brzine nalaze na istom pravcu, vektorsko pisanje možemo zamijeniti predznacima. Ako smjer $\vec{v}_1$ odaberemo za pozitivan tada će srednja brzina biti:

$$v_s = \frac{t_1}{t_1 + t_2} v_1 - \frac{t_2}{t_1 + t_2} v_2 = \frac{s_1 - s_2}{t_1 + t_2} = -\ 3{,}\dot{3}\ m/s.$$

23. Brzina se definira kao $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, a sam kvocijent je:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{2(t+\Delta t) - 3(t+\Delta t)^2 + 4(t+\Delta t)^3}{\Delta t} -$$

$$- \frac{2t - 3t^2 + 4t^3}{\Delta t} = 2 - 6t + 12t^2 + 12(\Delta t) + 4(\Delta t)^2 .$$ Dakle: a)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2 - 6t + 12t^2 + 12t(\Delta t) + 4(\Delta t)^2) = 2 - 6t + 12t^2\ \frac{m}{s}$$

Za akceleraciju je, analogno:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{2-6t-6(\Delta t)+12t^2+24t(\Delta t)+12(\Delta t)^2}{t} - \frac{2+6t-12t^2}{t} = -6+24t+12(\Delta t); \quad a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = -6+24t \ \mathrm{m/s^2} .$$

b) Prevaljeni put, dvije sekunde nakon početka gibanja,

$$s = 2\cdot 2 - 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 = 24 \ \mathrm{m} ;$$

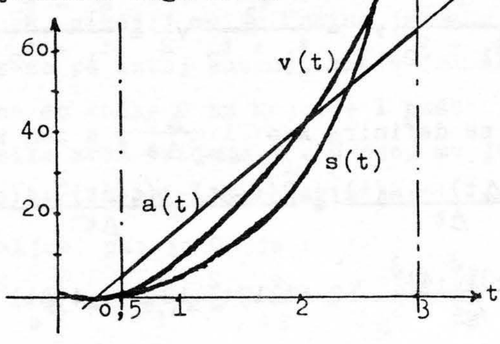
Brzina $v = 2 - 6\cdot 2 + 12\cdot 2^2 = 38 \ \mathrm{m/s}$;

Akceleracija $a = - 6 + 24\cdot 2 = 42 \ \mathrm{m/s^2}$;

c) Grafove ćemo konstruirati na osnovu vrijednosti koje s, v i a imaju u pojedinim trenucima unutar vremenskog intervala između 0,5 i 3 s, tj. njihovog toka:

t(s)	0	1/2	1	2	3
s(m)	0	3/4	3	24	129
v(m/s)	2	2	8	38	92
a(m/s^2)	-6	6	18	42	66

Budući da se za male vremenske promjene veličine s, v i a jako mijenjaju za njihov ćemo grafički prikaz odabrati znatno manje jedinice nego za t:



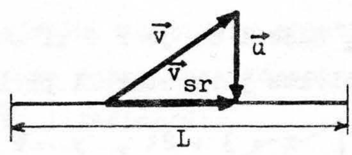
d) $$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_{0,5}}{1 - 0,5} = \frac{3 - 3/4}{0,5} = 4,5 \ \mathrm{m/s} .$$

24. a) Kad avion leti niz vjetar brzina mu je v + u;

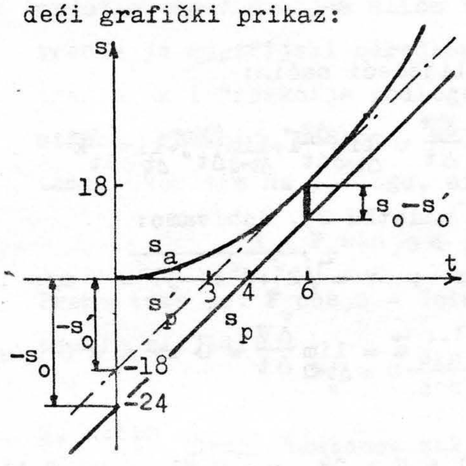
kad leti uz vjetar: $v - u$. Vrijeme koje mu je potrebno da prijeđe relaciju je u prvom slučaju $t_1 = L/(v+u)$, a u drugom $t_2 = L/(v-u)$, gdje je L dužina relacije. Iznos srednje brzine je: $v_{sr} = 2L/(t_1+t_2) = v - u^2/v$

b) Iz slike je vidljivo da će u oba smjera srednja brzina biti jednaka

$$v_{sr} = \sqrt{v^2 - u^2}$$



25. Pređeni putovi, u ovisnosti o vremenu, autobusa ($s_a = a_a t^2/2$) i pješaka ($s_p = v_p t - s_o$) imaju slijedeći grafički prikaz:



Najmanja udaljenost na koju će se pješak približiti autobusu je dana razlikom $s_o - s_o'$, gdje je $s_o = 24$ m, a s_o' ona, zamišljena udaljenost pješaka od autobusa, u trenutku paljenja zelenog svjetla, s koje bi pješak upravo stigao autobus. Grafički prikaz spomenutog, zamišljenog pješakovog puta dan je pravcem s_p' koji prolazi točkom $(0, -s_o')$ i tangira parabolu autobusova puta u trenutku $\underline{t}$; dakle, u trenutku t vrijedi $s_a(\underline{t}) = s_p'(\underline{t})$, tj.: $a_a \underline{t}^2/2 = v_p \underline{t} - s_o'$. No, tangenta može imati samo jedno zajedničko rješenje s parabolom što povlači da diskriminanta rješenjâ dobivene kvadratne jednadžbe za $\underline{t}$ mora biti jednaka nuli:

$$D = 4v_p^2 - 8a_a s_o' = 0 \implies s_o' = \frac{v_p^2}{2a_a} .$$

Dakle, najmanja udaljenost na koju će se pješak približiti autobusu je: $d = s_o - s_o' = 24 - \frac{6^2}{2\cdot 1} = 6$ m .

26. Budući da je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ primjenom zadatka 12. dobivamo parametarski prikaz putanje:

$$x = 3 + 2t \ , \quad y = 2 + 6t \ , \quad z = 4 - 3t \ .$$

Eliminacijom parametra t, dobivamo:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-4}{-3} \quad (=t) ,$$

tj. putanja je pravac.

Brzina je definirana na slijedeći način:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

Analognim postupkom kao u zadatku 23. dobivamo:

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} \text{ m/s} \ ; \quad v = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2} = 7 \text{ m/s} .$$

I opet analogno zadatku 23.: $\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{0} \Rightarrow a = 0$ m/s^2,

tj. gibanje je jednoliko.

27. $F_1 = 128{,}1$ N , $F_2 = 101{,}6$ N ; 28. $\mu = 0{,}51$, $\mu = 0{,}153$;

29. a) $a = 1{,}14$ m/s^2; b) $T = 109{,}5$ N; c) $a_2 = 1{,}69$ m/s^2;

d) $t = 0{,}51$ s; 3o. 5,86 kg; 31. 1400 N; 32. $\frac{\pi}{4}$ rad;

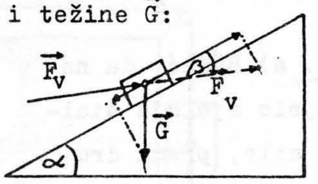
33. $F_R = 7$ N; 34. $\alpha = 144^\circ$, $\beta = 126^\circ$, $\gamma = 90^\circ$;

35. $x = 0{,}25$ m; 36. $x_{CM} = \frac{11}{9}BC$, $y_{CM} = \frac{4}{9}BC$ ($O{=}A; Ox \parallel AB$);

37. $x_{CM} = \frac{-\pi R^2}{ab-\pi R^2} x_o$; $y_{CM} = \frac{-\pi R^2}{ab-\pi R^2} y_o$; (Ishodište je u centru pravokutnika, $Ox \parallel a$, $Oy \parallel b$);

38. $\alpha_1 = 18^o 25'$, $\alpha_2 = 71^o 35'$;

39. 1.način Sila uslijed koje će se tijelo gibati brzinom v uzduž podloge bit će rezultanta komponenata paralelnih s podlogom, sile $\vec{F}_v$ i težine $\vec{G}$:



$$F_v \cos\beta - G\sin\alpha$$

Ta je rezultanta, međutim, uravnotežena silom trenja. Vrijednost sile trenja je empirijski određena kao produkt koeficijenta trenja k i "reakcije podloge" N, $F_{tr} = kN$. S druge strane, reakcija podloge, $\vec{N}$ je uravnotežena komponentama, okomitim na podlogu, silâ $\vec{F}_v$ i $\vec{G}$:

$$N = F_v \sin\beta + G\cos\alpha$$

Prema tome je: $F_v \cos\beta - G\sin\alpha = k(F_v \sin\beta + G\cos\alpha)$, odakle slijedi:

$$F_v = G\frac{\sin\alpha + k\cos\alpha}{\cos\beta - k\sin\beta} \qquad (\pounds)$$

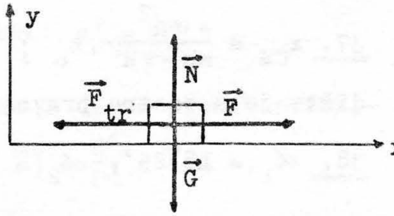
2. način Drugi Newtonov zakon glasi:

$$\vec{F}_v + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_{tr} = m\vec{a}$$

Budući da se tijelo giba jednoliko, $\vec{a} = \vec{0}$, i projekcije na osi, paralelnu s podlogom i okomitu na nju, daju:

$$\left.\begin{aligned} N - F_v \sin\beta - G\cos\alpha &= 0 \\ -F_{tr} - F_v \cos\beta - G\sin\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (F_{tr} = kN) \Longrightarrow (\pounds)$$

4o. Drugi Newtonov zakon u vektorskom obliku glasi:



$$\vec{F}_{tr} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$$

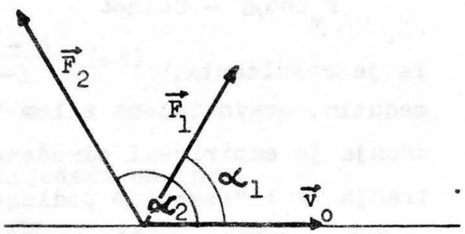
Horizontalna komponenta je:

$F - F_{tr} = F - kN = ma$, a vertikalna: $N - G = 0$ $(G=mg)$.

Dakle:

$$a = \frac{F}{m} - kg = 4 - 3.924 = 0{,}076 \text{ m/s}^2 .$$

41. a) Budući da na tijelo djeluju stalne sile, prema drugom Newtonovom zakonu: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a}$ je ubrzanje tijela konstantno. Komponente ubrzanja su:



$$a_x = \frac{F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2}{m} = \frac{1}{2}(3\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot(-\frac{1}{2})) = -0{,}25 \text{ m/s}^2 ,$$

$$a_y = \frac{F_1\sin\alpha_1 + F_2\sin\alpha_2}{m} = \frac{1}{2}(3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3{,}03 \text{ m/s}^2 ,$$

odakle je ubrzanje:

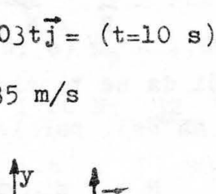
$$\vec{a} = -0{,}25\,\vec{i} + 3{,}03\,\vec{j} \text{ m/s}^2 , \quad a = 3{,}04 \text{ m/s}^2 .$$

b) $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t = v_o\vec{i} - 0{,}25t\vec{i} + 3{,}03t\vec{j} = (t=10\text{ s}) =$

$= 17{,}5\,\vec{i} + 30{,}3\,\vec{j}$ m/s; $v = 35$ m/s

42. Vertikalna komponenta drugog Newtonovog zakona daje akceleraciju u obliku:

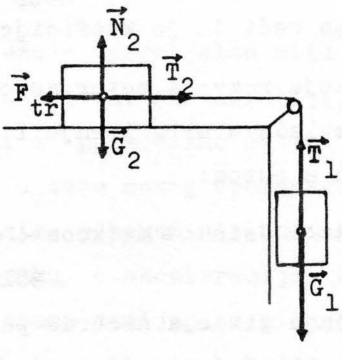
$$a = \frac{1}{m}(T - G - F)$$



Budući da je akceleracija konstantna, također vrijedi: $a = 2y/t^2$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo traženu visinu:

$$y_{max} = \frac{T_{max} - G - F}{G} g \frac{t^2}{2} = 19{,}25 \text{ m} .$$

43. Za ubrzanje dvaju tijelâ možemo postaviti slijedeće dvije jednadže:



$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{G}_1 + \vec{T}_1}{m_1}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{G}_2 + \vec{F}_{tr} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2}{m_2}$$

Ubrzanja $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ su različito označena zato što su ona jednaka samo po apsolutnoj vrijednosti dok su im smjerovi različiti. Isto vrijedi i za napetosti $\vec{T}_1$ i $\vec{T}_2$. Projekcije na osi paralelne s $\vec{a}_1$, odnosno $\vec{a}_2$ daju:

$$\frac{G_1 - T}{m_1} = a, \qquad \frac{-F_{tr} + T}{m_2} = a, \qquad G_2 = N_2$$

Gdje je $a = |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$ i $T = |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$. Uz $G_1 = m_1 g$, $G_2 = m_2 g$ i $F_{tr} = kN_2 = kG_2 = km_2 g$ dobiveni sustav daje:

$$T = \frac{g m_1 m_2 (1 + k)}{m_1 + m_2}, \qquad a = \frac{(m_1 - km_2)}{m_1 + m_2} g .$$

Budući da je u našem slučaju $m_1 = m_2 = m$, konačni rezultat je:

$$a = \frac{1}{2} g (1 - k) = 0{,}45 g = 4{,}4 \text{ m/s}^2 .$$

44. Iz jednadžbe: $ma = F - F_o = F - mv^2$ slijedi da je brzina najveća za $a = 0$. Tada je $v = \sqrt{F/b} \approx$ ≈ 316 m/s ≈ 1138 km/h.

45. Ako je sila trenja koja djeluje na tijelo jednaka jednoj desetini njegove težine, onda to za tijelo na kosini znači jednu desetinu one komponente težine koja je okomita na plohu kosine. Dakle, ako je nagib kosine određen kutom α, onda je $F_{tr} = 0,1\,G\cos\alpha$. Drugačije, još možemo reći da je koeficijent trenja $k = 0,1$.

a) Sila koju razvija motor automobila, gibajući se uzbrdo, svladava silu trenja i komponentu sile teže paralelnu s putom:

$$F = kG\cos\alpha + G\sin\alpha = mg(k\cos\alpha + \sin\alpha) =$$
$$= 9810(0,1\cos\alpha + \sin\alpha)\ \mathrm{N}.$$

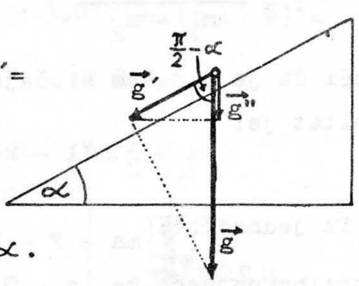
b) U slučaju gibanja nizbrdo paralelna komponenta od G "pomaže" sili F (motoru):

$$F = mg(k\cos\alpha - \sin\alpha) = 9810(0,1\cos\alpha - \sin\alpha)\ \mathrm{N}.$$

Ako je sila trenja manja od aktivne komponente sile teže, tj. ako je: $F_{tr} = kG\cos\alpha < G\sin\alpha$, onda je: $F < 0$. Tada se mora primijeniti "kočeća" sila da bi se održala konstantna brzina. U protivnom će se vozilo ubrzavati s akceleracijom $a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)$.

46. Da uteg teži 6 N u smjeru $\vec{g}$ znači da je iznos one komponente njegove težine, u vozilu, koja je okomita na površinu Zemlje 6 N.

Ubrzanje koje vozilo ima je: $g' = g\sin\alpha$. Vertikalna komponenta tog ubrzanja je njegova projekcija na os paralelnu s $\vec{g}$: $g'' = g'\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = g\sin^2\alpha$.



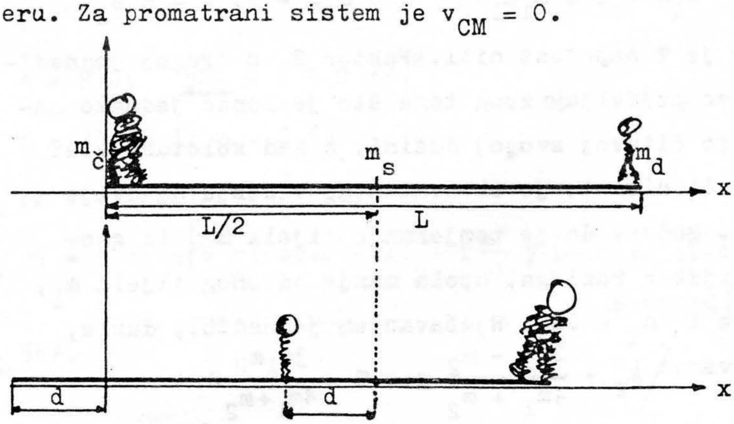
Vertikalna komponenta težine utega (tj. težina utega u smjeru $\vec{g}$) će u vozilu biti umanjena za mg". Dakle:

$$G'' = 6\ N = mg - mg'' = mg(1 - \sin^2\alpha) = mg\cos^2\alpha \ ,$$

odakle dobivamo:
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{G''}{mg}} = 0{,}78 \Rightarrow \quad \alpha = 38^o .$$

47. Sila kočenja uravnotežuje inercijalnu silu čiji je iznos ma' gdje a' iznos negativne akceleracije, tj. usporenja. Da bismo našli a' potsjetimo se (v. zadatak 21.) da pređeni put, u toku nekog vremenskog intervala, tijela koje se giba s nekom stalnom akceleracijom ne ovisi o predznaku te akceleracije. Dakle, mi naše pitanje o a' možemo zamijeniti pitanjem o a ($\vec{a} = -\vec{a}'$; $a = |\vec{a}| = |\vec{a}'| = a'$), koje glasi: s kojom akceleracijom treba ubrzavati tijelo početne brzine $v_o = 0\ \frac{m}{s}$, da za 5 s pređe 25 m? Odgovor, $a = 2s/t^2 = 2\ m/s^2$, nam daje iznos inercijalne sile: $ma' = ma = 2ms/t^2 =$ $= 2Gs/gt^2 = 2039$ N, što je ujedno i iznos sile kočenja.

48. Splav možemo smatrati izoliranim sistemom. Brzina centra masâ ostaje, u tom slučaju, stalna po iznosu i smjeru. Za promatrani sistem je $v_{CM} = 0$.



Problem ćemo svesti na jednodimenzionalni, smatrajući da, zbog dimenzija i mase splavi, realna tijela možemo aproksimirati materijalnim točkama u nivou vode, U koordinatnom sistemu,koji je nepomičan u odnosu na zemlju i definiran kao na slici, će centar masâ imati koordinatu:

$$x_{CM} = \frac{m_č \cdot 0 + m_s \cdot \frac{L}{2} + m_d \cdot L}{m_č + m_s + m_d} = 4,7 \text{ m}$$

Kad se ljudi na splavi pomaknu pomaknat će se i sama splav. Koordinata centra masâ koja, međutim, mora ostati nepromijenjena, definirana s obzirom na tu novu situaciju je:

$$x'_{CM} = x_{CM} = \frac{m_č(L-d) + m_s(\frac{L}{2}-d) + m_d(\frac{L}{2}-d)}{m_č + m_s + m_d}$$

Izjednačujući ovaj izraz s onim za x_{CM} dobivamo:

$$d = \frac{m_č \cdot L - m_d \cdot \frac{L}{2}}{m_č + m_s + m_d} = 0,7 \text{ m}$$

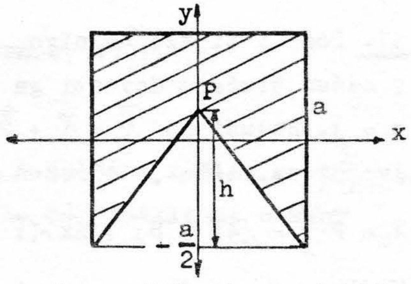
za pomak splavi u odnosu na zemlju.

49. Jednadžbe drugog Newtonovog zakona za svako od tijelâ glase:

$$m_1 g - T = m_1 a_1 \qquad m_2 g - 2T = - m_2 a_2 \quad .$$

gdje je T napetost niti. Faktor 2 u drugoj jednadžbi, se pojavljuje zbog toga što je konac jednako napet po čitavoj svojoj dužini, a kad kolotura visi na omči niti to je ekvivalentno visenju na dvije niti. Budući da je pomjeranje tijela m_2, iz geometrijskih razloga, upola manje od onog tijela m_1, to je i $a_1 = 2a_2$. Rješavanjem jednadžbi, dakle, dobivamo: $a_2 = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g$; $T = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g$.

5o. Smjestimo lik u koordinatni sistem kao na slici. Izrezani dio smatrat ćemo "likom s negativnom masom". Od važnosti, za rješenje, su samo y-komponente centara masâ, budući da sva tri promatrana lika imaju težišta (centre masâ) na toj osi. Ordinata težišta lika je:



$$y_{CM\boxminus} = \frac{m_{\square} y_{CM\square} - m_{\Delta} y_{CM\Delta}}{m_{\square} - m_{\Delta}}$$

Težište trokuta nalazi se na $\frac{2}{3}h$ od P, tj. na $\frac{h}{3}$ od $-\frac{a}{2}$, težište kvadrata je u ishodištu, težište lika u P, koja je za h udaljena od $-\frac{a}{2}$. Dakle:

$$y_P = -\frac{a}{2} + h = \frac{a^2\rho h d\cdot 0 - \rho\frac{ah}{2}(\frac{h}{3} - \frac{a}{2})d}{\rho d a^2 - \rho d\frac{ah}{2}} = \frac{h(\frac{h}{3} - a)}{2(2a - h)}$$

gdje smo masu lika izrazili pomoću gustoće i volumena (d je debljina lika). Sređivanjem se dobiva:

$$2h^2 - 6ah + 3a^2 = 0$$

odakle je $h = a(3 \pm \sqrt{3})/2$. Međutim, rješenje s predznakom + otpada jer bi tada h bio veći od a. Konačno je rješenje:

$$h = a(3 - \sqrt{3})/2 = 0{,}63\,a$$

51. $W = 9$ J; 52. $a = 7{,}2$ m/s^2;

53. $W = 29{,}66$ J; $\eta = 0{,}83$

54. $\alpha = \arccos(1 - v^2/2gl)$;

55. $\beta = \arccos\left[\frac{m'^2}{m^2}(\cos\alpha' - 1) + 2\frac{m'}{m}\sqrt{(1-\cos\alpha)(1-\cos\alpha')} + \cos\alpha\right]$

56. 50%;

57. Podići tijelo na nivo 3 m viši od početnog znači u našem slučaju dovesti ga u položaj čija je aplikata $z = 3$. Budući da $\frac{\vec{r}}{3} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ određuje put između dva nivoa, time je određen i rad:

$$W_u = \vec{F}\cdot\frac{\vec{r}}{3} = (4\vec{i} + 8\vec{j} + 6\vec{k})\cdot(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 38 \text{ J}$$

Koristan se rad, u ovom slučaju, definira kao onaj upotrijebljen isključivo za podizanje tijela na viši nivo. No, budući da sile koje istovremeno djeluju na tijelo, po principu nezavisnosti (tzv. Newtonov "četvrti zakon" - lex quarta), ne djeluju, međusobno jedna na drugu, za ostvarenje našeg cilja bitna je isključivo vertikalna komponenta silâ - i to onaj njen dio koji vrši rad uz minimalno rasipanje energije (u našem slučaju bez ubrzanja); konkretno je to sila, po iznosu, jednaka sili teži. Prema tome, korisni je rad zapravo jednak radu koji izvrši sila mg na putu $h = z = 3$ m ili, drugim riječima, potencijalnoj energiji koju je tijelo dobilo podizanjem na viši nivo: $W_k = mgh = 29{,}4$ J .

Stupanj korisnog djelovanja je : $\eta = \frac{W_k}{W_u} = 0{,}77$.

58. Rad se troši na povećanje potencijalne energije tereta i na dano mu ubrzanje:

$$W = mgh + mah$$

Odavde je:

$$a = \frac{W - mgh}{mh} = 30{,}2 \text{ m/s}^2 \ .$$

59. Prilikom klizanja, potencijalna energija tijela prelazi, jednim dijelom, u njegovu kinetičku energiju,

a drugim u rad protiv sile trenja, tj.:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + F_{tr}s$$

Sila trenja je $F_{tr} = kmg\cos\alpha$, a duljina kosine $s = \frac{h}{\sin\alpha}$, gdje je h visina kosine (h = 1 m), odakle se odmah dobiva $\cos\alpha = \sqrt{1 - h^2/s^2}$.

a) Kinetička energija u dnu kosine je:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = mg(h - k\sqrt{1 - h^2/s^2}\cdot s) = mg(h - k\sqrt{s^2 - h^2}) = 4,9\ J$$

b) Brzina tijela u dnu kosine je:

$$v = \sqrt{2E_k/m} = 3,1\ m/s\ ;$$

c) Kinetička energija na dnu kosine prelazi u rad protiv sile trenja na horizontalnom dijelu puta, tj.:

$$E_k = F_{tr}s' = kmgs' \qquad s' = E_k/kmg = 10\ m.$$

6o. Prema zadatku 21. kamen izbačen brzinom v = 9,8 m/s, treba upravo 2 s da se vrati na isto mjesto - to je period za koji graf i crtamo.

a) Ovisnost visine o vremenu dana je izrazom:

$$h = v_0t - gt^2/2\ , \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

tj. izokrenutom parabolom;

Brzina, čiji je analitički izraz: $v = v_0 - gt$, pada od maksimalne vrijednosti $v_0 = 9,81$ m/s na nulu u najvišoj točci, u trenutku t = 1, i poprima negativnu vrijednost prilikom vraćanja, s vrijednošću $-v_0$ u trenutku t = 2 s. Grafički joj je prikaz pravac.

b) Kinetička i potencijalna energija su:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(v_0 - gt)^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mv_0gt + \frac{mg^2t^2}{2}$$

$$E_p = mgh = mg(v_o t - gt^2/2) = mgv_o t - mg^2t^2/2$$

Ukupna energija je, dakle, konstantna i jednaka:

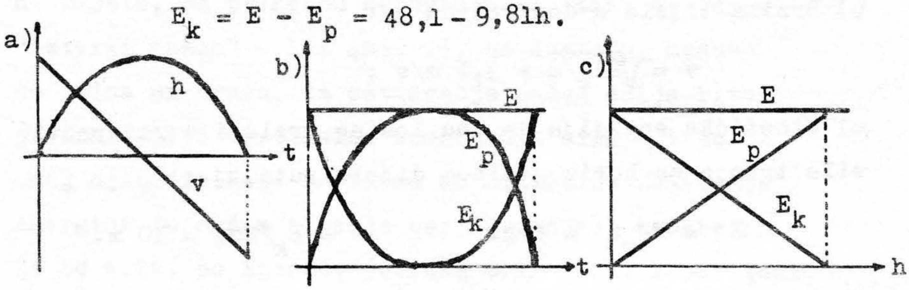
$$E = E_k + E_p = mv_o^2/2 = 48{,}1\ \mathrm{J}$$

c) Ovisnost potencijalne energije o visini je dana izrazom:

$$E_p = mgh = 9{,}81h\,,$$

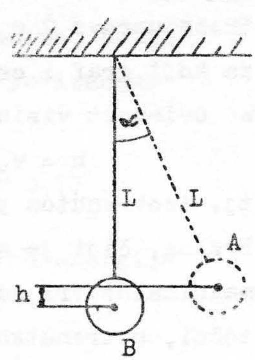
ukupna energija ne ovisi o visini, a ovisnost kinetičke energije o visini proizlazi iz zakona o očuvanju energije:

$$E_k = E - E_p = 48{,}1 - 9{,}81h\,.$$



61. U položaju A kugla ima, s obzirom na položaj B, potencijalnu energiju mgh koja se dolaskom u najniži položaj – B – u potpunosti pretvara (usp.preth.zadatak) u kinetičku:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \qquad (£)$$



Iz slike se vidi:

$$h = L - L\cos\alpha = L(1 - \cos\alpha)\,.$$

Jednadžba (£) daje, dakle:
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)}$$

Prilikom udara taneta u kuglu, zakon o očuvanju količine gibanja zahtijeva:
$$mv = m'v'\,,$$

odakle je:
$$v' = \frac{m}{m'}v = \frac{m}{m'}\sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)}$$

62. Tijelo teško 30 N ima masu od 3.1 kg. Gibajući se brzinom v_1 ima kinetičku energiju:

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} .$$

Poslije neelastičnog, centralnog sudara oba se tijela zajedno gibaju brzinom:

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

koja se dobiva iz zakona o očuvanju količine gibanja:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 (= \vec{0}) = (m_1 + m_2)\vec{V} .$$

Kinetička energija oba tijela poslije sudara je:

$$E_k' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Razlika kinetičkih energija prije i poslije sraza jednaka je količini energije koja se oslobodi prilikom sudara:

$$Q = \Delta E_k = E_k - E_k' = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = (m_1 = m_2 = m) = \frac{m}{4} v_1^2 .$$

Za m = 3,1 kg: Q = 12,4 J.

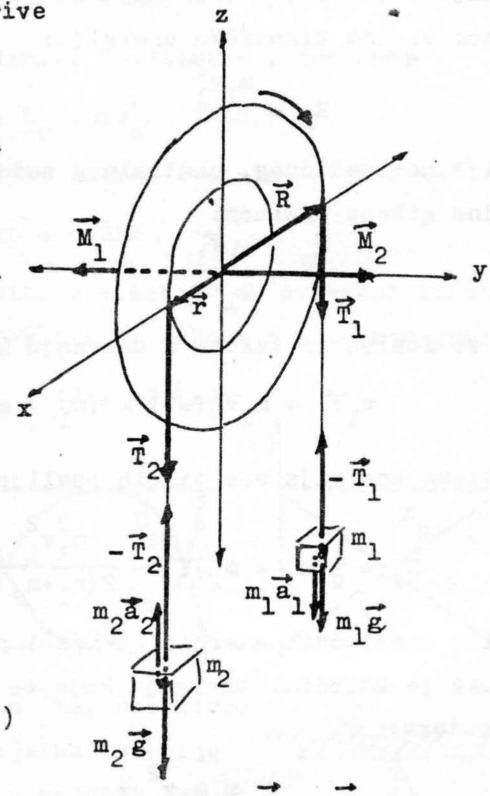
63. $n = 1,43$ okr; $\omega = 6\ s^{-1}$;

64. $P = 126000\ N/m^2$; 65. 117 km/h ;

66. $E_k = 3/4$ J ; 67. dva puta;

68. $v_1 = \sqrt{G \frac{M}{R + h}}$; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

69. U slučaju zanemarive mase koluture, ona se nalazi u ravnotežnom položaju, a na temelju zakona održanja za sile, kod rotacionog gibanja, mora u ravnotežnom položaju suma momenata sila biti jednaka nuli. (Naime, suma momenata sila mora biti jednaka $I\vec{\varepsilon}$, a budući da je masa koloture zanemariva onda je moment inercije $I = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i r_i^2 = 0$.)



U našem slučaju na koloturu djeluju dva suprotna momenta $\vec{M}_1$ i $\vec{M}_2$ čija suma iščezava: $\vec{M}_1 - \vec{M}_2 = \vec{T}_1 \times \vec{R} + \vec{T}_2 \times \vec{r} = \vec{0}$

gdje su $\vec{T}_1$ i $\vec{T}_2$ sile koje tangencijalno djeluju na koloturu u točkama (-R,0,0) i (r,0,0) i, prema tome, uvijek zatvaraju prave kutove s vektorima $\vec{R}$ i $\vec{r}$:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = T_1 R \sin\frac{\pi}{2}(-\vec{j}) + T_2 r \sin\frac{\pi}{2}\vec{j} = (T_2 r - T_1 R)\vec{j} = \vec{0}$$

odakle je: $T_1 R = T_2 r$.

Tangencijalne sile, $\vec{T}_1$ i $\vec{T}_2$ su jednake po iznosu, a suprotne po smjeru, odgovarajućim napetostima niti. To nam omogućuje da međusobno povežemo jednadžbe drugog Newtonovog zakona koje možemo postaviti za svaki od utega: $-\vec{T}_i + m_i\vec{g} + m_i\vec{a}_i = \vec{0}$ (i = 1, 2)

Projekcija na aplikatu (Oz-os) daje:

$T_1 - m_1 g = - m_1 a_1 \qquad T_2 - m_2 g = m_2 a_2$

Jednadžbe povezujemo gore dobivenom relacijom za T: $T_1 R = T_2 r$, i slijedećom relacijom za a:

$$a_1/a_2 = (\alpha_1 R)/(\alpha_2 r) = (\frac{\omega}{t}R)/(\frac{\omega}{t}r) = R/r$$

Kombinacijom jednadžbi dobivamo:

$a_1 = (m_1 R - m_2 r)Rg/(m_1 R^2 + m_2 r^2); \qquad a_2 = a_1 r/R \qquad (£)$

c) $T_1 = m_1 m_2 gr(R + r)/(m_1 R^2 + m_2 r^2) = T_2 r/R$

b) Kod rotacionog gibanja s konstantnom kutnom akceleracijom kut je određen pomoću: $\theta = \alpha t^2/2$, gdje je α - kutna akceleracija. Ako se kolotura okrenula za dva puna okreta za 3 s, onda je:

$$\theta = 2\pi n = \alpha t^2/2 \implies \alpha = 8\pi/9 .$$

Tangencijalne akceleracije, tj. akceleracije pojedinih utega (promatrajući npr. točku (-R,0,0) možemo se lako uvjeriti da se dvije akceleracije podudaraju u iznosu, a u spomenutoj točci i po smjeru) su:

$$a_1 = \alpha R = \frac{8\pi}{9}R \qquad a_2 = \alpha r = \frac{8\pi}{9}r .$$

a) Korištenjem ovog izraza i prve jednadžbe(£) dobivamo:

$$m_1 = \frac{(9g + 8\pi r)\,r}{(9g - 8\pi R)\,R}\,m_2 .$$

7o. Ako prekoračenjem brzine dolazi do proklizavanja, onda to znači da je centrifugalna sila nadvladala silu koja joj se suprotstavljala. Dakle, jednakost između centrifugalne sile i sile trenja daje kritički koeficijent trenja: $\frac{mv^2}{r} = F_{tr} = kG = kmg \Rightarrow k = \frac{v^2}{gr}$.

71. Pretpostavlja se da se donji kraj stupa bitno ne pomiče. Tako se kinetička energija stupa svodi na rotacionu kinetičku energiju (oko donjeg kraja stupa):

$$E_{kr} = I\omega^2/2 \quad .$$

Pri udaru o tlo je kinetička energija stupa jednaka potencijalnoj (usp. zadatak 6o.) energiji stupa u vertikalnom položaju. Budući da je potencijalna energija stupa jednaka potencijalnoj energiji centra mase stupa opterećenog masom cijelog stupa možemo uspostaviti relaciju:

$$mg\frac{L}{2} = \frac{I\omega^2}{2} \qquad (\pounds)$$

Moment inercije I se definira kao $\sum_i \Delta m_i r_i^2$. Nas zanima samo uzdužna komponenta stupa, tj. uzimamo da je $r_i = x_i$, i želimo odrediti moment inercije s obzirom na krajnju točku stupa. Ukoliko je S površina presjeka stupa (pri čemu je $\sqrt{S}$ zanemariv prema L) onda možemo pisati:

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\rho S \Delta x_i) x_i^2 = \frac{m}{L} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 (\Delta x_i) \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant L$$

Da bismo izračunali ovu beskonačnu sumu polazimo od konačne. Podijelimo segment $[0,L]$ na n jednakih dijelova. Tada možemo pisati: $x_0 = 0$, $x_1 = h$, ..., $x_i = ih$, ..., $x_n = nh$, gdje je $h = L/n$, pa suma poprima oblik:

$$\sum_i x_i^2 \Delta x_i = \sum_i (ih)^2 h = h^3 \sum_i i^2$$

Suma je: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(2n^2+3n+1)$

Moment inercije je, dakle:

$$I = \frac{m}{L}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)\frac{L^3}{n^3}\right] = L^2 m \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) = \frac{mL^2}{3} .$$

Uvrštavanjem te vrijednosti u (£) i uzimanjem u obzir da je $\omega = v/L$, dobivamo: $mgL/2 = \frac{mL^2}{3}\frac{v^2}{2L^2}$.

Odavde je: $v = \sqrt{3gL}$.

72. Označimo mase Zemlje i Sunca sa m i M. Prilikom gibanja (aproksimativno - v.zadatak 74.) Zemlje oko Sunca, centrifugalna sila uravnotežuje gravitacionu silu: $m\omega^2 r = G\frac{mM}{r^2}$, odakle je: $M = \frac{\omega^2 r^3}{G}$

Kutna brzina Zemlje je $\omega = 2\pi/T$, gdje je T ophodno vrijeme (1 god). Volumen Sunca je $V = 4\pi R^3/3$. Tako dobivamo:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\pi}{GT^2}\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

73. Kad bi kuglasto tijelo bilo homogeno, kugla bi privlačila tijelo mase m silom:

$$F = G\frac{mM}{L^2}$$

(gdje je L udaljenost, međusobna, njihovih središta). U našem će slučaju gravitaciona privlačnost biti umanjena za veličinu F′ kojom bi tijelo privlačila kugla radijusa r, a jednake gustoće kao i velika kugla:

$$F' = G\frac{mM'}{L^2}$$

Mase su izrazive preko volumena i gustoće:

$$M = \rho V = \frac{4\pi R^3}{3}\rho \quad ; \quad M' = \frac{4\pi r^3}{3}\rho \ ;$$

Budući da je (v.sl. 9.):

$$L = \sqrt{d^2 + \left(\frac{R-r}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4d^2 + (R-r)^2}$$

gravitaciona privlačnost dvaju tijela je:

$$F_T = F - F' = G\frac{m}{L^2}\,\frac{4\pi\rho}{3}(R^3 - r^3) = \frac{16\pi\rho mG(R^3 - r^3)}{3(4d^2 + (R-r)^2)}$$

74. Budući da se obje zvijezde gibaju po kružnicama, sile koje djeluju na njih su usmjerene prema centru. Prema trećem Newtonovom zakonu te su sile (centripetalne) po iznosu međusobno jednake:

$$m_1\omega_1^2 r_1 = m_2\omega_2^2 r_2 \ .$$

Ako kutne brzine izrazimo pomoću ophodnih vremena:

$$\frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2} \ .$$

Budući da je udaljenost među zvijezdama L konstantna, to je $T_1 = T_2 = T$, pa se jednadžba svodi na: $m_1 r_1 = m_2 r_2$. Uzevši u obzir da je $r_1 + r_2 = L$, dobivamo:

$$r_1 = m_2 L/(m_1 + m_2), \quad r_2 = m_1 L/(m_1 + m_2) \ .$$

Ako je $m_1 \gg m_2$, onda je i $r_2 \gg r_1$, tj. mala zvijezda rotira oko velike.

Da bismo odredili ophodno vrijeme zvijezda, polazimo od uravnoteženja gravitacione i centrifugalne sile:

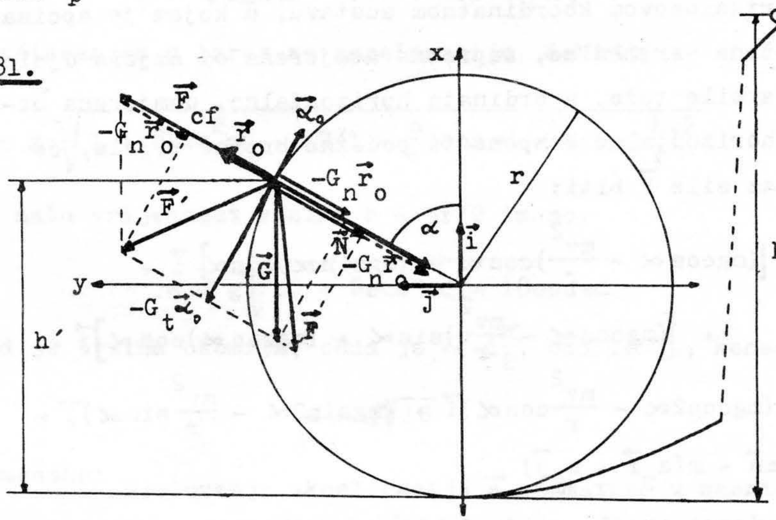
$$G\frac{m_1 m_2}{L^2} = 4\pi^2\frac{m_1 r_1}{T^2}, \qquad T = 2\pi\sqrt{L^2/(Gm_1 + Gm_2)}$$

75. $G = 0$ N ; 76. 45^o ; 77. 200 km/h ;

78. c ; 79. $t_{astr.} \approx 5$ min , $t_{naše} \approx 100000$ god ;

8o. $m_p \approx 1,7\cdot 10^{-17}$ kg ;

81.



Ukupna akceleracija tijela u nekoj točki kružnice, određenoj kutom α, dobiva se iz rezultantne sile F koja djeluje na tijelo: $\vec{a} = \vec{F}/m$. Njena tangencijalna komponenta, $-G_t/m = -g\sin\alpha$, <0 na lijevom dijelu kružnice (uspon - usporenje), >0 na desnom (spust - ubrzanje). Sama sila $\vec{F}$ je rezultanta tangencijalne komponente sile teže i reakcije podloge N (koja uravnotežuje centrifugalnu silu $\vec{F}_{cf}$, umanjenu za normalnu komponentu sile teže $G_n = mg\cos\alpha$). U polarnom koordinatnom sustavu u kojem je (v.sliku) ort $\vec{r}_o$ usmjeren od središta kružnice prema obodu i igra ulogu normalnog orta, a ort α_o, tj. tangencijalni ort, usmjeren u smjeru gibanja tijela, će se sila $\vec{F}$ moći prikazati na slijedeći način:

$$\vec{F} = \vec{N} - G_t\vec{\alpha}_o = N\vec{r}_o - mg\sin\alpha\,\vec{\alpha}_o = -(F_{cf} - mg\cos\alpha)\vec{r}_o - mg\sin\alpha\,\vec{\alpha}_o =$$
$$= (mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{r})\vec{r}_o - mg\sin\alpha\,\vec{\alpha}_o = m\vec{a} = m(a_r\vec{r}_o + a_\alpha\vec{\alpha}_o)$$

U Cartesiusovom koordinatnom sustavu, u kojem je apcisa položena vertikalno, suprotno usmjerena od smjera djelovanja sile teže, a ordinata horizontalno, usmjerena uzduž horizontalne komponente početne brzine tijela, će prikaz sile $\vec{F}$ biti:

$$\vec{F} = \left[(mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{r})\cos\alpha - (mg\sin\alpha)\sin\alpha\right]\vec{i} +$$
$$+ \left[(mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{r})\sin\alpha + (mg\sin\alpha)\cos\alpha\right]\vec{j} =$$
$$= (mg\cos2\alpha - \frac{mv^2}{r}\cos\alpha)\vec{i} + (mg\sin2\alpha - \frac{mv^2}{r}\sin\alpha)\vec{j} =$$
$$= m\vec{a} = m(a_x\vec{i} + a_y\vec{j})$$

Vrijednost akceleracije dobivamo, bilo iz prvog , bilo iz drugog izraza za $\vec{F}/m$:

$$a = |\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m} = \sqrt{v^4/r^2 + g^2 - 2v^2 g\cos\alpha/r}$$

Brzinu v u ovom izrazu određujemo prema početnim uvjetima, na slijedeći način: Saonice polaze s visine h, gdje su imale početnu potencijalnu energiju mgh, a kinetičku energiju jednaku nuli. Prema zakonu o očuvanju ukupne energije, nakon ulaska u kružnicu, tijelo ima jednaku ukupnu energiju, tj. mgh, koja je, međutim, zbroj slijedeće potencijalne energije: $mgh' = mg(r + r\cos\alpha)$ i odgovarajuće kinetičke. Dakle, kinetičku energiju tijela u nekoj točki kružnice možemo izraziti kao:

$$E_k = E - E_p = mg(h - r - r\cos\alpha) = \frac{mv^2}{2}$$

što omogućuje određivanje brzine:

$$v = \sqrt{2gh(1 - r(1 + \cos\alpha)/h)} \ .$$

Uvrštavanjem u izraz za akceleraciju, dobivamo:

$$a = g\sqrt{1 + 8\cos^2\alpha + 12(1 - \frac{h}{r})\cos\alpha + 4(1 - \frac{h}{r})^2} \ .$$

Za našu vrijednost visine $h = 5r/2$ imamo:

$$a = g\sqrt{10 + 8\cos^2\alpha - 18\cos\alpha}$$

Kad je brzina okomita, onda je $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, odakle je, konačno:

$$a = g\sqrt{10}$$

Komentar: Djelovanje akceleracije $\vec{a}$ promatrač u saonicama osjeća kao pseudosilu $\vec{F}'$ s komponentama $-ma_r$ i ma_α. Drugim riječima:

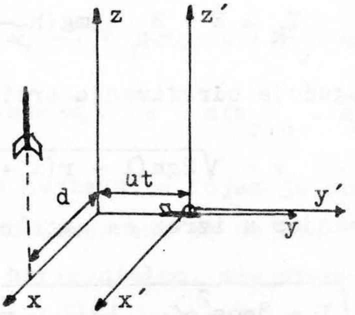
$$\vec{F}' = -(mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{r})\vec{r}_0 - mg\sin\alpha\,\vec{\alpha}_0 =$$

$$= (\frac{mv^2}{r}\cos\alpha - mg)\vec{i} + \frac{mv^2}{r}\sin\alpha\,\vec{j}$$

No, a to je upravo rezultanta sila: $\vec{F}_{cf}$ (centrifugalne) i $m\vec{g}$ (sile teže), tj. realnih sila koje djeluju na tijelo. Naime, zbog postojanja fiksne putanje (šina po kojima se gibaju saonice) centrifugalna se sila kompenzira reakcijom podloge i normalnom komponentom sile teže i ona se izvana, tj. za nepomičnog promatrača, manifestira u pritisku na podlogu, a za promatrača u saonicama, u kombinaciji sa silom težom, kao pseudosila $\vec{F}'$.

82. Uzmimo pravac gibanja aviona za ordinatu pridruženog koordinatnog sistema.

U mirnom sustavu S raketa će imati akceleraciju:



$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

U sustavu S′, vezanom uz promatrača u avionu, bit će:

$$\vec{a}' = a'_x\vec{i} + a'_y\vec{j} + a'_z\vec{k} \ .$$

Ako se sustav S′ giba jednolikom brzinom u uzduž ordinate, onda su koordinate neke točke u njemu izrazive pomoću koordinata u sustavu S na slijedeći način:

$$x' = x - ut \ , \quad y' = y \ , \quad z' = z \ , \quad t' = t \ .$$

Da bismo dobili vrijednost akceleracije u konkretnom slučaju polazimo od njene definicije: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$,
gdje je: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$. Prema tome će brzina rakete u S sustavu biti:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

a u sustavu S′:

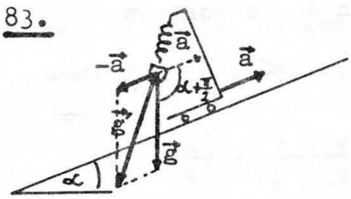
$$\vec{v}' = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'}\vec{i} + \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta t'}\vec{j} + \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta z'}{\Delta t'}\vec{k} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(x - ut)}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} =$$

$$= \vec{v} - u\vec{i}$$

Akceleracija u sustavu u gibanju S′ odavde će biti:

$$\vec{a}' = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\vec{v}'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}\vec{i} = \vec{a} - 0\vec{i} = \vec{a} = -2\vec{g}$$

83. 

U sustavu vezanom uz vozilo, osim sile teže, na tijelo djeluje još i pseudosila $-m\vec{a}$, koju promatrač u vozilu ne razlikuje od vanjske sile teže, već registrira samo njihovu rezultantu:

$$m\vec{g}' = m\vec{g} - m\vec{a}$$

kao "svoju silu težu", tj. kao težinu tijela u vozilu:

$$mg' = m\sqrt{g^2 + a^2 - 2ag\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$$

Omjer težina je,dakle:

$$\frac{mg'}{mg} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{g^2} + 2\frac{a}{g}\sin\alpha} = 1,41$$

84. Za slobodnu česticu, koja se giba malim brzinama, energija je mirovanja, $E_o = m_oc^2$, vrlo velika naspram kinetičke energije. Prema tome, budući da je ukupna energija slobodne čestice zbroj kinetičke energije i energije mirovanja, $E = E_k + E_o$, u našem se slučaju ne radi o malim brzinama, tj. radi se relativističkoj čestici. U tom slučaju vrijedi:

$$E = mc^2 \quad \text{i} \quad m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Iz zadanog uvjeta je:

$$E = mc^2 = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 5E_o = 5m_oc^2$$

odakle slijedi:

$$v = 0,98\,c$$

85.a) Masa relativističke čestice, koja se, s obzirom na promatrača, giba brzinom $v = 0,8c$:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,6\dot{6}\, m_o$$

Masa mirovanja elektrona : $m_{oe} = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg.
Dakle, masa elektrona koji se giba brzinom $v = 0,8\,c$ je: $m_e = 1,6\dot{6}\, m_{oe} = 1,52 \cdot 10^{-30}$ kg .

b) Ukupna energija je: $E = m_e c^2 = 13,68 \cdot 10^{-14}$ J

Kinetička energija je: $E_k = E - m_{oe}c^2 = 5,48 \cdot 10^{-14}$ J.

c) Lorentzove transformacije koje povezuju koordinate u mirujućem sustavu S i gibajućem (relativnom brzinom u, s obzirom na S) sustavu S′, glase:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \;,\quad y' = y \;,\quad z' = z \;,\quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Neka je (x,y,z,t) "položaj" jednog od elektrona u 4-prostoru u mirujućem sustavu S, a (x',y',z',t') njegov "položaj" u odnosu na sustav vezan uz drugi elektron (S′). Tada je $v = x/t = 0,8\,c$ brzina elektrona u odnosu na mirujući sustav S, a $v' = x'/t'$, njegova brzina s obzirom na sustav S′, vezan uz drugi elektron. Elektron uz koji je vezan sustav S′ se giba istom brzinom kao i prvi elektron, ali u suprotnom smjeru, što se uzima u obzir (Lorentzove se transformacije odnose na komponente vektorâ) suprotnim predznakom: $u = -v$. Dakle, relativna brzina dvaju elektrona je:

$$v' = \frac{x'}{t'} = \frac{x + vt}{t + \frac{v}{c^2}x} = (v = x/t) = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = 0{,}98\,c\,.$$

Vidimo da teorija relativnosti, za velike brzine, korigira klasični zakon zbrajanja brzina ($v'=2v$).

86. Označimo put koji je mezon prešao, u našem sustavu S, sa s (= 5000 m), a njegovu brzinu u S sa v (= 0,99c). U našem sustavu S mezon je živio:

$$t = \frac{s}{v} = 16{,}7\cdot 10^{-6}\,s = 16{,}7\,\mu s\,.$$

Taj vremenski interval možemo, Lorentzovim transformacijama, povezati s vremenskim intervalom u sustavu S′, vezanim uz mezon:

$$t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{vx_2'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{vx_1'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

odabirući npr. da x_1', x_2' opisuju položaj mezona u S′. No, budući da je S′ vezan uz mezon u njemu se mezon uvijek nalazi na istom mjestu, tj.: $x_1' = x_2'$, odakle je:

$$t = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = t\cdot\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2{,}36\,\mu s.$$

Da bismo odredili pređeni put u sustavu S′, promatrajmo zamišljenu inverznu situaciju u kojoj bi mezon mirovao, a zrak jurio oko njega. Tada je dužina zraka s Lorentz-kontrahirana i iznosi: $s\sqrt{1 - v^2/c^2} = 707{,}5$ m.

87. Niti u jednom slučaju se nivo vode neće promijeniti.

88. $H = \frac{\rho' h}{\rho' - \rho} = 50$ cm; 89. $F = 25035{,}12$ N;

9o. Brzina zraka između papira je veća nego izvan njih i prema tome (Bernoullieva jednadžba - v. zadatak 96.) je tlak između papira niži od atmosferskog.

91. $p = 2 \text{ atm} + \frac{\rho g h}{1.01 \cdot 10^5} \text{ atm} = 5{,}6 \text{ atm} = 5{,}7 \cdot 10^5$ Pa;

92. $F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{v \Delta m}{\Delta t} = v \rho \frac{\pi d^2}{4} v \Delta t / \Delta t = \frac{\rho \pi}{4} d^2 v^2 =$

$= 7{,}8 \cdot 10^{-5}$ N

93. Prema Pascalovom zakonu je pritisak na dno posude napunjene tekućinom svugdje jednak, tako da se ravnoteža neće poremetiti bez obzira na položaj i težinu predmeta koji pluta po površini.

94. Prije otpuštanja će, prema Arhimedovom zakonu, na loptu djelovati sila A koja će po iznosu biti jednaka težini fluida (tekućine ili plina) koji istisne tijelo (ili dio tijela) uronjeno u taj fluid, a usmjerena je vertikalno uvis i ima hvatište u težištu tijela. Njen će iznos, dakle, biti:

$$A = \rho V g$$

gdje je ρ gustoća fluida, a V volumen tijela uronjenog u fluid. U našem slučaju je $\rho = 1000$ kg/m^3, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Na loptu će prije otpuštanja također djelovati, ali u suprotnom smjeru, i sila teža:

$$G = m g$$

Prema tome, lopta će, na dubini h, imati, s obzirom na površinu, potencijalnu energiju (jednaku radu koji treba utrošiti na potapljanje lopte do dubine h):

$$(A - G) h = (\rho \frac{4 \pi R^3}{3} - m) g h$$

koja će, prema zakonu o sačuvanju energije, biti jednaka potencijalnoj energiji u najvišoj točki y koju lopta dosiže nakon iskakanja iz vode:

$$(\rho \frac{4 \pi R^3}{3} - m) g h = m g y$$

Odavde je visina do koje će lopta iskočiti jednaka:

$$y = (\frac{4 \pi \rho R^3}{3m} - 1) h$$

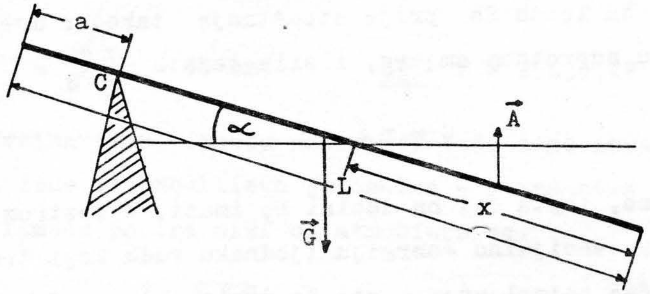
Na samoj površini će energija biti u potpunosti kinetička i opet prema zakonu o sačuvanju energije jednaka potencijalnoj:

$$\frac{m v^2}{2} = (\frac{4 \pi \rho R^3}{3} - m) g h$$

Odavde je brzina izranjanja:

$$v = \sqrt{2 (\frac{4 \pi \rho R^3}{3m} - 1) g h}$$

95.



Na letvu djeluje sila teža $\vec{G}$ s hvatištem u točki $\frac{L}{2}$, i Arhimedova sila $\vec{A}$ pridružena težištu (u: $\frac{x}{2}$) potopljenog dijela. Iznosi tih sila su:

$$G = \rho L S \qquad ; \qquad A = \rho_0 S x$$

gdje je S ploština poprečnog presjeka letve i ρ_0 gustoća vode.

Budući da se sistem nalazi u ravnoteži, to će suma momenata silâ, s obzirom na točku C, biti jednaka nuli:

$$\vec{M}_{GC} + \vec{M}_{AC} = \vec{r}_{GC} \times \vec{G} + \vec{r}_{AC} \times \vec{A} = \vec{0}$$

Vektorski produkt $\vec{r}_{GC} \times \vec{G}$ će "gledati u sliku", a produkt $\vec{r}_{AC} \times \vec{A}$ "iz slike". Prema tome će gornjoj jednadžbi odgovarati slijedeća jednadžba:

$$r_{GC} \cdot G \cdot \sin(\vec{r}_{GC}, \vec{G}) \cdot \vec{r}_{\perp o} + r_{AC} \cdot A \cdot \sin(\vec{r}_{AC}, \vec{A}) \cdot (-\vec{r}_{\perp o}) = \vec{0}$$

koja se reducira na slijedeću skalarnu jednadžbu:

$$(\frac{L}{2} - a)\, G \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) - (L - a - \frac{x}{2})\, A \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = 0$$

odnosno na:

$$\left(\frac{L}{2} - a\right)\rho\, L\, S \cos\alpha = \left(L - a - \frac{x}{2}\right)\rho_0\, S\, x \cos\alpha$$

Odavde se dobiva kvadratna jednadžba:

$$x^2 + 2(a - L)x + \frac{\rho}{\rho_0}(L - 2a)L = 0$$

čije je rješenje:

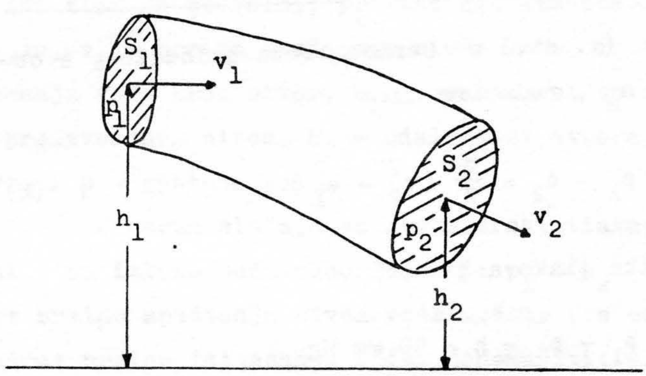
$$x = L - a \pm \sqrt{(L-a)^2 - \frac{\rho}{\rho_0}(L - 2a)L}$$

Budući da je $x < L - a$, treba odabrati predznak "-" u rješenju, tako da za dio letve koji će biti potopljen u vodu dobivamo rezultat:

$$x = L - a - \sqrt{(L-a)^2 - \frac{\rho}{\rho_0}(L - 2a)L}$$

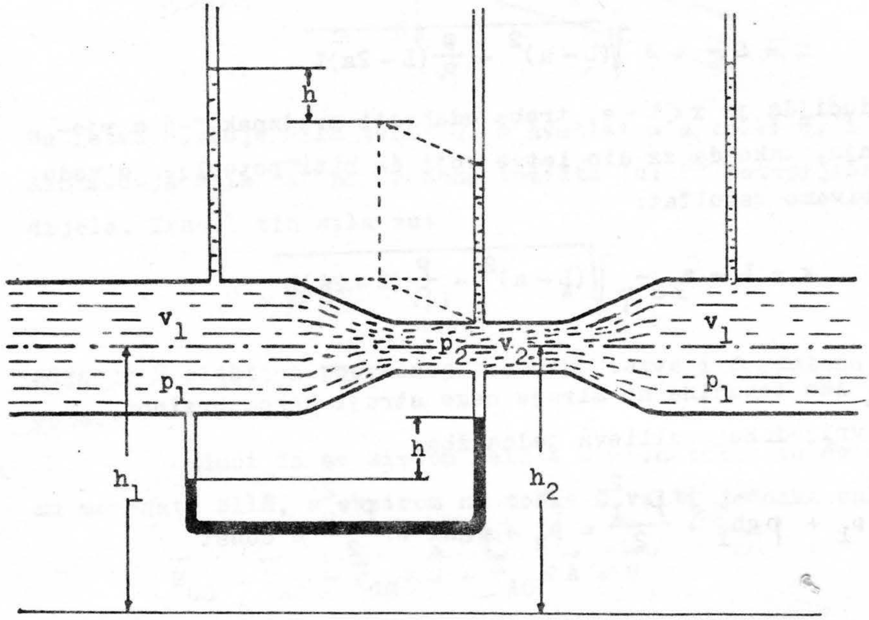
96. Ako tekućina ne miruje nego struji nekom brzinom, onda vrijedi Bernoullieva jednadžba:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = \text{const}$$



gdje je ρ gustoća tekućine, p - statički tlak, u presjeku S, h - visina središta danog presjeka S nad proizvoljnim nivoom.

Bernoullieva jednadžba predočuje statički ($p + \rho gh$) i dinamički ($\frac{\rho v^2}{2}$) tlak u nekom presjeku S. S energetskog stanovišta p je rad vanjskih sila izvršen nad jedinicom volumena tekućine, a ρgh i $\rho v^2/2$ potencijalna i kinetička energija tekućine unutar tog volumena.



U našem slučaju (v. sl.) se Bernoullieva jednadžba, s obzirom na $h_1 = h_2$, reducira na:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) \qquad (\pounds)$$

Izmjerena razlika tlakova je:

$$p_1 - p_2 = h = 50 \text{ mm Hg}$$

Podsjetivši se da je:

760 mm Hg = 1 atm = 101325 Pa

mi možemo navedenu razliku tlakova izraziti u SI jedinicama kao:

$$p_1 - p_2 = 50 \text{ mm Hg} = 50\cdot 1{,}33\cdot 10^2 \text{ Pa} = 6666{,}12 \text{ Pa}$$

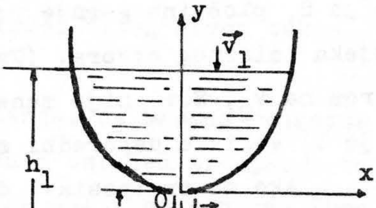
i uvrstiti u jednadžbu (£) da bismo dobili traženu brzinu strujanja nafte kroz uži dio cijevi:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) + v_1^2} = \sqrt{\frac{2}{900}\,6666{,}12 + 4} = 4{,}34 \text{ m/s}$$

97. Bernoullieva jednadžba (v. prethodni zadatak) glasi:

$$p_1 + \rho h h_1 + \rho v_1^2/2 =$$

$$p_2 + \rho g h_2 + \rho v_2^2/2$$



gdje je p_1 statički atmosferski tlak na površini, p_2-statički atmosferski tlak na izlazu, v_1 - brzina spuštanja nivoa vode, v_2 - brzina istjecanja vode kroz otvor, h_1 - udaljenost površine vode od proizvoljnog nivoa, h_2 - udaljenost otvora od tog istog nivoa i ρ - gustoća vode.

U našem slučaju su atmosferski tlakovi na površini i na izlazu međusobno jednaki: $p_1 = p_2$. Zatim, kvadrat brzine spuštanja nivoa vode možemo , s obzirom na kvadrat brzine istjecanja vode, zanemariti: $v_1 \approx 0$. Prema tome će Bernoullieva jednadžba poprimiti oblik:

$$\rho g h = \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

gdje je: $h = h_1 - h_2$. Drugim riječima, brzina istjecanja tekućine će biti (Torricelliev teorem):

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Budući da je voda nestlačiva, vrijedit će:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \qquad (£)$$

gdje je S_1 ploština gornje površine vode, a S_2 ploština presjeka izlaznog otvora. (Napomena: Iako je v_1 mali s obzirom na v_2, $S_1 v_1$ nije zanemarivo s obzirom na $S_2 v_2$, jer je S_1 velik u usporedbi sa S_2.)

Ako se pretpostavi da je posuda aksijalno simetrična, tada je:

$$S_1 = \pi x^2$$

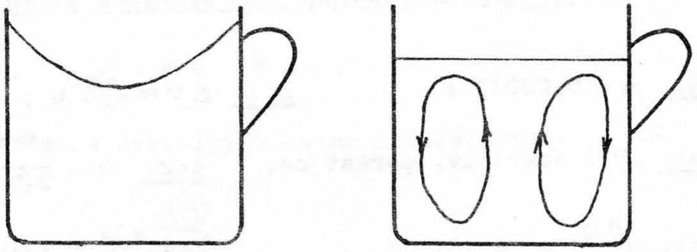
gdje je x horizontalna koordinata zida posude. Odavde i iz jednadžbe (£) dobivamo:

$$\frac{S_1}{v_2} = \frac{\pi x^2}{\sqrt{2gy}} = \frac{S_2}{v_1} = \text{const}$$

gdje je posljednji omjer konstantan jer se prema postavljenom zahtjevu nivo vode mora spuštati konstantnom brzinom. Dakle, oblik posude će biti određen jednadžbom:

$$y = k x^4 \qquad \left(\text{gdje je } k = \frac{\pi^2 v_1^2}{2gS_2^2}\right).$$

98.



Sl. a Sl. b

Miješanje daje izvjesnu kutnu brzinu česticama vode u šalici. Zbog toga će se tlak u tekućini distribuirati tako da površina poprimi oblik (parabole) kao na sl. a, tj. viši tlak unutar tekućine uz rub šalice, će biti uravnotežen tlakom višeg nivoa tekućine na rubovima šalice.

Nakon prestanka miješanja, će brzina rotacije tekućine blizu dna početi opadati uslijed trenja, i to tim više što su čestice tekućine dalje od centra. Zbog toga će pasti tlak unutar tekućine koji je prije uravnotežio težinu dijela tekućine uzdignutog uz rub šalice i taj dio će se spustiti i potisnuti čestice tekućine uz stijenke šalice, kao što je prikazano na sl. b. Listići čaja će se onda, pod djelovanjem takvog strujanja, skupiti u sredini šalice.

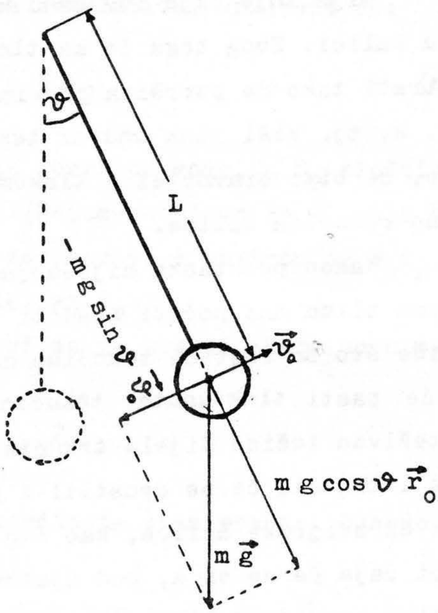
Drugi dio. TOPLINA I MOLEKULARNA FIZIKA

99. $\beta = 0{,}00033$; **1oo.** $\Delta t \approx 420^{\circ}C$;

1ol. Ne! Naprotiv, porast će. **1o2.** $Q = \frac{Mmv_0^2}{2(M+m)}$;

1o3. $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 4{,}187$ J/s ; **1o4.** s = 130 km ;

1o5. Problem se svodi na određivanje koeficijenta linearnog rastezanja materijala od kojeg je načinjeno klatno. Da bismo polučili taj rezultat, prethodno ćemo odrediti period oscilacija klatna (koji ovisi o duljini klatna pa, dakle, i o koeficijentu linearnog rastezanja materijala od kojeg je klatno napravljeno).



Akceleraciji klatna u pojedinim točkama doprinosi samo "tangencijalna komponenta" (v. sl.) sile teže. Prema tome je:

$$ma = -\, mg\sin\vartheta$$

odnosno:

$$a = -\, g\sin\vartheta$$

Odavde je (usp. zadatak 69.) kutna akceleracija klatna:

$$\alpha = \frac{a}{L} = -\frac{g}{L}\sin\vartheta$$

pa, s obzirom na definiciju kutne akceleracije:

$$\alpha = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

dobivamo (diferencijalnu) jednadžbu oscilacija klatna:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\vartheta = 0 \qquad (£)$$

Međutim, za male kutove, kao u našem slučaju,

$$\sin\vartheta \approx \vartheta$$

(s točnošću do 0,1% za $\vartheta \leq 5^\circ$) i prema tome se jednadžba (£) pojednostavnjuje na:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{L}\vartheta = 0$$

Uvrštavanjem se možemo uvjeriti da je rješenje te jednadžbe:

$$\vartheta = \mathrm{const}_1 \sin\sqrt{\frac{g}{L}}\,t + \mathrm{const}_2 \cos\sqrt{\frac{g}{L}}\,t$$

Iz njegovog oblika vidimo da će nakon vremena $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ kut ϑ poprimiti vrijednost jednaku onoj koju je imao u trenutku $t = 0$. Period oscilacija će, dakle, biti:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Vratimo se, sada, na naš problem. Ukoliko sat pokazuje točno vrijeme, a to će biti na nekoj temperaturi t_1 $(0 < t_1 < t_2)$, onda će broj njihaja klatna u toku jednog dana iznositi:

$$N = \frac{24 \cdot 3600}{T_1} = \frac{24 \cdot 3600}{2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}} .$$

gdje su T_1 i L_1 period oscilacija i dužina klatna kod temperature t_1. Taj broj možemo iskoristi da vrijeme koje će sat pokazivati na temperaturi od 0^oC izrazimo kao:

$$\text{"}(24 \cdot 3600 \text{ s} + 8 \text{ s})\text{"} = N \cdot T_o + \tau_1 = N T_1 = 24 \text{ h}$$

gdje je $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{L_o}{g}}$ period oscilacije klatna na temperaturi od 0^oC, a L_o - dužina klatna na njoj. Odavde je broj sekundi za koliko će sat ići naprijed u toku jednog dana kod temperature od 0^oC:

$$\tau_1 = 8 \text{ s} = N(T_1 - T_o) = 24 \cdot 3600 \left(1 - \sqrt{\frac{L_o}{L_1}} \right) \qquad (££)$$

Analogno je vrijeme zaostajanja na temperaturi $t_2 = 25^oC$:

$$\tau_2 = 10 \text{ s} = N(T_2 - T_1) = 24 \cdot 3600 \left(\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} - 1 \right) \qquad (£££)$$

gdje su T_2 i L_2 period oscilacija i dužina klatna na temperaturi $t_2 = 25^oC$.

Ako označimo $24 \cdot 3600 = 1/a$ onda iz (££) i (£££) dobivamo jednadžbe:

$$\sqrt{\frac{L_o}{L_1}} = 1 - \tau_1 a \quad ; \quad \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = 1 - \tau_2 a$$

Podijelivši drugu jednadžbu prvom, polučujemo, nakon kvadriranja:

$$\frac{L_2}{L_o} = \left[\frac{1 + \tau_2 a}{1 - \tau_1 a}\right]^2$$

Iz ovog izraza, budući da je:

$$L_2 = L_o(1 + \alpha t_2)$$

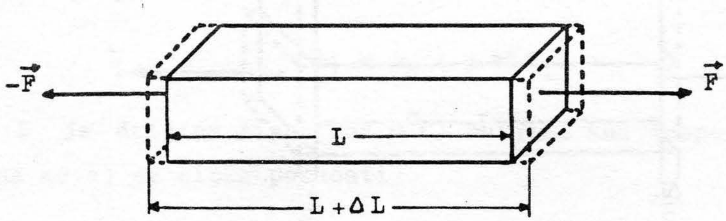
dobivamo traženi koeficijent linearnog rastezanja:

$$\alpha = \frac{1}{t_2}\left[\frac{1 + \tau_2 a}{1 - \tau_1 a}\right]^2 - \frac{1}{t_2} = \frac{a}{t_2}\,\frac{(\tau_1+\tau_2)(\tau_2 a-\tau_1 a+2)}{(1-\tau_2 a)^2} =$$

$$= \frac{18\cdot 172802}{25\cdot 86392^2} = 16{,}6\cdot 10^{-5}\ K^{-1}$$

U tablici koeficijenata linearnog rastezanja za pojedine materijale ćemo naći da ta vrijednost pripada bakru. Dakle, klatno je načinjeno (ako isključimo legure) od bakra.

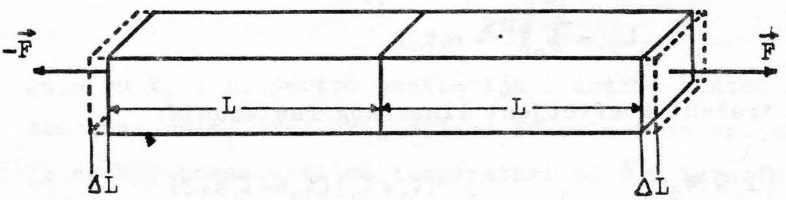
lo6. Hladeći se, šipka se nastoji skupiti, ali joj to onemogućuje njena učvršćenost na krajevima. U efektu imamo jednaku situaciju kao u slučaju kad neka sila F nastoji istegnuti šipku za dužinu ΔL:



Ako je materijal homogen, tada najgrublje vrijedi:

$$F \sim \Delta L \qquad (\pounds)$$

No, djelujući na dvije sastavljene šipke sila će svaku od njih rastegnuti za ΔL:



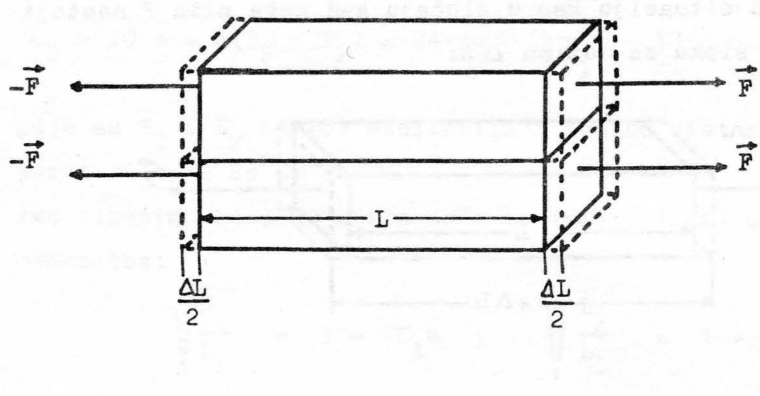
i prema tome bi trebalo biti:

$$F \sim 2\Delta L$$

Budući da sila ne može ovisiti o dužini šipke, proporcionalnost (£) moramo korigirati na:

$$F \sim \frac{2\Delta L}{2L} = \frac{n\Delta L}{nL} = \frac{\Delta L}{L}$$

S druge strane, za dvostruku površinu presjeka, je objektivno potrebna dvostruka sila za jednaki efekt:



To ćemo uzeti u obzir pomoću:

$$F \sim S \frac{\Delta L}{L}$$

gdje je S ploština presjeka šipke. Konstanta proporcionalnosti, E,:

$$F = E\,S\,\frac{\Delta L}{L} \qquad (££)$$

se naziva Youngov modul elastičnosti, a jednadžba (££) koja se obično piše u obliku:

$$\frac{F}{E\,S} = \frac{\Delta L}{L}$$

je tzv. Hookeov zakon. U njemu je $\frac{F}{S}$ sila na jedinicu površine (naprezanje). Da bi došlo do pucanja šipke, nužno mora biti:

$$\frac{F}{S} \geqslant \sigma$$

Uvrštavanjem graničnog slučaja (znak jednakosti) u Hookeov zakon dobivamo:

$$\frac{\Delta L}{L_1} = \frac{\sigma}{E}$$

Duljina šipke kod $t_1 = 150^\circ C$:

$$L_1 = L_o(1 + \alpha t_1)$$

(L_o je duljina šipke kod $0^\circ C$). Duljina kod temperature t na kojoj će šipka popucati:

$$L = L_o(1 + \alpha t)$$

Odavde je:

$$\Delta L = L_1 - L$$

odnosno:

$$\frac{\Delta L}{L_1} = 1 - \frac{L}{L_1} = 1 - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1} = \frac{\alpha (t_1 - t)}{1 + \alpha t_1} = \frac{\sigma}{E}$$

Prema tome će temperatura, na kojoj će šipka popucati, iznositi:

$$t = (1 - \frac{\sigma}{E})t_1 - \frac{\sigma}{\alpha E} = -3{,}5^{\circ}C$$

1o7. Neka je volumen rezervoara na temperaturi $0^{\circ}C$: V_o. Tada je volumen rezervoara, kod temperature t_1, jednak:

$$V_1 = V_o(1 + \beta_1 t_1)$$

dok je volumen kod t_2:

$$V_2 = V_o(1 + \beta_1 t_2)$$

gdje je β_1 koeficijent volumnog rastezanja rezervoara. Mase tekućine koje zapremaju spomenute volumene se mogu izraziti kao:

$$m_1 = \rho_1 V_1 \quad ; \quad m_2 = \rho_2 V_2$$

Budući da za tekućine, kod promjene temperature s obzirom na $0^{\circ}C$, općenito vrijedi:

$$\rho = \frac{\rho_o}{1 + \beta_2 t}$$

gdje je β_2 volumni koeficijent širenja tekućine, to će gustoće na pojedinim temperaturama biti:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1+\beta_2 t_1} \quad ; \quad \rho_2 = \frac{\rho_0}{1+\beta_2 t_2}$$

odakle dobivamo vrijednosti za mase:

$$m_1 = \frac{\rho_0}{1+\beta_2 t_1} V_0 (1+\beta_1 t_1) \quad ; \quad m_2 = \frac{\rho_0}{1+\beta_2 t_1} V_0 (1+\beta_2 t_2)$$

čiji je omjer:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(1+\beta_1 t_1)(1+\beta_2 t_2)}{(1+\beta_1 t_2)(1+\beta_2 t_1)} \approx \frac{1+\beta_1 t_1+\beta_2 t_2}{1+\beta_2 t_1+\beta_1 t_2} \qquad (£)$$

gdje smo zanemarili umnoške $\beta_1 \beta_2 t_1 t_2$ kao male naspram ostalih članova.

Iz jednadžbe (£) možemo dobiti β_1, a budući da se koeficijent volumnog rastezanja β odnosi prema koeficijentu linearnog rastezanja α kao:

$$\beta = 3\alpha \qquad (££)$$

traženi koeficijent linearnog rastezanja će biti:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} \frac{(m_1 - m_2) + \beta_2 (m_1 t_1 - m_2 t_2)}{m_2 t_1 - m_1 t_2}$$

(Primjedba: Ilustrirajmo relaciju (££) jednostavnim primjerom: kockom. S jedne strane je:

$$V = V_0 (1+\beta t) = L_0^3 (1+\beta t)$$

gdje je L_0 duljina brida kocke kod temperature od 0^oC, a s druge strane (ako zanemarimo članove koji sadrže α^2 i α^3 naspram ostalih) vrijedi:

$$V = L^3 = L_o^3 (1 + \alpha t)^3 \approx L_o(1 + 3\alpha t)$$

Izjednačavanjem dvaju izraza za volumen dobivamo (££).)

lo8. Poslije apsolutno neelastičnog sudara se oba tijela gibaju brzinom u, pa je prema zakonu o sačuvanju količine gibanja:

$$(m_1 + m_2)u = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Prije udara je kinetička energija:

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

a poslije:

$$E' = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Prema tome je energija utrošena na zagrijavanje tijela u neelastičnom sudaru:

$$\Delta E = E - E' = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}$$

S druge strane, ako tijela s masama $m_1, m_2, .., m_n$ i specifičnim toplinskim kapacitetima $c_1, c_2, .., c_n$, koja se nalaze na temperaturama $t_1, t_2, .., t_n$, predaju toplinu tijelu mase m i specifičnog toplinskog kapaciteta c, koje se nalazilo na temperaturi t (ili obratno), onda nakon postizanja toplinske ravnoteže vrijedi jednakost:

$$mc(t-T) = m_1c_1(T-t_1) + m_2c_2(T-t_2) + \dots + m_nc_n(T+t_n)$$

gdje je T ravnotežna temperatura svih tijela.

U našem slučaju je toplina željeza + metka:

$$Q = (m_1+m_2)c(t-T)$$

jednaka razlici među njihovim kinetičkim energijama prije i poslije sudara:

$$E = \frac{m_1m_2v_1^2}{2(m_1+m_2)} = Q = m_1c_1(T-t_1) + m_2c_2(T-t_2)$$

odakle je tražena temperatura:

$$T = \frac{m_1m_2v_1^2 + 2(m_1c_1t_1 + m_2c_2t_2)(m_1+m_2)}{2(m_1c_1+m_2c_2)(m_1+m_2)}$$

1o9. Kod prenošenja topline vođenjem (kondukcijom) bit će struja topline (količina topline u jedinici vremena, tj. brzina prolaza topline kroz štap) dana relacijom:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = kS\,\frac{T_1 - T_2}{d}$$

gdje je k koeficijent toplinske vodljivosti, S - ploština presjeka štapa, d - duljina štapa i T_1, T_2 - temperature na krajevima štapa. Uvrštavajući zadane vrijednosti dobivamo:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 1\ \text{cal/s} = 4{,}187\ \text{J/s}$$

(koeficijent 4,187 se naziva "mehanički ekvivalent topline").

Toplina predana ledu tokom jednog sata je:

$$Q = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\, t = 1\cdot 3600 \text{ cal} = 3{,}6 \text{ kcal} = 15073{,}2 \text{ J}$$

Masu otopljenog leda dobivamo iz izraza:

$$Q = \lambda m$$

gdje je Q toplina utrošena na taljenje leda mase m, a λ - latentna toplina taljenja leda. Masa je, dakle,

$$m = \frac{\Delta Q}{\lambda} = \frac{3{,}6}{79{,}7} \text{ kg} = 45{,}2 \text{ g}$$

llo. Količina topline potrebna da se olovo mase m zagrije do temperature taljenja t' i da se ta masa prevede u tekuće stanje je:

$$Q_1 = mc(t' - t_o) + \lambda m$$

gdje je c specifični toplinski kapacitet olova, a λ latentna toplina taljenja olova (v. prethodni zadatak).

S druge strane je količina topline polučena izgaranjem nafte:

$$Q_2 = \eta m_1 q$$

gdje je η koeficijent efikasnosti izgaranja, a q specifična toplina izgaranja nafte.

Iz jednadžbe toplinske ravnoteže (v. prethodni zadatak): $Q_1 = Q_2$, dobivamo:

$$m = \frac{\eta m_1 q}{c(t'-t_o)+\lambda} = 556 \text{ kg}$$

111. $p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2} = 4{,}5 \cdot 10^4$ Pa ; **112.** $F = \frac{1}{4}\sqrt{h^2+20h+120} - \frac{h}{4} + \frac{53}{20}$

113. L = 764 mm ; **114.** $t = -\ 73{,}15^{o}C$;

115. $V_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^3$; $\rho_1 = 4{,}14\ kg/m^3$; $T_2 = 897^{o}C$;

$\rho_2 = 1\ kg/m^3$; **116.** $p = 1{,}4 \cdot 10^5$ Pa

117. Zadatak referira na to da se na Zemlji sva tijela nalaze u zračnom omotaču, koji im daje određeni uzgon u ovisnosti o njihovom volumenu.

Po Arhimedovom zakonu (v. zadatak 94. i 182.) je uzgon tijela uronjenog u fluid (u našem slučaju - plin) jednak težini tog fluida u volumenu koji zauzima tijelo. Volumen mase M olova je:

$$V_1 = \frac{M}{\rho_1}$$

gdje je $\rho_1 = 11343\ kg/m^3$ gustoća olova. Da bismo odredili masu zraka u tom volumenu upotrijebit ćemo jednadžbu stanja idealnog plina (još nazivanu plinskom jednadžbom ili, naročito u ruskoj literaturi, Clapeyron-Mendeljejevljevom jednadžbom) koja glasi:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

gdje je p tlak plina, V - volumen plina, T - apsolutna temperatura plina (temperatura izražena u stupnjevima Kelvina: $X\ K = X^{o}C + 273{,}16^{o}$), m - masa plina, μ - masa jednog kilomola plina, tj. molekularna masa izražena u kg/kmol (dakle $\frac{m}{\mu} = n$ je ujedno i broj kilomolova plina) i $R = 8310\ J/(kmol \cdot K)$ - univerzalna plinska konstanta.

Prema plinskoj jednadžbi, težina zraka u volumenu koji zaprema 1 kg olova, na sobnoj temperaturi od $20^oC \approx 293$ K, pri atmosferskom tlaku od 760 mm Hg $\approx 10^5$ Pa, a uzevši da je $\mu \approx 30$ kg/kmol, jednaka je:

$$m_1 g = \frac{\mu p V_1 g}{RT} = \frac{\mu p M g}{\rho_1 RT}$$

Zrak u volumenu koji zaprema 1 kg perja, čija je gustoća $\rho_2 \approx 200$ kg/m^2, teži:

$$m_2 g = \frac{\mu p M g}{\rho_2 RT}$$

Mjerena težina olova će, dakle, biti jednaka težini koju bi masa olova imala u vakuumu, zahvaljujući sili teži, umanjenoj za iznos Arhimedove sile (uzgona):

$$G_1 = (M - m_1)g$$

Isto tako će mjerena težina perja biti:

$$G_2 = (M - m_2)g$$

Prema tome će 1 kg olova biti teži od 1 kg perja za iznos:

$$G = G_1 - G_2 = (m_2 - m_1)g = \frac{\mu p g M}{RT}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) = 0{,}06 \text{ N}$$

Slikovito bismo mogli, u svakodnevnom govoru, reći da je kilogram perja šest grama lakši od kilograma olova. (Gram je, naime, jedinica za masu, a ne - težinu.)

118. Za rješavanje problema ćemo iskoristiti jednadžbu sta-

nja idealnog plina za izotermne procese, tj. Boyle-Mariotteov zakon za idealni plin konstantne mase na konstantnoj temperaturi, koji glasi:

$$p_1V_1 = p_2V_2 \quad \text{odnosno:} \quad pV = \text{const}$$

(p je tlak plina, a V - volumen koji plin zaprema).

U našem slučaju će nakon prvog radnog takta pumpe vrijediti:

$$p_1(V + v_o) = p_oV$$

gdje je p_1 tlak u spojenom volumenu posude i pumpe. Nakon drugog radnog takta će biti:

$$p_2(V + v_o) = p_1V$$

gdje je p_2 novi, niži (jer je dio zraka pumpom izbačen prethodnim taktom) tlak u spojenom volumenu, kojeg možemo izraziti pomoću početnog tlaka kao:

$$p_2 = \frac{p_1V}{V + v_o} = \frac{p_oV^2}{(V + v_o)^2}$$

Nakon n taktova će tlak u spojenom volumenu biti:

$$p_n = p_o\left[\frac{V}{V + v_o}\right]^n$$

Kod upumpavanja zraka, drugom pumpom, se svakim taktom ubacuje zrak pod atmosferskim tlakom p_o, za razliku od ispumpavanja, kad je tlak svakim taktom bio sve niži.

Možemo, dakle, primijeniti Daltonov zakon koji kaže da je tlak smjese plinova u nekom volumenu jednak sumi (parcijalnih) tlakova koje bi plinovi, odvojeno, svaki za sebe, imali kad bi pojedinačno ispunjavali volumen. Prema tome će svakim taktom klipa pumpe biti, u posudi, ostvaren tlak p', prema jednadžbi:

$$p'V = p_o v_o$$

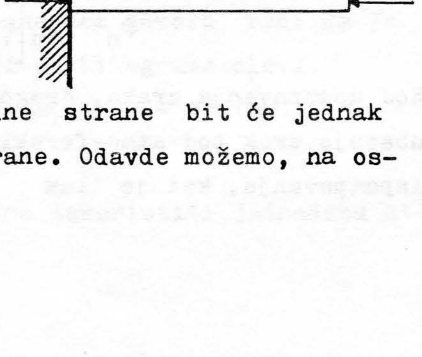
Sveukupno, će se nakon n taktova početni tlak u posudi, p_n, uvećati za:

$$\frac{np_o v_o}{V}$$

Odavde je konačan tlak u posudi jednak:

$$p = p_n + \frac{np_o v_o}{V} = p_o\left[\left(\frac{V}{V + v_o}\right)^n + \frac{nv_o}{V}\right]$$

119. Promotrimo cilindrični volumen plina u direktnom kontaktu sa stijenom posude (v. sl.). Sile koje djeluju na bočne dijelove plašta su međusobno uravnotežene. Budući da je volumen u ravnoteži,



pritisak na plin s lijeve, zidne strane bit će jednak pritisku s desne, plinske strane. Odavde možemo, na osnovu trećeg Newtonovog zakona, zaključiti da je pritisak na jediničnu površinu stijene posude jednak tlaku plina unutar posude.

120. Kad je naprava položena horizontalno, kao na sl. 18, ona ne može poslužiti kao termometar, budući da će pritisak plina na kapljicu žive s lijeva i s desna biti, kod svake temperature, uravnotežen.

Međutim, ako se naprava uspravi, onda će, pod uvjetom da je tlak dovoljno visok da kapljica ne isteče iz cijevi, u donjoj kugli biti tlak, za jednu konstantnu vrijednost, viši nego u gornjoj. Ako, s porastom temperature, volumen kugala ostane isti, onda će prema Charlesovom zakonu:

$$p = p_o(1 + \frac{t}{273}) = p_o \frac{T}{273} \qquad \text{ili} \qquad p_1T_2 = p_2T_1$$

porasti tlak u kuglama. Tada će se, da bi se razlika između tlakova u kuglama održala konstantnom, kapljica žive početi gibati prema gore i naprava može poslužiti kao termometar.

121. Pretpostavit ćemo da se temperatura vode ne mijenja s dubinom i primijeniti Boyle-Mariotteov zakon:

$$p_1V_1 = p_oV_o \qquad (£)$$

gdje je p_1 i V_1 tlak u mjehuriću i volumen mjehurića na traženoj dubini, p_o i V_o - na površini. Tlak p_1 je, na osnovu Bernoullijeve jednadžbe (v. zadatak 96), jednak:

$$p_1 = p_o + \rho gh$$

gdje je ρgh hidrostatski tlak vode na dubini h (ρ = = 1000 kg/m^3 je gustoća vode.

Volumen mjehurića je na površini:

$$V_o = \frac{4}{3}\pi r_o^3$$

a na dubini h:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_o}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}V_o$$

Uvrštavanjem u (£) dobivamo traženu dubinu:

$$h = \frac{7p_o}{\rho g} = \frac{7\cdot 1{,}01\cdot 10^5}{1000\cdot 9{,}81} = 72{,}1 \text{ m}$$

122. Plinske jednadžbe za prvo i drugo stanje plina (v. zadatak 117.) su:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1 \quad ; \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2$$

gdje su m_1 i m_2 mase zraka sadržane u sobi kod apsolutnih temperatura: $T_1 = 17^oC + 273{,}16^o = 290{,}16^oK$ i $T_2 = 27^oC + 273{,}16^o = 300{,}16^oK$. Iz njih slijedi tražena razlika masa:

$$m = m_1 - m_2 = \frac{\mu p_1 V}{RT_1} - \frac{\mu p_2 V}{RT_2} = \frac{\mu V}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) = 0{,}384 \text{ kg}$$

123. $N = 7{,}2 \cdot 10^{22}$; 124. $N = 1{,}2 \cdot 10^{19}$

125. $E_k = 3$ J ;

126. $m_{H_4} \approx 6{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_C \approx 2 \cdot 10^{-26}$ kg ;

127. $f = 9{,}05 \cdot 10^9\ s^{-1}$;

128. $T_C = -128^oC$; $T_D = 17^oC$; $p_C = 0{,}25$ atm; W_{12} ;

13o. $\Delta U = 3{,}29 \cdot 10^6$ J ;

131. $W_{12} = 4{,}05 \cdot 10^5$ J ; $Q = 3{,}69 \cdot 10^6$ J ;

132. Kad se komprimira adijabatski, *za jednoatomne molekule, a obratno, za dvo- i više-atomne molekule.*

133. Kad bi privlačne sile među molekulama vode odjednom iščezle voda bi se pretvorila u idealan plin, čiji tlak možemo odrediti pomoću plinske jednadžbe (v. zadatak 117) kao:

$$p = \frac{M}{\mu} \frac{RT}{V}$$

Uvrštavanjem numeričkih vrijednosti (v. zadatak 117; $\mu_{H_2O} = \mu_{H_2} + \mu_O = (2+16)$ kg/kmol $= 18$ kg/kmol; $T = 290^oK$) dobivamo:

$$p = \frac{1}{18} \frac{8310 \cdot 290}{0{,}001} \text{ Pa} = 1{,}34 \cdot 10^8 \text{ Pa} (= 1330 \text{ atm}) .$$

134. Tlak plina je, molekularno gledano, tlak ukupnog termičkog gibanja molekula plina umanjen za iznos privlačnog djelovanja među molekulama. Djelovanje među samim molekulama plina je, međutim, drugačije prirode nego djelovanje između molekula plina, s jedne strane, i molekula stijenke posude, s druge. Zbog toga će tlak plina u sredini posude i tlak uz stijenke posude moći biti jednaki (što mora biti zadovoljeno - kao što smo vidjeli u zadatku 119 - za svaki plin) samo ako koncentracija molekula plina u sredini posude ne bude jednaka koncentraciji molekula pina uz stijenke posude.

135. Pod normalnim uvjetima se podrazumijeva tlak od 760 mm Hg = $1.01 \cdot 10^5$ Pa i temperatura od $17^oC = 290^oK$, pa je, prema plinskoj jednadžbi (v. zadatak 117), volumen koji zauzima 1 kmol plina jednak:

$$V_o = \frac{M}{\mu}\frac{RT_o}{p_o} = n\frac{RT_o}{p_o} = 1\,\frac{8310 \cdot 290}{101000} = 24\ m^3$$

gdje je n broj kilomolova koje sadrži promatrana masa plina.

Volumen elementarne kocke koja otpada na jednu molekulu dobivamo kao omjer volumena plina, V_o, i broja molekula sadržanih u jednom kilomolu plina. Taj je broj za sve tvari jednak. On se naziva Avogadrovim brojem, N_A, i iznosi:

$$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kmol}^{-1}$$

Volumen kocke je, dakle : $V = \dfrac{V_o}{N_A}$

Duljina brida te kocke:

$$L = \sqrt[3]{\frac{V_o}{N_A}} = 3,4 \cdot 10^{-9}\ \text{m}$$

je približno jednaka srednjoj udaljenosti među središtima molekula.

136. Da bismo riješili problem, moramo povezati osnovne veličine koje određuju stanje idealnog plina, tj. tlak, volumen i temperaturu (v. zadatak 117), s osnovnom kinetičkom veličinom: srednjom kinetičkom energijom molekula.

Tlak plina u nekoj zatvorenoj posudi potječe od udaraca molekula o zidove posude. Promatrajmo kubičnu posudu, brida L. Neka svaki jedinični volumen u njoj sadrži n_o identičnih molekula plina. Budući da se molekule gibaju, svaka od njih posjeduje neku količinu gibanja $m\vec{v}$. Promatrajmo najprije samo one molekule koje se gibaju u smjerovima okomitim na stijenke posude. Prilikom elastičnog udara o stijenku posude, količina gibanja molekule će se promijeniti od $m\vec{v}$ na $-m\vec{v}$, tj. za iznos 2mv. Po zakonu o sačuvanju količine gibanja će stijenka posude dobiti količinu gibanja jednaka iznosa, tj. 2mv. Odavde je, prema II Newtonovom zakonu, prosječna sila kojom 1 molekula djeluje na stijenku posude određena kao slijedeća brzina promjene količine gibanja:

$$F_1 = \left| \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} \right| = \frac{2mv}{\Delta t}$$

gdje Δt označuje vrijeme koje je potrebno molekuli da pređe put od jednog zida posude do drugog i natrag - to je, naime, vrijeme koje protekne između dva sukcesivna udarca molekule o zid. Njegova je vrijednost, dakle :

$$\Delta t = \frac{2L}{v}$$

odakle je prosječna sila jedne molekule na stijenke:

$$F_1 = \frac{mv^2}{L}$$

Sila pritiska plina na stijenke posude će biti jednaka sumi sila pojedinih molekula:

$$F_N = \sum_{i=1}^{N} F_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{mv_i^2}{L} = \frac{m}{L} \left(\sum_{i=1}^{N} v_i^2 \right) = \frac{m}{L} v_{ef}^2 N$$

gdje je N ukupan broj molekula, a v_{ef} - srednja kvadratna brzina (ili efektivna brzina) molekula:

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i^2}$$

Molekule se u plinu gibaju apsolutno kaotično, tako da su svi smjerovi gibanja jednako vjerojatni za svaku od njih. Možemo, dakle, pretpostaviti da je broj molekula koje se gibaju između zidova pod pravim kutom, s obzirom na njih, jednak 1/3 ukupnog broja molekula, tj. da je:

$$N = \frac{n_o L^3}{3}$$

gdje je n_o broj molukula u jedinici volumena.

Odavde je prosječna ukupna sila kojom molekule djeluju na jedinicu površine stijenke posude, tj. tlak plina, jednaka:

$$p = \frac{\bar{F}}{S} = \frac{\frac{m}{L} v_{ef}^2 N}{L^2} = \frac{m v_{ef}^2 n_o}{3} = \frac{2}{3} n_o \frac{m v_{ef}^2}{2}$$

Posljednji član prepoznajemo kao srednju kinetičku energiju molekula:

$$p = \frac{2}{3} n_o \bar{E}_k \qquad (\pounds)$$

Dobiveni izraz se naziva osnovnom jednadžbom kinetičke teorije plinova.

Da bismo povezali kinetičku energiju s temperaturom iskoristit ćemo Charlesov zakon (v. zadatak 12o.):

$$p = \text{const} \cdot T$$

Odavde i iz (£):

$$\bar{E}_k = \text{const}' \cdot T$$

gdje se const′ obično izražava pomoću Boltzmannove konstante,

$$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

gdje je R plinska konstanta (v. zadatak 117), a N_A Avogadrov broj (v. pretodni zadatak), tako da je:

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT$$

a također i:

$$p = \frac{2}{3} n_o \bar{E}_k = n_o kT$$

Iz posljednje jednadžbe možemo izraziti broj molekula u jedinici volumena kao:

$$n_o = \frac{pk}{T}$$

U našem slučaju je, prema tome, broj molekula u zadanom volumenu V jednak:

$$N = n_o V = \frac{pV}{kT} = 5,12 \cdot 10^{25}$$

Srednja kinetička energija molekula je:

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT = 6,21 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

137. U prethodnom zadatku smo našli da je srednja kvadratna brzina (efektivna brzina) povezana s temperaturom na slijedeći način:

$$\frac{mv_{ef}^2}{2} = \bar{E}_k = \frac{3}{2} kT$$

gdje je m masa molekule, a $k = R/N_A$ - Boltzmannova konstanta (v. prethodni zadatak), odakle se srednja kvadratna brzina može izraziti kao:

$$v_{ef} = \sqrt{3 \frac{R}{N_A m} T}$$

No, masa jedne molekule m puta broj molekula u jednom kilomolu plina N_A nije ništa drugo nego masa jednog kilomola plina, tj. molekularna masa izražena u kilogramima μ

(v. zadatak 117). Prema tome je:

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

S druge strane, iz plinske jednadžbe (v. zadatak 117) slijedi:

$$\frac{RT}{\mu} = \frac{pV}{M} = \frac{p}{\rho}$$

Kombinacijom posljednje dvije jednadžbe dobivamo:

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

pa je tražena gustoća jednaka:

$$\rho = \frac{3p}{v_{ef}^2} = 1{,}03\ kg/m^3$$

138. Srednji slobodni put molekula u plinu je dan izrazom:

$$L = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\, n_o d^2}$$

gdje je d efektivni (srednji) promjer molekula, a $n_o = \frac{p}{kT}$ - broj molekula u jedinici volumena (v. zadatak 136, posljednju formulu), odakle (s obzirom na definiciju "normalnih uvjeta", danu na početku zadatka 135) dobivamo:

$$L = \frac{kT}{\pi\sqrt{2}\, d^2 p} = 9{,}1\cdot10^{-8}\ m$$

139. Kao što se vidi iz sl. 21 u tekstu, procesi 2-3 i 4-1 predstavljaju izohorne procese (procese kod konstatnog volumena) i leže na na pravcima $V = const_{23}$ i $V = const_{41}$, dok procesi 1-2 i 3-4 predstavljaju izobarne procese (procese kod kostantnog tlaka) i leže na pravcima $p = const_{12}$ i $p = const_{34}$.

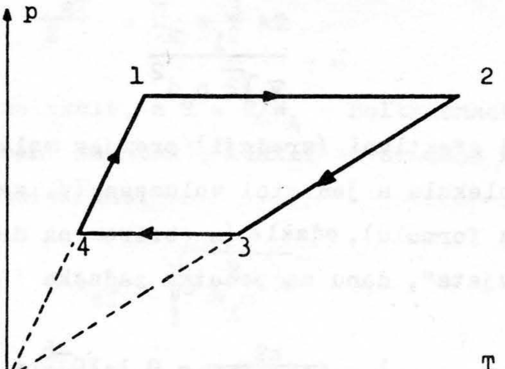
a) pT Iz plinske jednadžbe (v. zadatak 117):

$$pV = \frac{M}{\mu} RT$$

slijedi da za izohorne procese vrijedi:

$$p = const \cdot T$$

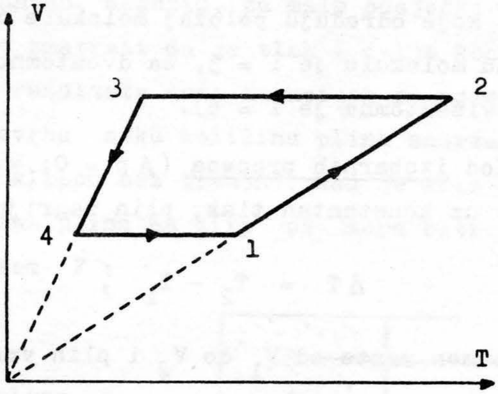
Dakle, procesi 2-3 i 4-1 leže na pravcima koji prolaze kroz ishodište, dok procesi 1-2 i 3-4 ostaju na pravcima $p = const_{12}$ i $p = const_{34}$. Dakle, proces će u koordinatama pT biti prikaziv na slijedeći način:



b) VT Iz plinske jednadžbe vidimo, također, da i za izobarne procese vrijedi jednaka funkcionalna ovisnost:

$$V = const' \cdot T$$

Dakle, u VT koordinatnom sistemu, procesi 1-2 i 3-4 leže na pravcima koji prolaze kroz ishodište, dok procesi 2-3 i 4-1 ostaju na pravcima $V = const_{23}$ i $V = const_{41}$. Naravno, posljednja dva pravca neće više biti paralelna s ordinatom, već s apcisom, jer je u VT sistemu os OV ordinata, dok je u PV sistemu bila apcisa. Ukupan proces je, prema tome, prikaziv kao:



14o. U rješavanju ovog zadatka polazimo od prvog zakona termodinamike koji glasi:

toplina dovedena sistemu	=	rad koji vrši sistem	+	promjena unutrašnje energije sistema

$$\Delta Q = W + \Delta U \qquad (1)$$

Pri tome se ΔU, u slučaju idealnog plina, definira kao:

(1a) $$\Delta U = c_V M \Delta T = \frac{M}{\mu} C_V \Delta T = \frac{i}{2}\frac{M}{\mu} R \Delta T$$

gdje je c_V specifična toplina kod konstantnog volumena, tj. količina topline potrebna za zagrijavanje 1 kg plina za 1^oK, kod konstantnog volumena; $C_V = iR/2$ je specifična molna toplina, kod konstantnog volumena, tj. količina topline potrebna za zagrijavanje 1 kmol plina za 1^oK, kod konstantnog volumena; M je masa plina; μ je masa 1 kmol-a plina, tj. molekularna masa izražena u kg/kmol; $R = 8310$ J/(kmol·K) je plinska konstanta (v. zadatak 117); i je broj stupnjeva slobode molekula, tj. broj nezavisnih koordinata koje određuju položaj molekule u prostoru (za jednoatomnu molekulu je $i = 3$, za dvoatomnu je $i = 5$, a za tro- i višeatomnu je $i = 6$).

Kod izobarnih procesa ($\Delta p = 0$; v. prethodni zadatak) se, uz konstantan tlak, plin zagrijava za

$$\Delta T = T_2 - T_1 ,$$

njegov volumen raste od V_1 do V_2 i plin vrši rad*:

$$W = p(V_2 - V_1) = p\Delta V = \frac{M}{\mu} R \Delta T \qquad (2)$$

U procesu izobarne ekspanzije, toplina dovedena plinu, je, prema gore navedenom prvom zakonu termodinamike i izrazu za promjenu unutrašnje energije plina, jednaka:

$$\Delta Q = W + \Delta U = \frac{M}{\mu}\frac{i+2}{2} R \Delta T \qquad (3)$$

---

* Sjetite se da je rad djelovanje sile na određenom putu, a da je tlak sila na jedinicu površine, tako da je $[pV] = [Fs] = [W]$

14o.

Kod izotermnih procesa ($\Delta T = 0$; v. prethodni zadatak) se sva toplina, koju apsorbira plin, iskorištava za vršenje rada, budući da je u tom slučaju:

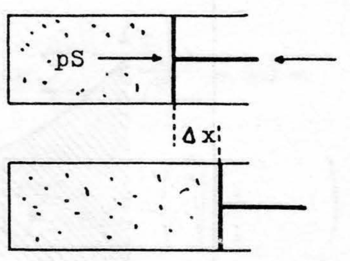
$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{M}{\mu} R 0 = 0 \qquad (4)$$

Jednadžba prvog zakona termodinamike će, prema tome, glasiti:

$$\Delta Q = W \qquad (5)$$

Rad u slučaju izotermnih procesa neće biti jednak onom koji smo dobili u slučaju izobarnih procesa, jer tlak sada više nije konstantan. Međutim, za male odsječke unutar pV dijagrama, možemo smatrati da je tlak i dalje konstantan, tako da ćemo do razultata doći sumacijom po njima. Promatrajmo u tu svrhu neku količinu plina sadržanu u idealnom cilindru (s klipom bez trenja). Kad je klip u ravnoteži tada pritisak plina na klip pS mora biti uravnotežen vanjskom silom F :

$$F = pS$$

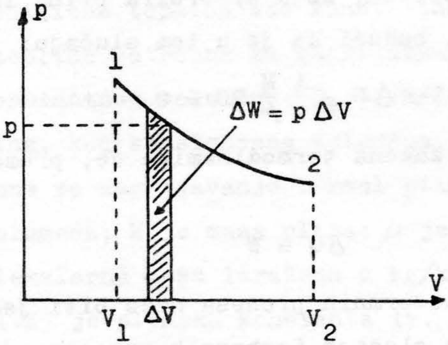


gdje je p tlak plina, a S površina klipa. Ako se sada klip pomakne prema van za Δx, koji je toliko malen da tlak ostaje približno jednak onom prije pomaka, onda je rad, koji je plin izvršio protiv vanjske sile F, jednak $F\Delta x$. Odavde je:

$$F\Delta x = pS\Delta x = p\Delta V = \Delta W$$

gdje je ΔV promjena (povećanje) volumena plina.

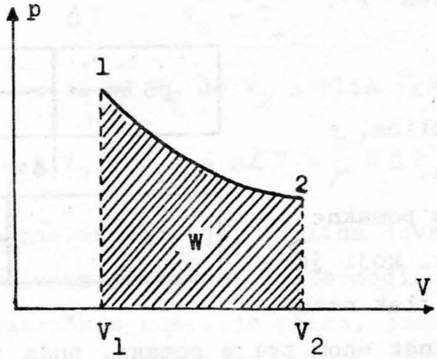
U pV dijagramu će dobiveni rad biti prikazan osjenčenim stupcem:



Ukupan rad koji izvrši plin izotermnom ekspanzijom je:

$$W = \sum_{V_1}^{V_2} \Delta W = \sum_{V_1}^{V_2} p\Delta V$$

što je prikazivo kao:



Da bismo izračunali sumu koja definira rad, tj. osjenčenu površinu na prethodnom dijagramu, podijelit ćemo segment $[V_1, V_2]$ na n dijelova i označiti:

$V_1 = V_o < \ldots < V_i < \ldots < V_{n-1} < V_n = V_2 ; \quad \Delta V_i = V_{i+1} - V_i$

Pri tome ćemo V_i $(i=o,1,\ldots,n)$ tako odabrati da bude:

$$V_i = V_1 \left[\sqrt[n]{\frac{V_2}{V_1}} \right]^i$$

Vidimo da je $V_{i=o} = V_1$, a $V_{i=n} = V_2$.

Sada možemo, određujući tlak prema plinskoj jednadžbi (v. zadatak 117):

$$p = \frac{M}{\mu} \frac{RT}{V}$$

napisati ukupan rad (uzimajući u obzir da je $T = \text{const}$) kao (v. zadatak 166.a):

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=o}^{n-1} p(V_i)\Delta V_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=o}^{n-1} \frac{M}{\mu} \frac{RT}{V_i} \Delta V_i =$$

$$= \frac{M}{\mu} RT \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta V_i}{V_i} = \frac{MRT}{\mu} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=o}^{n-1} \left(\frac{V_{i+1}}{V_i} - 1 \right) =$$

$$= \frac{MRT}{\mu} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=o}^{n-1} \left(\sqrt[n]{\frac{V_2}{V_1}} - 1 \right) = \frac{MRT}{\mu} \lim_{n\to\infty} n \left(\sqrt[n]{\frac{V_2}{V_1}} - 1 \right)$$

$$= \frac{MRT}{\mu} \lim_{m\to o} \frac{(V_2/V_1)^m - 1}{m} = \text{(prim. L'Hospitalovog pravila)} =$$

$$= \frac{MRT}{\mu} \lim_{m\to o} \frac{\left[(V_2/V_1)^m - 1\right]'}{m'} = \frac{MRT}{\mu} \lim_{m\to o} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^m \ln \frac{V_2}{V_1} = \boxed{\frac{MRT}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}} \quad (6)$$

Kod izohornih procesa ($\Delta V = 0$; v. prethodni zadatak) se cjelokupna toplina koju apsorbira plin troši na promjenu unutrašnje energije plina:

$$\Delta Q = \Delta U \tag{7}$$

Naime, budući da je $\Delta V = 0$, ne postoji "put" (u smislu gornjeg primjera kod izotermnih procesa) na kojem bi sila mogla izvršiti određeni rad, odakle je:

$$W = 0 \tag{8}$$

Količina topline koju daje ili upija plin se može, dakle, kod izohornih procesa, odrediti prema formuli:

$$\Delta Q = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R \Delta T = \frac{M}{\mu} C_V \Delta T \tag{9}$$

koja se, jednako kao i formula (7), dobiva direktno iz prvog zakona termodinamike, tj. jednadžbi (1) i (1a) uz uvjet (8).

U našem slučaju, iz slike 22 vidimo da odrezak 1-2, prema prethodnom zadatku, predstavlja izobaru. Zbog toga će, na osnovu izraza (2) i (3), slijediti da tim procesom (budući da se radi o povećanju volumena) plin upija toplinu. U pV dijagramu će proces 1-2 biti prikazan odreskom paralelnim s apcisom, što je bilo obrazloženo u prethodnom zadatku.

Proces 2-3 predstavlja izohoru. Tlak plina će padati pri konstantnom volumenu i uz smanjenje temperature, pa će prema formuli (9), plin odavati toplinu.

140.

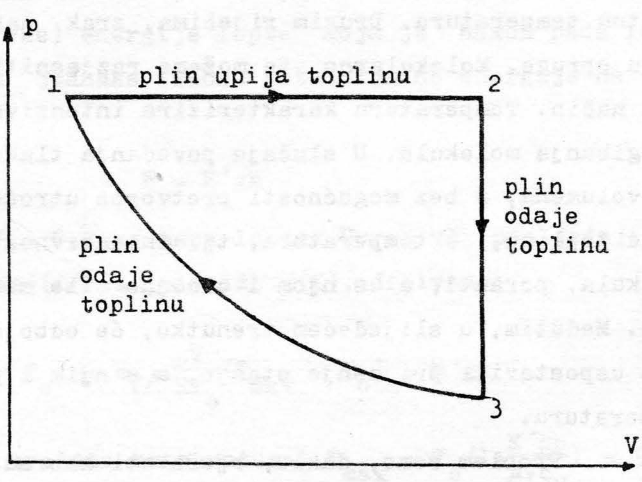
Prema prethodnom zadatku, će 2-3 kao izohorni proces u pV koordinatnom prikazu ležati na pravcu paralelnom s ordinatom.

Proces 3-1 je izoterman, pa plin zaprema sve manji volumen kod konstantne temperature, dok mu tlak raste. Budući da proces počinje kod volumena V_3 koji je veći od V_1, to će u jednadžbi (6) V_3 igrati ulogu veličine V_1, a V_1 veličine V_2, tako da će rad W biti negativan. To znači da se situacija može ostvariti samo ako se nad plinom izvrši rad, odnosno, prema jednadžbi (5), samo ako plin odaje toplinu. Odrezak 3-1 će, prema plinskoj jednadžbi, u pV sistemu biti reprezentiran jednadžbom:

$$pV = const$$

tj. hiperbolom.

Ukupan proces možemo, dakle, u pV koordinatama prikazati kao:



141. U problemu treba prvo razjasniti kako je moguće pretpostaviti da lopta odskače na istu visinu s koje je i pala i istovremeno tražiti porast temperature zraka u njoj. Da li to znači da je nešto bitnije zanemareno? Ne! Zanemarena jeste pretvorba mehaničke energije u toplinsku uslijed deformacije materijala lopte i tla, ali je taj iznos neznatan. Pa nije li onda spomenuti zakon u kontradikciji sa zakonom o sačuvanju energije? Ne! Naime, lopta je prekratko vrijeme u dodiru s tlom da bi bio moguć prijelaz toplinske energije s nje u tlo, tj. proces je, zapravo, adijabatski, odnosno, takav u kojem sistem niti upija niti odaje toplinu:

$$\Delta Q = 0$$

A povećanje temperature u trenutku udara lopte o tlo nije trajan, već trenutačan proces koji nastaje uslijed trenutačne kompresije zraka u lopti, jer se, već u slijedećem trenutku, zrak u lopti adijabatski širi, hladi i vraća na početnu temperaturu. Drugim riječima, zrak naprosto igra ulogu opruge. Molekularno to možemo razjasniti na slijedeći način. Temperaturu karakterizira intenzivnost toplinskog gibanja molekula. U slučaju povećanja tlaka i smanjenja volumena, a bez mogućnosti pretvorbe utrošenog rada u odanu toplinu, će temperatura, tj. intenzivnost gibanja molekula, porasti, a s njom i odbojne sile među molekulama. Međutim, u slijedećem trenutku, će odbojne sile ponovo uspostaviti prijašnje stanje, a s njim i prijašnju temperaturu.

Problem ćemo, dakle, rješavati kao adijabatski proces, odakle je, prema I zakonu termodinamike (jednadžba (1) iz prethodnog zadatka):

$$\Delta Q = 0 = -W + \Delta U \implies W = \Delta U \qquad (£)$$

gdje je W rad izvršen nad plinom u trenutku kompresije. Formulom (1a) iz prethodnog zadatka, je dana promjena unutrašnje energije (koja ne ovisi o vrsti procesa) kao:

$$\Delta U = c_V M \Delta T = c_V M (T_{max} - T_o) \qquad (££)$$

gdje je $T_o = 300^oK$ početna temperatura zraka, a M njegova masa koja prema plinskoj jednadžbi (v. zadatak 117) iznosi:

$$M = \mu \frac{pV}{RT}$$

gdje je $\mu = 29$ kg/kmol (v. tekst zadatka 122).

Rad nad zrakom u lopti se vrši na račun mehaničke (kinetičke) energije lopte koja je nakon pada lopte s visine h jednaka iznosu potencijalne energije na toj visini:

$$W = M'gh$$

gdje je $M' = 0.2$ kg masa lopte. Uvrstivši posljednji izraz i izraz (££) u jednadžbu (£), dobivamo:

$$c_V M (T_{max} - T_o) = c_V \mu \frac{pV}{RT_o}(T_{max} - T_o) = M'gh$$

odakle je tražena temperatura: $T_{max} = T_o\left(1 + \frac{M'gh}{\mu V c_V}\right) = 99{,}5^oC.$

142. S morske strane Kordiljera možemo parametre neke mase M zraka označiti kao što slijedi: V_1 neka je volumen koji ta masa zraka zauzima, $p_1 \approx 10^5$ Pa - ukupan normalan tlak, $p_p = \varphi p_{H_2O} \approx 1{,}8\cdot 10^3$ Pa - parcijalni tlak vodenih para, i $T_1 = 25^oC$ - temperatura zraka.

S pustinjske strane Kordiljera neka je: V_2 - - volumen one iste mase (ako zanemarimo masu kondenzirane vodene pare koja se izdvojila u vidu oborina s morske strane planine), p_2 - tlak tog zraka i T_2 - njegova temperatura.

Toplina koju je odao sistem prilikom kondenzacije vodenih para je, prema jednadžbi (1) iz zadatka 14o:

$$\Delta Q = W + \Delta U \qquad (1)$$

Promjena unutrašnje energije, prema jednadžbi (1a) iz istog zadatka, iznosi:

$$U = \frac{i}{2}\frac{M}{\mu} R\Delta T = \frac{5}{2}\frac{M}{29} R(T_2 - T_1) \qquad (2)$$

jer je zrak sastavljen uglavnom od molekula dušika i kisika, pa je i = 5, a μ = 29 kg/kmol.

Rad vanjskih sila -W je zbroj pozitivnog rada koji s morske strane vrši atmosferski tlak nad masom M zraka, istiskujući je iz volumena V_1, i negativnog rada koji vrše sile atmosferskog tlaka same mase M zraka istiskujući, po svom prelasku planine, drugu količinu zraka koja je prethodno zauzimala volumen V_2. Dakle:

$$W = -p_1V_1 + p_2V_2$$

(v. zadatak 14o).

Na osnovu plinske jednadžbe (v. zadatak 117)

$$W = \frac{M}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{M}{\mu} R\Delta T \qquad (3)$$

Sama toplina koju je zrak odao prilikom kondenzacije vodenih para je (v. zadatak 1o8):

$$\Delta Q = c_V' \Delta M$$

gdje je $c_V' = -c_V$ specifična toplina kondenzacije vodenih para, c_V - specifična toplina isparavanja vode, a ΔM - - masa kondenzirane pare koja se može odrediti iz plinske jednadžbe kao:

$$\Delta M = \mu_{H_2O} \frac{p_p V_1}{RT_1} = \varphi \mu_{H_2O} p_{H_2O} \frac{M}{\mu} \frac{RT_1}{p_1} \frac{1}{RT_1}$$

odakle je:

$$\Delta Q = \varphi c_V' M \frac{\mu_{H_2O}}{\mu} \frac{p_{H_2O}}{p_1} \qquad (4)$$

Uvrštavajući (2), (3) i (4) u (1) dobivamo ($\mu_{H_2O} = 18 \frac{kg}{kmol}$):

$$T = T_2 - T_1 = \frac{2}{7} \frac{\varphi c_V \mu_{H_2O} p_{H_2O}}{R p_1} = 23^oK$$

Tražena temperatura zraka u pustinji je, prema tome

$$T_2 = 48^oC$$

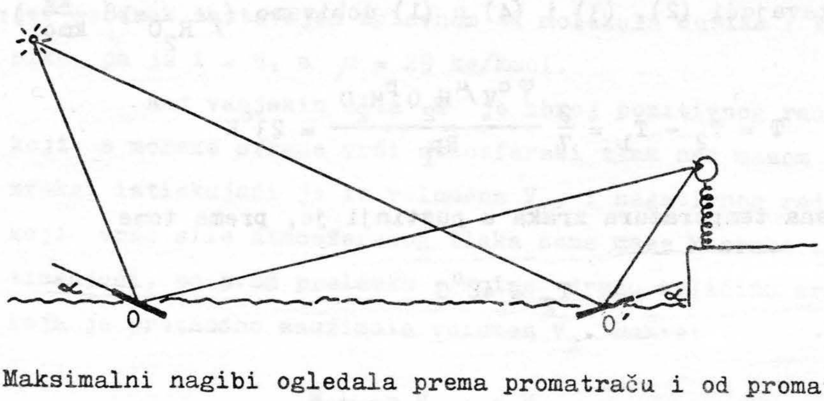
Treći dio. OPTIKA

145. $g_I < g_{II} < g_{III}$;

146. Visina ogledala mora biti jednaka polovici visine čovjeka, a donji rub mora biti na onoj visini od poda koja je jednaka polovici udaljenosti čovjekovih očiju od poda.

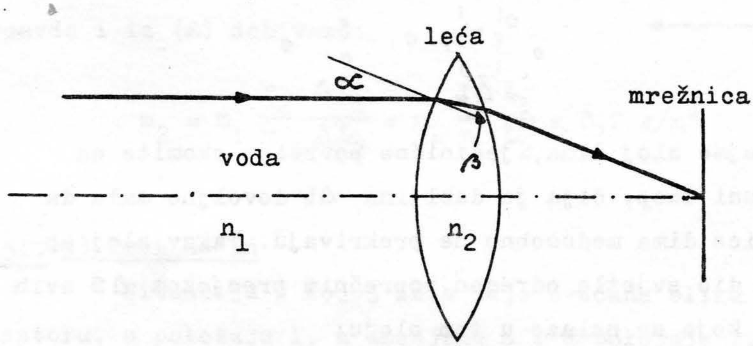
147. Visina drveta je 9 m.

148. Pojava se zapaža kod umjerenog vjetra od 2 do 13 m/s, kad se na površini obrazuju mali valovi i to sasvim nepravilno i podjednako u svim pravcima. Nagib valova tada ne premašuje kut α od 20-30°. Svaki pojedini val se pri tome ponaša kao ogledalo, tako da se krajnji slučajevi maksimalnog nagiba onih valova koji reflektiraju mjesečevo svjetlo u promatračevo oko mogu prikazati kao:

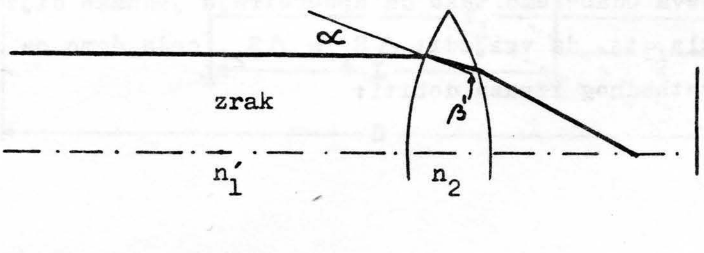


Maksimalni nagibi ogledala prema promatraču i od promatrača, u položajima O i O′, određuju maksimalne nagibe valova za koje Mjesečeva slika još stiže u promatračevo oko. Udaljenost između O i O′, tj. $\overline{OO'}$, određuje tada duljinu Mjesečeve slike u vodi, jer između krajnjih točaka O i O′ postoji još mnoštvo valova s prijelaznim nagibima valova koji, također, reflektiraju Mjesečevo svjetlo u promatračevo oko. Naravno, Mjesečeva će slika biti to izduženija što je Mjesec bliže horizontu (niže).

149. Nacrtajmo put zrake svjetlosti od beskonačno dalekog izvora, kroz leću oka, do mrežnice, u vodi:

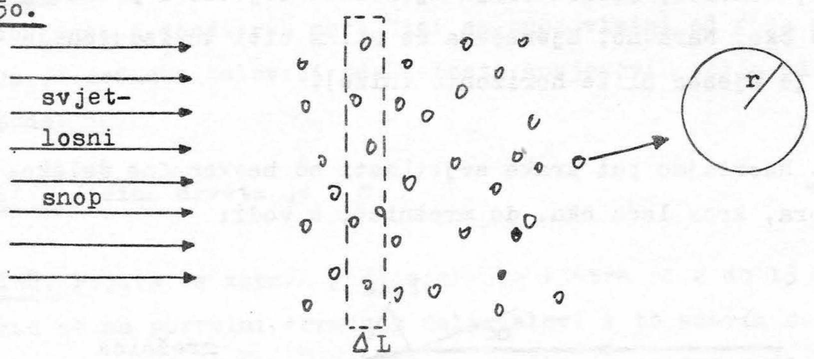


Zakon refrakcije (loma) svjetlosti na granici dvaju optičkih sredstava glasi: $\sin\alpha/\sin\beta = n_2/n_1$, gdje su n_2 i n_1 apsolutni indeksi loma tvari leće i vode, respektivno. Kad čovjek izađe iz vode, onda će se, uslijed manjeg apsolutnog indeksa loma zraka $n_1' < n_1$, kut β, prema zakonu refrakcije smanjiti na β', što se može prikazati kao:



Dakle, budući da će se kod čovjeka koji vidi normalno u vodi - u zraku stvarati slika predmetâ ispred mrežnice, to znači da je on normalno (u zraku) kratkovidan.

15o.



Promatrajmo sloj dima, jedinične površine okomite na svjetlosni snop, čija je debljina ΔL dovoljno mala da se čestice dima međusobno ne prekrivaju. Takav sloj apsorbira dio svjetla određen poprečnim presjekom ΔS svih čestica koje se nalaze u tom sloju:

$$\Delta S = N\cdot 1\cdot 1\cdot \Delta L\cdot \pi\cdot r^2 = N\Delta L\pi r^2 = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}\Delta L\pi r^2 = \frac{3m\Delta L}{4r\rho}$$

gdje je N broj čestica u jediničnom volumenu, a ρ- gustoća raspršene tvari.

Ako sada u prvom i drugom zadanom slučaju debljinu slojeva odaberemo tako da apsorbiraju jednake dijelove svjetla, tj. da vrijedi: $\Delta S_1 = \Delta S_2$, onda ćemo na temelju prethodnog izraza dobiti:

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} = \frac{m_2}{m_1}\frac{r_1}{r_2} \qquad (\pounds)$$

Analogni omjer dobivamo i za dva, tri, itd. sloja. Dakle, ako je u prvom slučaju vidljivost povezana s debljinom ΔL_1 odabranog sloja kao:

$$L_1 = n\Delta L_1$$

onda je i u drugom slučaju:

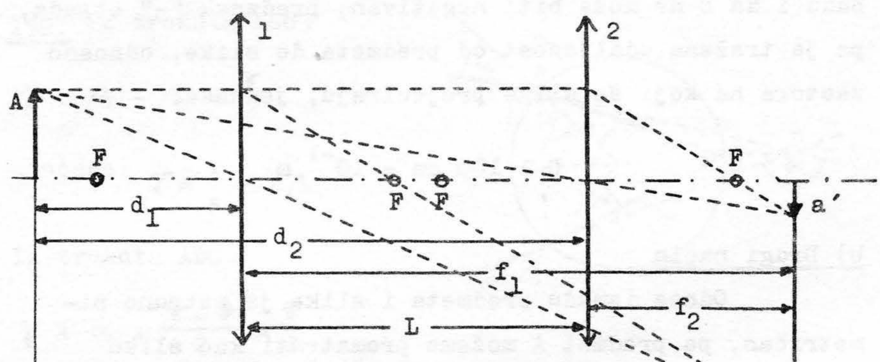
$$L_2 = n\Delta L_2$$

Odavde i iz (£) dobivamo:

$$m_2 = m_1 \frac{r_2}{r_1}\frac{\Delta L_1}{\Delta L_2} = m_1 \frac{r_2}{r_1}\frac{L_1}{L_2} = 0{,}2\ g/m^3$$

151. a) Prvi način

Situaciju u kojoj leća daje uvećanu sliku A′ na zastoru, u položaju 1, a umanjenu a′, u položaju 2, predmeta A, možemo prikazati kao:



151.

Jednadžbe konjugacije (za konvergentne leće) za položaje 1 i 2 glase:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f_2 + L} + \frac{1}{D - L - f_2}$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{D - f_2} \qquad (£)$$

Izjednačavanjem desnih strana ovih jednadžbi, dobivamo nakon sređivanja,:

$$f_2 = \frac{D - L}{2}$$

Uvrštavanjem tog izraza u jednadžbu (£) polučujemo jednadžbu:

$$D^2 - 4DF - L^2 = 0 \qquad (££)$$

čije je rješenje:

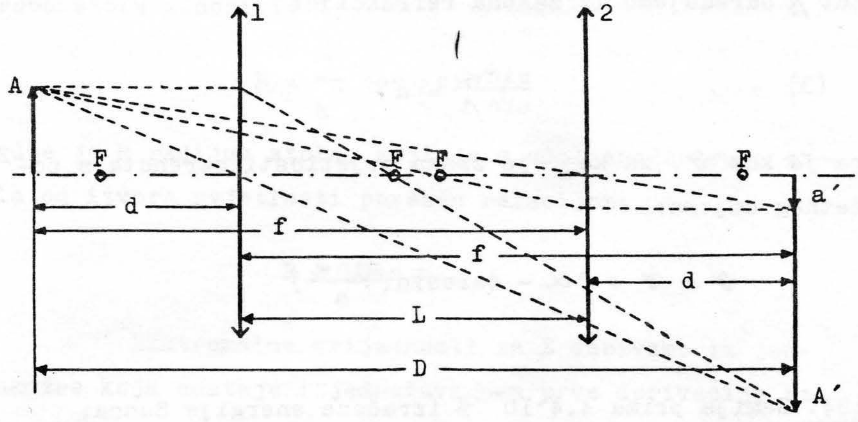
$$D_{1,2} = 2F \pm \sqrt{4F^2 + L^2} = (32 \pm 68)\ \text{cm}.$$

Budući da D ne može biti negativan, predznak "-" otpada, pa je tražena udaljenost od predmeta do slike, odnosno zastora na koji se slike projeciraju, jednaka:

$$D = 100\ \text{cm} = 10^{-1}\ \text{m}$$

b) <u>Drugi način</u>

Odnos između predmeta i slike je potpuno simetričan, pa predmet A možemo promatrati kao sliku "predmeta" a′, što se može prikazati kao:



Odavde odmah vidimo da je:

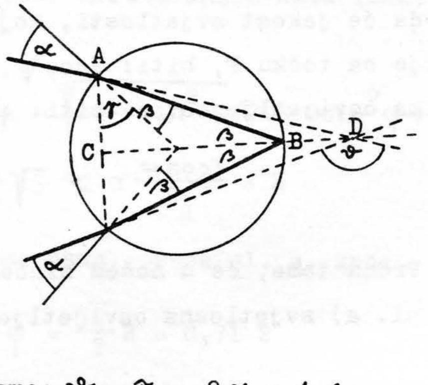
$$d = \frac{D - L}{2}$$

Jednadžba konjugacije glasi (uz uvrštenje dobivenog d):

$$F = \frac{1}{\frac{1}{f} + \frac{1}{d}} = \frac{fd}{f + d} = \frac{(D - d)d}{D} = \frac{(D + L)(D - L)}{4D} = \frac{D^2 - L^2}{4D}$$

a to nije ništa drugo nego jednadžba (££)

152. Iz trokuta ABC:



$$\gamma + \beta + \beta = \frac{\pi}{2}$$

odnosno: $\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\beta$

Iz trokuta ADC:

$$\gamma + \alpha + \frac{\pi - \vartheta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Kombinacijom jednadžbi dobivamo: $\vartheta = \pi + 2\alpha - 4\beta$

Kut β određujemo iz zakona refrakcije:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$

pa je kut ϑ, za koji je zraka svjetlosti skrenuta s početnog smjera:

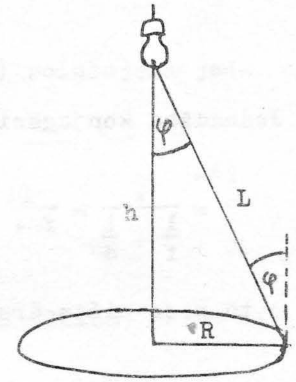
$$\vartheta = \pi + 2\alpha - 4\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)$$

154. Zemlja prima $4.4\cdot10^{-6}\%$ izračene energije Sunca;

155. Bit će tri puta slabija;

156. Osvijetljenost E na udaljenosti L od izvora svjetlosne jakosti I je dana izrazom:

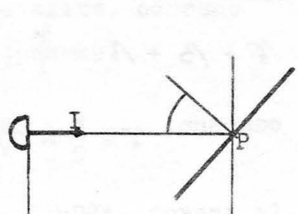
$$E = \frac{I}{L^2}$$



Sl. a

Ako svjetlost pada na osvijetljenu plohu (v. sl. b) pod kutom φ, onda će jakost svjetlosti, koja djeluje na točku P, biti: $I\cos\varphi$, a sama osvijetljenost će biti:

$$E = \frac{I\cos\varphi}{L^2}$$



Sl. b

Prema tome, će u našem slučaju (v. sl. a) svjetlosna osvijetljenost ruba stola iznositi:

$$E = \frac{I}{R^2}\cos\varphi\sin^2\varphi \qquad (£)$$

gdje je R radijus stola, koji je s udaljenošću ruba stola od izvora svjetlosti povezan relacijom:

$$R = L\sin\varphi$$

Ekstremalne vrijednosti za E dobivamo iz jednadžbe koja nastaje izjednačavanjem prve derivacije izraza (£) s nulom:

$$3\sin^3\varphi = 2\sin\varphi \qquad (££)$$

Za $\varphi = 0$ dobivamo minimum koji odgovara beskonačnoj udaljenosti izvora, pa ćemo promatrati samo $\varphi \neq 0$. U tom slučaju možemo jednadžbu (££) podijeliti sa $\sin\varphi$ i polučiti rješenje:

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad (£££)$$

za koje E iz (£) poprima maksimalnu vrijednost. Da je to zaista maksimum možemo se uvjeriti uvrštavanjem kuta (£££) u drugu derivaciju izraza (£):

$$\left(\frac{ER^2}{I}\right)'' = -9\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}\,(2-9\sin^2\varphi) =$$

$$= \sqrt{1-\frac{2}{3}}\,\left(2-9\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{3} < 0$$

Traženu visinu dobivamo sada, prema sl. a, kao:

$$h = R\,\mathrm{ctg}\,\varphi = R\sqrt{1-\sin^2\varphi}\,/\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}R = 0{,}71\ R$$

157. Slika zvijezda nikad ne može biti dobivena kao geometrijska slika diska zvijezda jer je difrakciona slika (od ogiba svjetlosti u teleskopu) zvijezde uvijek veća od geometrijske (bez obzira na povećanje). Promjer takve difrakcione slike je reda veličine:

$$\frac{\lambda F}{D}$$

gdje je λ valna duljina svjetlosti, F - fokusna udaljenost objektiva, D - promjer ulaznog snopa svjetlosti, odnosno objektiva. S druge strane osvijetljeni dio danjeg neba ima geometrijsku sliku u teleskopu.

Tok svjetlosti je u oba slučaja proporcionalan površini presjeka upadnog snopa, tj. proporcionalan D^2. Osvijetljenost se može izraziti kao omjer toka svjetlosti i površine dobivene slike. U slučaju danjeg neba, ta će površina biti naprosto proporcionalna F^2. U slučaju zvijezde, kao što smo rekli, bit će površina proporcionalna λ^2F^2/D^2. Imat ćemo, dakle, slijedeći omjer osvijetljenosti:

$$\alpha_1 = \frac{E_{zvijezda}}{E_{nebo}} \sim \frac{\dfrac{D^2}{\lambda^2F^2/D^2}}{\dfrac{D^2}{F^2}} = \frac{D^2}{\lambda^2}$$

Traženi novi omjer, tj. omjer po kojem osvijetljenost zvijezde neće biti 10 puta manja, već 10 puta veća, bit će:

$$\alpha_2 \sim \frac{D'^2}{\lambda^2}$$

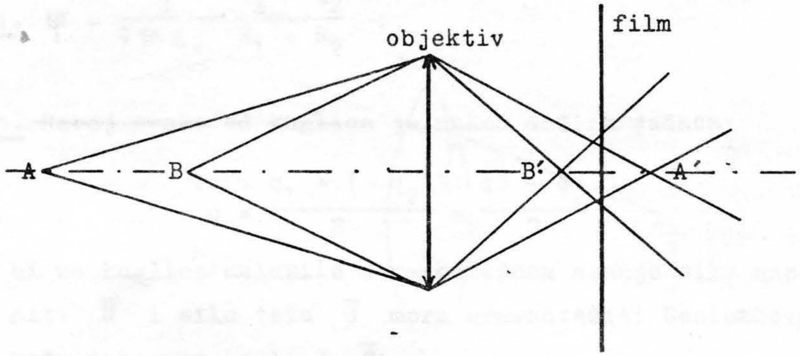
Omjer koeficijenata $\alpha_1 = 1/10$ i $\alpha_2 = 10$:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 100 = \frac{D'^2}{D^2}$$

tj. promjer objektiva je potrebno povećati 10 puta:

$$D' = 10\,D$$

158. Ako aparat fokusiramo npr. između dva predmeta, htijući ih oba dobiti podjednako oštro, onda će njihove slike u ravnini filma biti "razmazane", što se može prikazati kao:



Međutim, što je promjer leće manji (otvor dijafragme, "blenda") to je i ta "razmazanost" manja. I na kraju, zapravo, imamo cameru-opscuru u kojoj sama leća više i nije bitna, već samo dimenzija otvora, budući da će promjer snopa na filmu biti jednak promjeru otvora. U tom slučaju će zrake svjetlosti od svakog predmeta biti međusobno paralelne i dubina oštrine - praktički beskonačna. Naravno, pri tome predmeti moraju biti dovoljno daleko od objektiva, a otvor dijafragme ne smije biti toliko malen da bi moglo doći do izrazitijeg ogiba (međutim, kod normalnog fotografskog aparata se otvor dijafragme nikad ne može toliko smanjiti da bi došlo do difrakcije).

Dana razrada ujedno objašnjava i zašto ljudi slabijeg vida bolje vide kod jakog osvijetljenja. Tada se, naime, zjenica suzuje, pa se smanjuje "razmazanost" defokusirane slike predmetâ na mrežnici.

Četvrti dio. ELEKTRICITET

159. 0,00000003 % ;

160. a) q_3 - pozitivan; $r_2 = \dfrac{L}{1+\sqrt{\dfrac{q_1}{q_2}}} = L - r_1$;

b) $q_3 = \dfrac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}$; r_1 i r_2 su jednaki onima u slučaju a);

161. $\sigma = \dfrac{2\varepsilon_0}{q}\sqrt{F_N^2 - G^2}$; **162.** $E = q\sqrt{5-2\sqrt{2}}/(8\pi\varepsilon_0 L^2)$;

$\varphi = q(\sqrt{2} - 2)/(8\pi\varepsilon_0 L)$; **163.** $q = 4\pi r^3 g(\rho' - \rho)/(3E)$;

164. $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{q_1 + q_2}{R_1 + R_2}$;

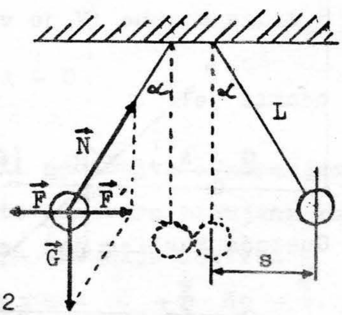
165. Naboj svake od kuglica je nakon dodira jednak:

$$q = \frac{q_1 + (-q_2)}{2} = \frac{q_1 - q_2}{2}$$

Da bi se kuglice nalazile u ravnotežnom stanju silu napetosti niti $\vec{N}$ i silu težu $\vec{G}$ mora uravnotežiti Coulombova sila među nabojima kuglicâ, $\vec{F}$:

$$\vec{N} + \vec{G} = -\vec{F} = \vec{F}'$$

Iz geometrije problema (v. sl.) nalazimo:



$$\frac{|\vec{F}|}{|\vec{G}|} = \mathrm{tg}\,\alpha \qquad (\varepsilon)$$

S druge strane je Coulombova sila:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1 - q_2)^2}{d^2}$$

gdje je d udaljenost između središtâ kuglica:

$$d = 2\cdot(s + 2r) = 2\cdot(L + r) \sin \;\; + 2r$$

Budući da je $r \ll L$, $r \ll L\sin\alpha$, izraz možemo dobro aproksimirati pomoću:

$$d = 2 L \sin \alpha .$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza u jednadžbu (£) nalazimo traženu težinu svake od kuglica:

$$G = |\vec{G}| = \frac{|\vec{F}'|}{tg\alpha} = \frac{|\vec{F}|}{tg\alpha} = \frac{(q_1 - q_2)^2}{64\pi\varepsilon_0 L^2 \sin^2\alpha \, tg\alpha} \qquad (££)$$

Nakon uranjanja u tekućinu, na kuglice počinje djelovati Arhimedova sila, tako da su njihove pojedinačne težine umanjene za iznos Arhimedove sile A. U tekućini je, također, za neku određenu međusobnu udaljenost kuglica - zbog $\varepsilon > 1$ - odbojna Coulombova sila veća nego izvan nje. Budući da ta dva utjecaja tekućine nisu nužno uravnotežena, niti kuglica će zatvarati neki novi kut $2\alpha'$. Prema tome, u analogiji sa (££):

$$G - A = \frac{(q_1 - q_2)^2}{64\pi\varepsilon_0\varepsilon \, L^2 \sin^2\alpha' tg\alpha'}$$

S druge strane (V je volumen kuglice):

$$G - A = m'g = (\rho - \rho')Vg$$

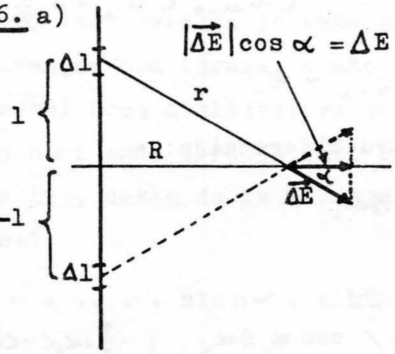
odakle je:

$$\frac{G - A}{G} = \frac{m'g}{mg} = \frac{(\rho - \rho')Vg}{\rho V g} = \frac{\rho - \rho'}{\rho}$$

Gustoća kuglica je, prema tome :

$$\rho = \frac{G}{A}\rho' = \frac{\varepsilon \sin^2\alpha' tg\alpha'}{\varepsilon \sin^2\alpha' tg\alpha' - \sin^2\alpha \, tg\alpha}\, \rho'$$

166. a)



Polje koje tvori pojedini naboj:

$$\Delta q = \varkappa \Delta l$$

jednog malog dijela pravca, Δl, je prema Coulombovom zakonu:

$$\vec{\Delta E} = \frac{\varkappa \Delta l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

No, budući da će svaki djelić Δl na udaljenosti +l od okomice na pravac doprinositi ordinati polja $\vec{\Delta E}$ jednakim iznosom ali suprotnim predznakom od djelića Δl na udaljenosti -l, to će nas zanimati samo doprinos koji je, po smjeru, okomit na pravac:

$$\Delta E = \frac{\varkappa \Delta l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha = \frac{\varkappa \Delta l \cos^3\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Element Δl se može izraziti pomoću α i udaljenosti od pravca (R):

$$\Delta l = dl = d(r\sin\alpha) = d\left(\frac{R\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = R\,d(\,tg\alpha\,) = R\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{R\Delta\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Odakle je doprinos svakog djelića:

$$\Delta E = \frac{\varkappa \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R}\Delta\alpha$$

Ukupan iznos polja u promatranoj točki se dobiva sumiranjem doprinosa čitavog pravca. Budući da to odgovara promjeni kuta α od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$ mi moramo izvršiti sumaciju dobivenog izraza po beskonačno malim odsječcima kuta od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$. Da bismo takvu sumaciju mogli praktički izvesti, podijelit ćemo segment $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ na n dijelova i označiti:

$$-\frac{\pi}{2}=\alpha_0<\alpha_1<\dots<\alpha_i<\dots<\alpha_{n-1}<\alpha_n=+\frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\alpha_i=\alpha_{i+1}-\alpha_i$$

Označimo još s λ najveću takvu diferenciju:

$$\lambda=\max\Delta\alpha_i$$

Ukupno polje je sada:

$$E=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\chi\cos\alpha_i}{4\pi\varepsilon_0 R}\Delta\alpha_i=\frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0 R}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\alpha_i\,\Delta\alpha_i\quad;\ -\frac{\pi}{2}=\alpha_0<\dots<\alpha_i<\dots<\alpha_n=\frac{\pi}{2}$$

Označimo sumu sa S_n i izvršimo podjelu segmenta $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ na n dijelova tako da svi dijelovi budu međusobno jednaki. Tada je veličina svakog djelića:

$$\Delta\alpha_i=\alpha_{i+1}-\alpha_i=\frac{\pi}{n}$$

a svaki pojedini kut možemo predstaviti u obliku:

$$\alpha_i=\frac{\pi}{n}i-\frac{\pi}{2}$$

(Vidimo da je na taj način za i = 0 : $\alpha_0=0-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$ za i = n/2 : $\alpha_{\frac{n}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$ i za i = n : $\alpha_n=\pi-\frac{\pi}{2}=+\frac{\pi}{2}$)

Sumu, dakle, možemo pisati kao:

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{n}i-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\cos\frac{\pi i}{n}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi i}{n}\sin\frac{\pi}{2}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{\pi i}{n}=\frac{\pi}{n}\left(0+\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\dots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

Prepoznajemo red oblika:

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\dots+\sin n\alpha$$

Njegova je suma:

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\,\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

166.

Dokažimo indukcijom da je to zaista suma reda. Za n = 1, n = 2, itd. tvrdnja je lako provjerljiva konkretnim izračunavanjem oba izraza, A ako još iz važenja tvrdnje za neki određeni broj n slijedi važenje i za neposredno slijedeći broj n + 1 onda tvrdnja važi općenito za bilo koji broj. Dokažimo, dakle da iz važenja tvrdnje za n slijedi važenje i za n+1:

$$\sin\alpha + \ldots + \sin n\alpha + \sin(n+1)\alpha = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\,\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \sin(n+1)\alpha =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\,\sin\frac{\alpha}{2}n + 2\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cos\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\left[\cancel{\sin\frac{n\alpha}{2}} + \sin\frac{n+1+1}{2}\alpha + \cancel{\sin\frac{1-n-1}{2}}\right]}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

na temelju čega se formula može smatrati dokazanom. U našem slučaju, uvrštavanjem vrijednosti, iz nje dobivamo:

$$S_n = \frac{\pi}{n}\,\frac{\sin\frac{n+1-1}{2}\frac{\pi}{n}\,\sin\frac{n-1}{2}\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{n}\,\frac{\sin\frac{n-1}{2}\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{n}\,\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

odakle je:

$$E = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0 R}\lim_{\nu\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\alpha_i\cdot\Delta\alpha_i = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,d\alpha =$$

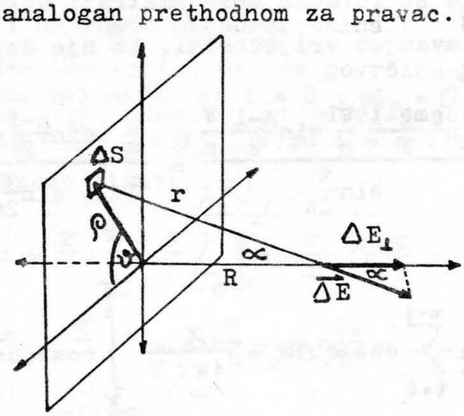
$$= \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0 R}\lim_{\nu\to 0} S_n = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0 R}\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0 R}\lim_{n\to\infty}\left[2\,\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cos\frac{\pi}{2n}\right]$$

$$= \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(2\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}}\right) = \frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

(Prijelaz od $\lim\limits_{\nu\to 0} S_n$ na $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ izvršen je budući da $\nu\to 0$ znači da svaki $\Delta\alpha_i$ teži k nuli, tj. da je podjela segmenta na n dijelova takva da svaki dio teži k nuli, a to može biti samo onda kad $n\to\infty$.)

Napomena: Prethodno izvođenje nije provedeno matematski rigorozno jer bi u tom slučaju bilo isuviše glomazno,ali je to u svakom slučaju moguće. Svrha računa je bila da pruži uvid u fizikalni smisao integracije i u sumacionu pozadinu integracije.

b) Da bismo našli polje beskonačne nabijene ravnine provest ćemo postupak analogan prethodnom za pravac.

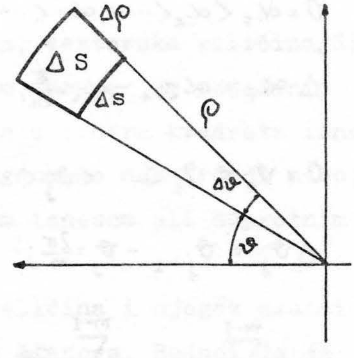


Linearni element Δl zamjenjujemo površinskim ΔS, linearnu gustoću naboja $\varkappa$ površinskom: σ , i opet nas zanima samo normalna komponenta polja:

$$\Delta E_\perp = \frac{\sigma\,\Delta S}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha$$

166.

Površinski element ΔS dobivamo prema slici kao:



$$\Delta S = \Delta s \Delta \rho$$

Budući da je:

$$\Delta s \approx \rho \sin(\Delta \vartheta) \approx \rho \Delta \vartheta$$

to je:

$$\Delta S = \rho \Delta \rho \Delta \vartheta$$

Iz prethodne slike dobivamo s druge strane, kao i u linearnom slučaju:

$$r = \frac{R}{\cos \alpha} \quad ; \quad \rho = r \sin \alpha = \frac{R \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

odakle je:

$$\Delta \rho = \frac{R \Delta \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Uvrštavanje tih izraza u gornji oblik za $\Delta E_{\perp}$ daje:

$$\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma \rho \Delta \rho \Delta \vartheta}{4 \pi \varepsilon_0 R^2} \cos^3 \alpha = \frac{\sigma \Delta \rho \Delta \vartheta}{4 \pi \varepsilon_0 R} \sin \alpha \cos^2 \alpha = \frac{\sigma \sin \alpha \Delta \alpha \Delta \vartheta}{4 \pi \varepsilon_0}$$

Da bismo dobili doprinos cijele ravnine promatrat ćemo doprinose polupravca, određenog radijus vektorom $\vec{\rho}$, koji rotira oko okomice na ravninu za 360°. Pri tome će se α mijenjati od 0 do $\frac{\pi}{2}$, a ϑ od 0 do 2π. Imat ćemo, dakle, po analogiji s prethodnim linearnim slučajem:

$$E = \frac{\sigma}{4 \pi \varepsilon_0} \lim_{\substack{\nu \to 0 \\ \mu \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sin \alpha_i \Delta \alpha_i \Delta \vartheta_j =$$

$$= \frac{\sigma}{4 \pi \varepsilon_0} \left[\lim_{\nu \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sin \alpha_i \Delta \alpha_i \right] \lim_{\mu \to 0} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \vartheta_j =$$

$$= \frac{\sigma}{4 \pi \varepsilon_0} \lim_{\nu \to 0} S_n \lim_{\mu \to 0} S_m = \frac{\sigma}{4 \pi \varepsilon_0} \lim_{n \to \infty} S_n \lim_{m \to \infty} S_m$$

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_i < \cdots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = \frac{\pi}{2} ;$$

$$\Delta \alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{\pi}{2n} ; \quad \alpha_i = \frac{\pi}{2n} i ; \quad \nu = \max \Delta \alpha_i$$

$$0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \cdots < \vartheta_j < \cdots < \vartheta_{m-1} < \vartheta_m = 2\pi ;$$

$$\Delta \vartheta_j = \vartheta_{j+1} - \vartheta_j = \frac{2\pi}{m} ; \quad \vartheta_j = \frac{2\pi}{m} j ; \quad \mu = \max \Delta \vartheta_j$$

$$S_m = \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \vartheta_j = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{2\pi}{m} = 2\pi$$

$$S_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \sin\frac{\pi i}{2n} = \frac{\pi}{2n} \frac{\sin\frac{\pi}{4} \sin\frac{(n-1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4n} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n})}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4n} \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} = \frac{\pi}{4n} \left(\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} - 1 \right)$$

Granične vrijednosti dobivenih izraza su:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi ; \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} \cos\frac{\pi}{4n} - \frac{\pi}{4n} \right) = 1$$

Uvrštavanjem u izraz za E dobivamo konačan rezultat:

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{\substack{\nu\to 0\\ \mu\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sin\alpha_i \,\Delta\alpha_i \,\Delta\vartheta_j = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha \, d\alpha \, d\vartheta =$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{n\to\infty} S_n \lim_{m\to\infty} S_m = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Zamijetimo još da polje nabijene ravnine ne ovisi o udaljenosti od nje, dok polje nabijenog pravca linearno slabi s udaljenošću od njega, kao što se iz dobivenih rezultata može vidjeti.

167. a) Budući da je polje usmjerena, vektorska veličina, čiji se ukupni iznos dobiva vektorskim zbrajanjem pojedinih doprinosa, odnosno komponenata, to će u centru kvadrata iznos polja biti jednak nuli. Naime, dijagonalno nasuprotni naboji doprinose u centru kvadrata jednakim iznosom ali suprotnim predznakom polja.

Potencijal je, naprotiv, skalarna veličina i njegov ukupni iznos dobivamo zbrajanjem pojedinih članova. Budući da je potencijal za Coulombovu silu, tj. za točkasti naboj, definiran kao:

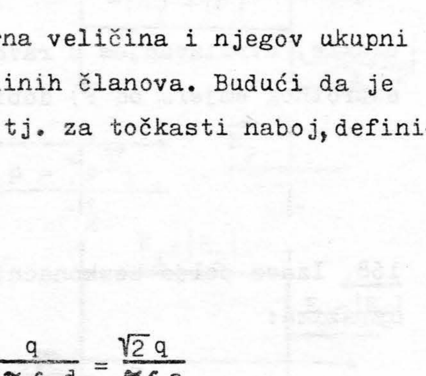
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

u našem će slučaju biti:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 4\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{\sqrt{2}\,q}{\pi\varepsilon_0 a}$$

gdje je d udaljenost od centra kvadrata do pojedinog njegovog vrha.

b) Pretpostavimo da smo u centar već smjestili odgovarajući naboj $-q'$. Tada sile koje djeluju npr. na naboj u točki 2 moraju biti u ravnoteži, tj.:



$$\vec{F} + \vec{F}_4 + (\vec{F}_1 + \vec{F}_3) = \vec{0} \qquad (\pounds)$$

Prema slici:

$$F_1 + F_3 = |\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = \sqrt{F_1^2 + F_3^2 + 2F_1F_3\cos\frac{\pi}{2}} = F_1\sqrt{2}$$

Coulombov zakon daje iznose pojedinih sila:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q'}{d^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{a^2};$$

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{a^2}; \qquad F_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{a^2}$$

odakle, uvrštavanjem u ravnotežnu jednadžbu (£) ($\vec{F}_1$ i $\vec{F}_4$ su suprotnog smjera od $\vec{F}$) dobivamo:

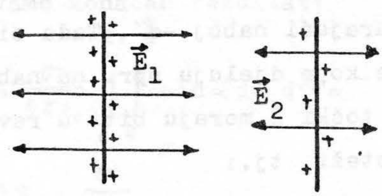
$$q' = q \frac{2\sqrt{2} + 1}{4}$$

168. Iznos polja beskonačnih ravnina dan je (v. zadatak 166.) izrazima:

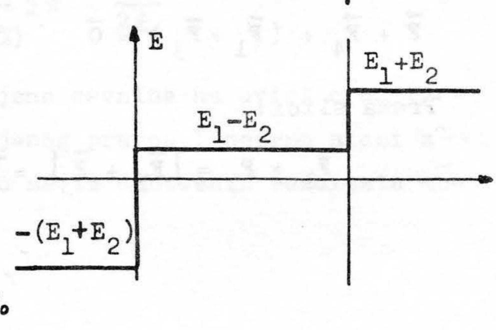
$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}; \qquad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

Prema principu superpozicije polja (kao vektorske veličine) ukupno polje (unutar ili izvan ploča) će biti:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



1.) Ako su obje ploče pozitivno nabijene tada će polje biti usmjereno od ploča i grafički prikazivo kao na slici. Dakle, polje će imati vrijednost:



a) između ploča:

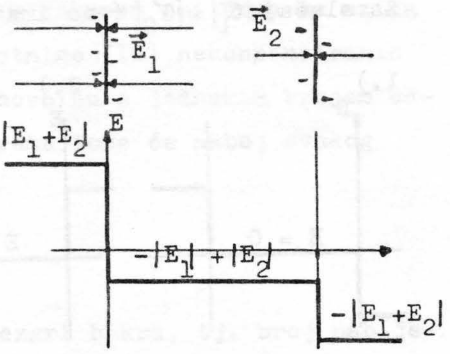
$E = E_1 - E_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2\varepsilon_0$

b) izvan ploča:

$E = \mp(E_1+E_2) = \mp(\sigma_1 + \sigma_2)/2\varepsilon_0$

168.

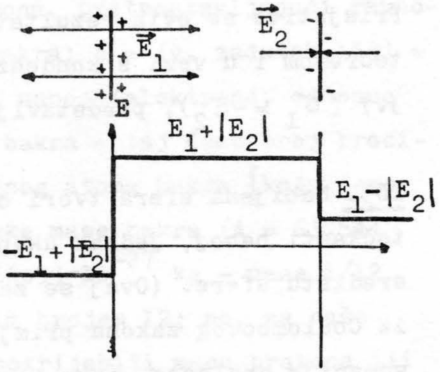
2.) Ako su obje ploče negativno nabijene polje će biti usmjereno prema njima, i imat će vrijednost:



a)
$$E = \frac{-|\sigma_1|+|\sigma_2|}{2\varepsilon_0}$$

b)
$$E = \pm\frac{|\sigma_1+\sigma_2|}{2\varepsilon_0}$$

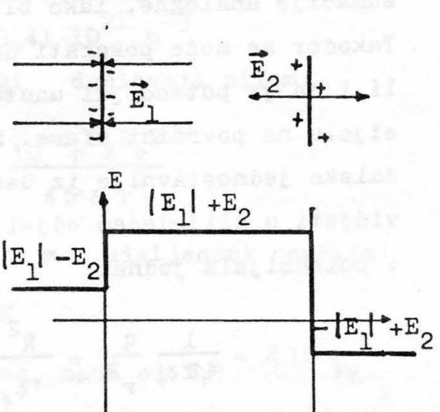
3.) Ako je prva ploča nabijena pozitivno, a druga negativno imat ćemo:



a)
$$E = \frac{\sigma_1+|\sigma_2|}{2\varepsilon_0}$$

b)
$$E = \pm\frac{-\sigma_1+|\sigma_2|}{2\varepsilon_0}$$

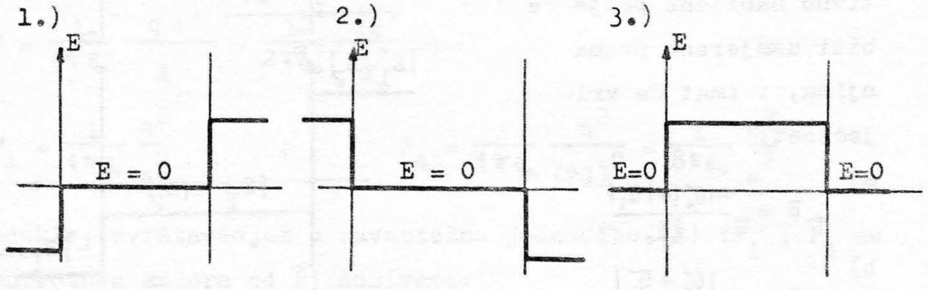
Ukoliko je prva ploča nabijena negativno, a druga pozitivno, bit će:



a)
$$E = \frac{|\sigma_1|+\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

b)
$$E = \pm\frac{|\sigma_1|-\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

Za slučaj $|\sigma_1| = |\sigma_2|$ ćemo imati:



Prisjetite se ovih rezultata kasnije, u vezi s Gaussovim teoremom i u vezi s kondenzatorom (posljednji slučaj, 3.) ($\sigma_1 = -\sigma_2$), predstavlja kondenzator).

169. Nabijena sfera tvori oko sebe polje kakvo bi tvorio točkasti naboj, jednak ukupnom naboju sfere, smješten u središtu sfere. (Ovaj se zaključak može izvesti direktno iz Coulombovog zakona primjenom integralnog računa, odnosno sumacije analogne, iako složenije, onoj iz zadatka 166. Također se može pokazati da je polje unutar sfere jednako nuli i da je potencijal unutar sfere konstantan i jednak potencijalu na površini sfere. Međutim, svi ti zaključci slijede daleko jednostavnije iz Gaussova teorema, kao što ćemo vidjeti u slijedećem odjeljku.) Prema tome je iznos polja i potencijala jednak:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2} = 34{,}5 \text{ V/m}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r} = 12{,}42 \text{ V}$$

(Usp. zadatak 179.d))

17o. Sila je određena Coulombovim zakonom pri čemu se uzima u obzir međudjelovanje jedne stotnine (1%) nekonpenziranih elektrona ili protona u jednom novčiću s jednakim brojem odgovarajućih čestica u drugom. Prema tome će naboj svakog od novčića biti jednak:

$$q = \frac{n\,Z\,e}{1oo}$$

gdje je $Z = 29$ broj protona u jezgri bakra, tj. broj nabijenih čestica (protona ili elektrona, pretpostavljajući ravnotežnu situaciju) unutar atoma bakra; e = (v. zadatak 159) = $= 1,60210\cdot 10^{-19}$ C - elementarni naboj (elektrona, odnosno protona); n - broj atoma u 1 g bakra - taj ćemo broj procijeniti kao omjer 1 g i mase jednog atoma bakra [koju ćemo dobiti kao umnožak između atomske mase bakra ($A = 63,54$) i atomske jedinice mase ($= 1,66o53\cdot 10^{-27}$ kg - mase 1/12 mase ugljikova izotopa s masenim brojem 12; no, za naše svrhe mi smo isto tako mogli upotrijebiti masu protona ili neutrona iz zadatka 159.)]: $n = 9,41\cdot 10^{21}\ m^{-3}$.

Naboji će jedan na drugi djelovati silom:

$$F = \frac{qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{10^{-4} n^2 Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Uvrštenje svih vrijednosti ($r = 1$ m - udaljenost novčića) daje:

$$F = 1,7\cdot 10^{13}\ N$$

Toj težini odgovara, prema $F = mg$, masa od $1,73\cdot 10^{12}$ kg. Volumen bakrene kugle takve težine je: $V = m/\rho = 1,93\cdot 10^{8}\ m^3$, odakle,iz izraza za volumen kugle: $V = 4\pi R^3/3$, dobivamo da bi kugla morala imati promjer od 1540 m.

171. $d = 6 \cdot 10^{-5}$ m ; **172.** $q = \varepsilon_0 E S$;

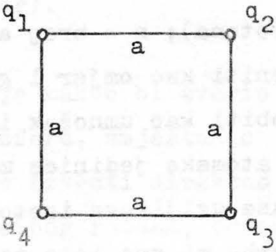
173. a) $E_1 = \dfrac{r_1 \rho}{3\varepsilon_0}$; b) $E_2 = \dfrac{R^3 \rho}{3\varepsilon_0 r_2^2}$;

175. $U_1 = \sqrt{\dfrac{2bW}{\varepsilon_0 Sn}}$, $U_2 = U_1/n$, $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 n S}{(n-1)b}$, $C_2 = n C_1$;

176.

$$C = \frac{C_6 C_7}{C_6+C_7}\left[\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2} + \frac{(C_3+C_5)C_4}{C_3+C_4+C_5}\right]\left[\frac{C_6 C_7}{C_6+C_7} + \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2} + \frac{(C_3+C_5)C_5}{C_3+C_4+C_5}\right]^{-1}$$ C_4

177. Ukupna potencijalna energija naboja jednaka je sumi energija koje odgovaraju međusobnom djelovanju pojedinih parova naboja:



$$E = E(1,2) + E(1,3) + E(1,4) + E(2,3) + E(2,4) + E(3,4)$$

Postoje dva moguća razmještaja koja bi dala različite energije:

a) Istoimeni naboji se nalaze na zajedničkoj stranici, npr.: $q_1 = q_2 = -q$, $q_3 = q_4 = q$. Tada je (dužina dijagonale kvadrata je $\sqrt{2}\,a$) :

$$E(1,2) = E(3,4) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a} \ ; \quad E(1,4) = E(2,3) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a} ;$$

$$E(1,3) = E(2,4) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a\sqrt{2}} \ ; \quad \Longrightarrow \quad E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\sqrt{2}$$

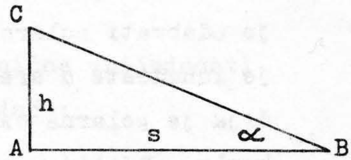
b) Istoimeni naboji nalaze se na zajedničkoj dijagonali, npr.: $q_1 = q_3 = -q$, $q_2 = q_4 = q$. Tada je:

$$E(1,2) = E(1,4) = E(2,3) = E(3,4) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a};$$

$$E(1,3) = E(2,4) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a\sqrt{2}}; \qquad E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\sqrt{2}\left(\frac{4}{\sqrt{2}}-1\right)$$

Omjer $E_b = 1.9\,E_a$ odražava veću blizinu raznoimenih naboja u drugom razmještaju.

178. Zadatak ćemo riješiti korištenjem zakona o sačuvanju energije. U točki C se energija kuglice svodi na potencijalnu energiju u polju sile teže i Coulombovskom (budući da je $R \ll h$, kuglicu možemo smatrati točkastim nabojem):



$$E(C) = mgh - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{h}$$

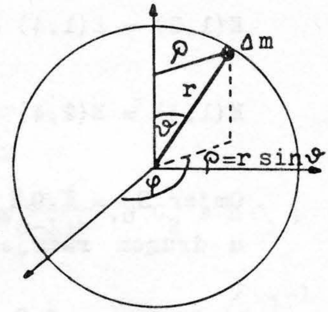
U točki B, osim doprinosa potencijalne energije (ovdje samo od Coulombovskog polja), postoji i doprinos kinetičke energije kuglice koja se kotrlja po kosini:

$$E(B) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{s} + E_k(B)$$

Kinetička energija se sastoji od energije linearnog i energije rotacionog gibanja:

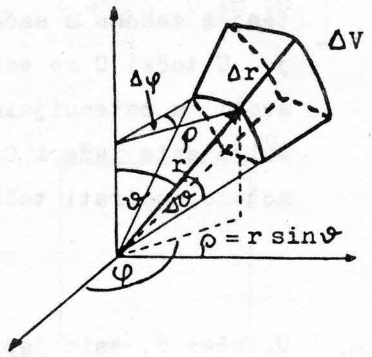
$$E_k(B) = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Moment inercije homogene kugle ćemo izračunati na slijedeći način. (Pri prvom čitanju se ovaj izvod može preskočiti, pamteći samo da je moment inercije homogene kugle: $I = 2R^2m/5$.) Moment inercije se definira kao (usporedi zadatak 71.):



$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} m_i \rho_i^2$$

gdje je ρ_i udaljenost pojedinog djelića tijela, mase m_i, od osi rotacije koja u našem slučaju prolazi kroz središte kugle. Za izračunavanje momenta najpogodnije je odabrati polarni sustav čije je ishodište u središtu kugle, a čija je polarna os - os rotacije kugle. Djelić mase $m_i = \Delta m$, možemo izraziti kao umnožak gustoće materije kugle μ i volumnog elementa kugle ΔV. Volumni element, zaključujući analogno kao i u zadatku 166. b), možemo izraziti kao (v. sliku):



$$\Delta V = \Delta r (r\Delta\vartheta)(r \sin\vartheta \Delta\varphi) = r^2 \sin\vartheta \, \Delta r \, \Delta\vartheta \, \Delta\varphi$$

Udaljenost elementa ΔV, odnosno mase Δm, od osi rotacije, će (v. sliku) biti: $\rho = r \sin\vartheta$, odakle je:

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ p\to\infty}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} \mu \, r_i^2 \sin\vartheta_j \Delta r_i \, \Delta\vartheta_j \, \Delta\varphi_k \, r_i^2 \sin^2\vartheta_j =$$

$$= \mu\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} r_i^4 \Delta r_i\right)\left(\lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \sin^3\vartheta_j \, \Delta\vartheta_j\right)\left(\lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p-1} \Delta\varphi_k\right)$$

Izraz u posljednjoj zagradi je, prema zadatku 166.b, jednak 2π. Izraz u drugoj zagradi možemo odrediti na potpuno analogan način. On jednak 4/3.

Izraz u prvoj zagradi određujemo analogno kao u zadatku 71. Varijabla r_i se proteže od 0 do R: $0=r_0<r_1<\ldots<r_i<\ldots<$ $<r_{n-1}<r_n=R$, gdje je: $r_i=\frac{R}{n}i$, $\Delta r_i=r_{i+1}-r_i=\frac{R}{n}$, odakle je:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} r_i^4\Delta r_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{R^5}{n^5}i^4 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{R^5}{n^5}\left(\frac{n^5}{5}-\frac{n^4}{2}-\frac{n}{30}\right)\right]=\frac{R^5}{5}$$

Uvrštavanje svih dobivenih izraza za granične vrijednosti sumâ u početni izraz za moment inercije daje:

$$I=\mu\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ p\to\infty}}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{p-1} r_i^4\sin^3\vartheta\,\Delta r_i\,\Delta\vartheta_j\,\Delta\varphi_k=$$

$$=\mu\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4\sin^3\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi=\mu\frac{R^5}{5}\,\frac{4}{3}\,2\pi=\frac{2}{5}mR^2$$

Da bismo mogli u potpunosti riješiti osnovni problem moramo još odrediti kutnu brzinu. Ona je po definiciji jednaka omjeru obodne brzine tijela koje rotira i njegovog radijusa:

$$\omega=\frac{v}{r}$$

Međutim, kod kotrljanja (bez proklizavanja) kugle njena je obodna brzina jednaka brzini kojom se kugla giba niz kosinu. (Da biste se uvjerili u to zamislite da je kugla učvršćena na osi koja prolazi njenim središtem, a da se kosina giba brzinom v i okreće kuglu; točke kugle u dodiru s kosinom očigledno se gibaju obodnom brzinom v.)

Uvrštavajući nađene izraze za moment inercije i kutnu brzinu kugle u izraz za kinetičku energiju u podnožju kosine dobivamo:

$$E_k(B) = \frac{m v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{m v^2}{5} = \frac{7}{10} m v^2$$

Zakon o sačuvanju energije zahtijeva da ukupne energije kugle na vrhu i dnu kosine budu međusobno jednake:

$$E(C) = E(B)$$

$$m g h - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{h} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{s} + \frac{7}{10} m v^2$$

Ova jednadžba daje (uz izražavanje veličine $\underline{s}$ pomoću zadanih: $s = h \operatorname{ctg}\alpha$) traženu brzinu kojom kuglica stiže u podnožje kosine:

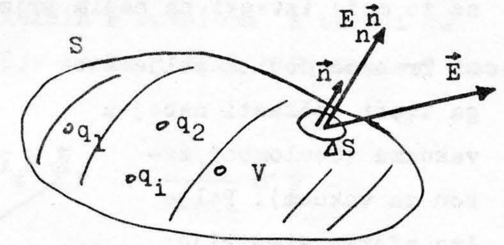
$$v = \sqrt{\frac{10}{7}\left[gh + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{h}(\operatorname{tg}\alpha - 1)m\right]}$$

Za nenabijenu kuglicu ta će brzina, pod istim uvjetima, biti:

$$v = \frac{10 g h}{7}$$

što znači da će za $\operatorname{tg}\alpha < 1$, tj. za $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, brzina nabijene kuglice u podnožju biti manja od brzine nenabijene kuglice, dok će za $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ biti veća. Za $\alpha = \frac{\pi}{4}$ će se rezultati podudariti, što je bilo i za očekivati, jer tada Coulombova sila do polovine puta kuglicu ubrzava, a od polovine usporava.

179. Budući da se u zadatku barata samo poljima i da se pretpostavlja izotropnost dielektrikâ kad vrijedi: $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ (u vakuumu je $\varepsilon_r = 1$) mi ćemo ponoviti Gaussov (koji se još, a posebno u ruskoj literaturi, naziva Gauss-Ostrogradskog ili Ostrogradski-Gaussov) zakon formuliran pomoću $\vec{E}$.



Ako je $E_n(S_i)$ iznos električnog polja u nekoj točki S_i zatvorene površine S, a u smjeru, $\vec{n}$, okomitom na tu površinu u toj točki, i ako je ΔS_i elementarni dio te površine, onda Gaussov zakon glasi:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} E_n(S_i)\Delta S_i = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \text{ (zbroj naboja unutar S)} \qquad (\pounds)$$

Simbolički se to može napisati u obliku:

$$\int_{\substack{\text{bilo koja zatv.}\\ \text{površina S}}} \vec{E}\cdot\vec{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \left(\sum_{\text{unutar S}} q_i \right)$$

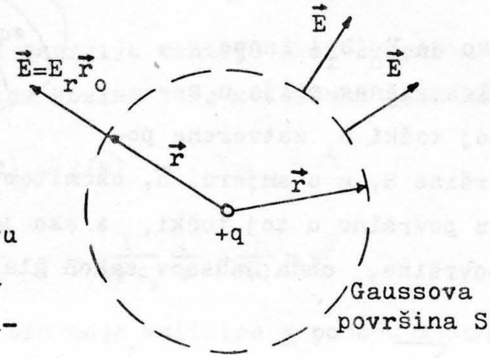
ili:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \left(\sum_S q_i \right) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_V \rho(r)\, dV$$

gdje je V volumen koji zatvara površina S (v. integral u prethodnom zadatku).

Iz formule ($\pounds$) vidimo da ćemo Gaussov zakon moći primijeniti u rješavanju svih onih problema u kojima polje ima neku simetriju jer u tom slučaju trebamo samo odabrati površinu koja prati takvu simetriju, tj. površinu na kojoj će $E_n(S_i)$ imati konstantnu vrijednost bez obzira na izbor točke S_i na njoj, i problem se svodi na izračunavanje ploštine (numeričke vrijednosti) takve površine. Pogledajmo kako se to može izvesti na našim primjerima.

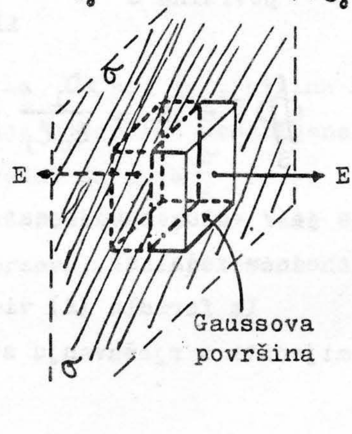
a) Trebamo dobiti polje što ga tvori točkasti naboj u vakuumu (Coulombov zakon za vakuum). Polje ima sfernu simetriju: $E_r = E(r)$; $E_\vartheta = 0$; $E_\varphi = 0$. Zbog toga ćemo kao Gaussovu površinu odabrati sferu sa središtem u naboju q i primijeniti Gaussov zakon (na toj će sferi polje biti konstantno):



$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{r}_o\,dS = \oint\!\!\!\oint_S E_r\,dS = E_r\oint\!\!\!\oint_S dS =$$

$$= E_r 4\pi r^2 = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q \Longrightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

b) Polje beskonačne ravnomjerno nabijene ravnine će (u izotropnom dielektrikumu) biti usmjereno okomito na nju. Odaberimo stoga kao Gaussovu površinu, plašt kocke kao što je prikazano na slici. (Napomeni-



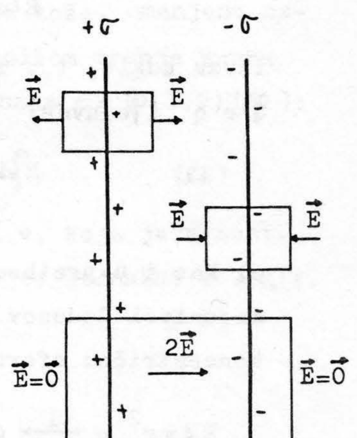
mo da smo isto tako mogli odabrati bilo kakvu površinu čiji je jedan dio okomit na ravninu, a drugi paralelan s njom, npr. cilindar.) Neka je površina pojedine njene plohe P. Komponenta polja okomita na plohe koje sijeku ravninu je očito jednaka nuli tako da će jedini doprinosi Gaussovog integrala potjecati od ploha paralelnih s ravninom. A budući da je naboj koji zatvara oplošje kocke jednak σP, Gaussov teorem će dati:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, dS = E P + E P = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\sigma P$$

odakle je polje (usp. zadatak 166.b)):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

c) Iz rezultata u prethodnoj točki vidimo da polje beskonačne ravnine ne ovisi o udaljenosti od nje. Prema tome će vrijednost polja na vanjskim plohama kocke koja prolazi objema pločama kondenzatora biti dana vektorskim zbrojem poljâ pojedinih ravnina, tj. biti jednaka nuli. Između ploča, kao što se možemo uvjeriti odvojenom primjenom "Gaussovih kocaka" na svaku pojedinu ploču, će polje imati dvostruku vrijednost od one za pojedinačne ploče. Dakle (usp.zad.168.):

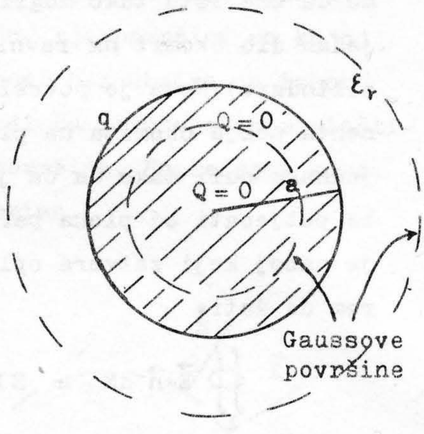


$$E(\text{između ploča}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad ; \quad E(\text{izvan ploča}) = 0$$

d) Problem je, kao i a), sferno simetričan, tako da polje ima samo radijalnu komponentu nejednaku nuli:

$E_r = E(r)$; $E_{\vartheta} = 0$; $E_{\varphi} = 0$;

Primijenivši Gaussov teorem na sfernu površinu, koncentričnu nabijenoj kugli, dobit ćemo, kao i u slučaju a):



$$E\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} Q$$

Unutar kugle, koja je vodič, dakle za $r < a$, $Q = 0$, tj. nema naboja, i prema tome:

$$E(\text{unutar vodljive kugle}) = 0$$

Izvan kugle, tj. za Gaussovu površinu za koju je $r > a$, $Q = q$ i odavde:

$$E(\text{izvan vodljive kugle}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{q}{r^2}$$

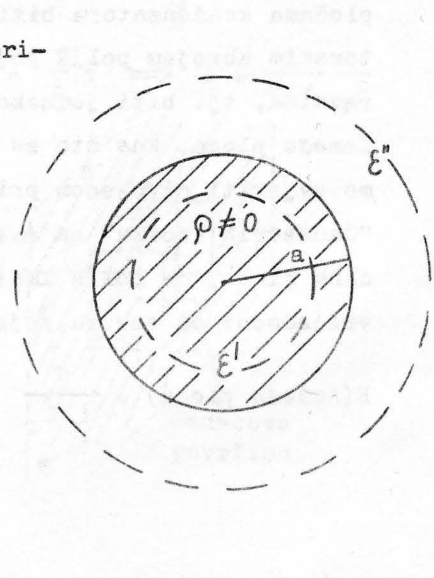
e) Kao i u prethodnom slučaju primijenivši Gaussov teorem na koncentričnu sferu dobivamo:

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} Q$$

Izvan kugle ($r > a$) $Q = q$

i odavde je:

$$E\left(\begin{matrix}\text{izvan nevod-}\\ \text{ljive kugle}\end{matrix}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon''} \frac{q}{r^2}$$



Unutar kugle ($r<a$) je naboj ravnomjerno volumno raspoređen po materijalu. Zbog toga će naboju Q doprinositi svi oni naboji raspoređeni po materijalu, koje je Gaussova sfera unutar kugle obuhvatila. A zbog ravnomjerne raspoređenosti naboja taj će dio, unutar sfere, biti dan omjerom volumena Gaussove sfere i volumena kugle. Dakle: $Q = q\,r^3/a^3$ i odavde:

$$E(\text{unutar nevodljive kugle}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon'}\frac{qr}{a^3}$$

18o. Kapljica će lebdjeti kad sila kojom električno polje kondenzatora $E = U/d$ djeluje na njen naboj bude izjednačena s njenom težinom umanjenom uzgonom (v. zadatak 117.):

$$G - A = Mg - \frac{\mu p Mg}{\rho RT} = \left(1 - \frac{30\cdot 10^5}{8310\cdot 300\cdot \rho}\right)Mg = \frac{\rho - 1,2}{\rho}Mg = Eq = \frac{U}{d}q \qquad (\pounds)$$

Nakon promjene polja ($E' = V/d$) će sila teže, umanjena uzgonom i silom na naboj biti uravnotežena silom trenja zraka po Stokesovoj formuli (gdje je uvedena oznaka $m = (\rho-1,2)M/\rho$):

$$E'q + mg = \frac{V}{d}q + mg = 6\pi r\eta v \qquad (\pounds\pounds)$$

Uvrštavanjem vrijednosti za q iz (£) i za v, koja je s obzirom na ravnotežno stanje (jednoliko gibanje) jednaka: $v = s/t$, u jednadžbu (££) dobivamo:

$$\frac{V}{d}\,\frac{mgd}{U} + mg = 6\pi r\eta\, s/t$$

$$m = \frac{6\pi r\eta s U}{(V+gU)t} = \frac{\rho-1,2}{\rho}M \qquad (\pounds\pounds\pounds)$$

Radijus kapljice određujemo iz izraza za njen volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M}{\varrho} \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\varrho}}$$

Uvrštavanjem u (£££) dobivamo masu kapljice:

$$M = 9\pi\varrho\sqrt{2\left[\frac{\eta s U}{(V+gU)(\varrho-1,2)t}\right]^3}$$

181. Budući da je sistem $C_1 + C_2$ (oznaka $C_{1,2}$) spojen u seriju sa C_3, na sistemu $C_{1,2}$ ćemo imati jednaki naboj kao i na C_3, a on se može naći iz jednadžbe:

$$q = C U$$

gdje je C kapacitet cjelokupnog sistema.

Za sistem paralelno spojenih kondenzatora kapacitet je:

$$C = C_{1,2,\dots,n} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

dok je za sistem kondenzatora spojenih u seriju jednak:

$$C = C_{1,2,\dots,n} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}}$$

U našem slučaju su kondenzatori C_1 i C_2 spojeni paralelno i prema tome je njihov ukupni kapacitet:

$$C_{1,2} = C_1 + C_2$$

Sistem $C_{1,2}$ je zatim spojen u seriju s C_3, odakle je kapacitet cijelog sistema:

$$C = C_{1,2,3} = \frac{1}{\frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_3}} = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Naboj cjelokupnog sistema, koji je ujedno, kao što smo rekli, i naboj na C_3 (kao i na $C_{1,2}$) je odavde:

$$q = q_3 = C\,U = \frac{(C_1 + C_2)C_3 U}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Za C_1 i C_2 vrijedi:

$$q_1 = U_{AB}C_1 \qquad q_2 = U_{AB}C_2 \tag{£}$$

Budući da znamo napon izvora, U, to U_{AB} možemo naći iz:

$$U = U_{AB} + U_{CA} = U_{AB} + \frac{q_3}{C_3} = U_{AB} + \frac{q}{C_3}$$

kao:

$$U_{AB} = U - \frac{q}{C_3} = U - \frac{(C_1 + C_2)U}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{C_3 U}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Uvrštavajući U_{AB} u (£) nalazimo iznose preostala dva naboja:

$$q_1 = \frac{C_1 C_3 U}{C_1 + C_2 + C_3} \quad ; \quad q_2 = \frac{C_2 C_3 U}{C_1 + C_2 + C_3}$$

182. Nakon nabijanja na gornju ploču će djelovati: sila teža G, sila elektrostatskog privlačenja F_e i u suprotnom smjeru Arhimedova sila A:

$$G + F_e = A$$

Sila teža je određena pomoću:

$$G = mg = \rho V g = \pi r^2 h \rho g$$

gdje je V volumen ploče. Silu elektrostatskog privlačenja određujemo na osnovu slijedećeg zaključivanja. Sila koja djeluje na jednu ploču je $F_e = qE$, gdje je E polje koje tvori druga ploča. U zadatku 166.b) (iz Coulombovog zakona),odnosno zadatku 179.b) (iz Gaussovog zakona) smo našli da je:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

Budući da je $q = \sigma S$, gdje je S površina ploče, dobivamo:

$$F_e = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\pi r^2 \sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

Arhimedova sila je (Arhimedov zakon) po iznosu jednaka težini tekućine ili plina koju istisne tijelo ili dio tijela uronjen u njih, a usmjerena je vertikalno uvis i ima hvatište u težištu tijela. Njen iznos će, u našem slučaju biti:

$$A = \rho' V' g = \rho' S \Delta h\, g = \rho' \pi r^2 \Delta h\, g$$

gdje je V′ volumen uronjenog dijela ploče, a Δh dio debljine ploče, koji je uronjen u dielektrikum.

Ravnotežnu jednadžbu sila možemo, dakle, pisati kao:

$$\pi \rho r^2 h g + \frac{\pi r^2 \sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \rho' \pi r^2 \Delta h$$

i iz nje dobiti da je ploča uronila za:

$$\Delta h = \frac{1}{\rho'}\left(\rho h + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon g}\right)$$

183. $F = \frac{I}{e}\sqrt{(2eU + m_e v_o^2)m_e}$ (Za e i m_e v. zadatak 159.);

184. $\bar{v} = 0{,}0028\ m/s$; **185.** a) $t = 13$ min ; b) $t = 3{,}1$ min;

186. $R = 5{,}49\,\Omega$; **187.** $I_1 = 0$ A, $I = I_2 = 0{,}04$ A ;

188. $q = \dfrac{(C_2R_2 - C_1R_1)\mathcal{E}C}{(C_1 + C_2)(R_1 + R_2)}$;

189. Struja se definira kao količina naboja koja u jedinici vremena prođe kroz promatrani presjek:

$$I = \frac{q}{t}$$

Međutim, elektron neće, gibajući se oko jezgre, proći isključivo jedampat kroz promatrani presjek u toku jedinice vremena. Dakle, ako sa n označimo broj okretaja elektrona oko jezgre u jedinici vremena, odnosno sa N broj okretaja u toku vremena t, struju ćemo moći izraziti kao:

$$I = \frac{q}{t} = \frac{eN}{t} = e\,n = e\,\frac{v}{2\pi r}$$

gdje je v brzina gibanja elektrona po orbiti, r radijus orbite i e naboj elektrona.

Prilikom rotacije je Coulombovska sila između jezgre i elektrona uravnotežena centrifugalnom silom:

$$F_{Coul.} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = F_{cf} = \frac{mv^2}{r}$$

gdje je m masa elektrona (za njen iznos kao i za iznos naboja elektrona e, v. zadatak 159.). Odavde je:

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 r m}}$$

Uvrštavanjem tog izraza u gornju formulu za I dobivamo:

$$I = \frac{e^2}{4\pi r\sqrt{\pi\varepsilon_0 r m}} = 1{,}05\cdot10^{-3}\ \text{A}$$

190. Prilikom naglog zaustavljanja vodiča, slobodni elektroni se nastoje dalje gibati uzduž vodiča ali ubrzo bivaju zaustavljeni otporom unutar njega. Takvo gibanje i zaustavljanje elektrona predstavlja, zapravo, prolazak struje kroz vodič, otpora R koja, prema Jouleovom zakonu, vrši rad:

$$A = UIt = I^2Rt$$

Struja, naravno, neće biti postojana. Pretpostavljajući da se ona ravnomjerno smanjuje do nule, možemo srednji naboj u vodiču izraziti kao:

$$q = \frac{1}{2} It$$

Prema tome je:

$$A = 2qIR \qquad (\pounds)$$

S druge strane taj isti rad možemo izraziti pomoću promjene kinetičke energije slobodnih elektrona u vodiču, ΔW_k, do koje dolazi kad elektroni usporavaju od v_o do 0. Dakle, ako je N broj slobodnih elektrona u vodiču, onda je rad:

$$A = -N\Delta W_k = -N\Delta(\frac{mv^2}{2}) = N\frac{mv_o^2}{2} \qquad (\pounds\pounds)$$

Izrazimo sada, da bismo dobili usporedljive veličine, struju u formuli (£) pomoću gustoće toka elektrona:

$$I = jS = env_oS$$

gdje je j gustoća toka elektrona, e naboj elektrona (v. zadatak 159.), S površina poprečnog presjeka vodiča i n broj slobodnih elektrona u jedinici volumena koji se može izraziti kao:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N}{lS}$$

gdje je V volumen, a l duljina vodiča.

Uvrštavanje dobivenih vrijednosti u (£) i izjednačavanje s (££) daje srednji naboj u vodiču:

$$q = \frac{m v_o l}{4 e R}$$

No, otpor vodiča se može izraziti kao :

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

gdje je ρ specifični otpor materijala vodiča, odakle dobivamo konačni oblik za q:

$$q = \frac{m v_o S}{4 e \rho}$$

191. Za rješavanje ovog problema iskoristit ćemo tzv.:

Faradayev zakon elektrolize Prilikom prolaza struje I kroz elektrolit, masa m materije koja se taloži na jednoj od elektroda proporcionalna je naboju q koji prolazi kroz elektrolit:

$$m = k I t = k q$$

gdje je $k = \frac{A}{n} \frac{1}{F}$ elektrokemijski ekvivalent materije, $\frac{A}{n}$ kemijski ekvivalent materije, A atomska masa materije, n valentnost materije i $F = 9{,}67 \cdot 10^7$ C / kmol Faradayev broj.

Kad su kade spojene u seriju kroz njih će teći jednaka struja pa će nam za jednaka vremena Faradayev zakon dati:

$$m_1 = \frac{1}{F} \frac{A_1}{n_1} I t \qquad m_2 = \frac{1}{F} \frac{A_2}{n_2} I t$$

gdje su m_1 (m_2), n_1 (n_2), A_1 (A_2) : masa, valentnost i atomska masa željeza (bakra). Dijeljenjem jedne jednadžbe drugom i uvrštavanjem vrijednosti (v. zadatke 17o. i 184. za atomske mase, a kemijske formule otopine za valentnosti) dobivamo traženu masu bakra:

$$m_2 = m_1 \frac{A_2 n_1}{A_1 n_2} = m_1 \frac{64 \cdot 3}{56 \cdot 2} = 1{,}71\ m_1$$

192. Za zatvoreni strujni krug Ohmov zakon glasi:

$$\mathcal{E} = I(r + R)$$

gdje je $\mathcal{E}$ elektromotorna sila izvora, r unutrašnji otpor (otpor izvora) i R vanjski otpor.

Kad je n izvora, jednakih elektromotornih sila $\mathcal{E}$ s jednakim unutrašnjim otporima r spojeno u seriju, njihova je ukupna elektromotorna sila i ukupni unutrašnji otpor:

Ser.: $\mathcal{E}_{uk} = n\mathcal{E}$; $r_{uk} = nr$

dok u slučaju paralelnog spajanja navedenih n izvora vrijedi:

Par.: $\mathcal{E}_{uk} = \mathcal{E}$; $r_{uk} = \frac{r}{n}$

Dakle, u slučaju izvora spojenih u seriju, Ohmov zakon glasi:

$$I_{ser}(2r + R) = 2\mathcal{E}$$

(za $n = 2$ - u našem primjeru), a u slučajů paralelno spojenih:

$$I_{par}\left(\frac{r}{2} + R\right) = \mathcal{E}$$

Odavde ćemo za dane vrijednosti imati:

a) $I_{ser} = \dfrac{2\cdot 2}{2\cdot 0{,}3 + 0{,}2} = 5\ \mathrm{A}$; $I_{par} = 5{,}7\ \mathrm{A}$;

b) $I_{ser} = 0{,}24\ \mathrm{A}$; $I_{par} = 0{,}124\ \mathrm{A}$.

Vidimo da je za mali vanjski otpor izvore bolje spajati paralelno, a za veliki u seriju.

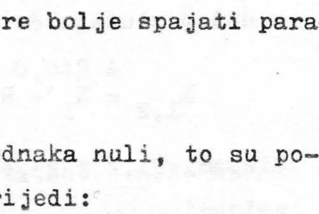
193. Budući da je u grani 2-4 struja jednaka nuli, to su potencijali u točkama 2 i 4 jednaki, pa vrijedi:

$$U_1 = U_3 \quad ; \quad U_2 = U_4 \qquad (£)$$

gdje su U_1, U_2, U_3, U_4 padovi napona na otporima R_1, R_2, R_3, R_4, respektivno.

Jednakosti (£) se mogu napisati i u obliku:

$$I_1 R_1 = I_3 R_3 \quad ; \quad I_1 R_2 = I_3 R_4 \qquad (££)$$



(Primjedba: Budući da je u grani 2-4 struja jednaka nuli, bit će, očito, struje u granama 1-2 i 2-3 međusobno jednake, isto kao i u 1-4 i 4-3, tako da su od samog početka izostavljene oznake I_2 za struju u grani 2-3 i I_4 za struju u grani 4-3, koje bi bile u upotrebi da most nije bio uravnotežen; v. sl.)

Iz jednadžbi (££) dobivamo:

$$R_4 = R_2 \frac{R_3}{R_1} = 500\,\Omega$$

Nađimo sada ukupan otpor u trokutu. Otpori R_1 i R_2, kao i R_3 i R_4 su spojeni u serije $R_{1,2}$ i $R_{3,4}$. Budući da je ukupan otpor otpora spojenih u seriju:

$$R = R_{1,2,\ldots,n} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

u našem slučaju će biti:

$$R_{1,2} = R_1 + R_2 \quad ; \quad R_{3,4} = R_3 + R_4$$

Sistemi R1,2 i R3,4 su zatim spojeni paralelno, kad općenito vrijedi:

$$R = R_{1,2,\ldots,n} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} R_i}$$

tako da je ukupni otpor u trokutu:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_{1,2}} + \frac{1}{R_{3,4}}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 1o4.35\,\Omega$$

Za cjelokupni krug moramo uzeti u razmatranje i unutarnji otpor izvora r, odakle je:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)\mathcal{E}}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + r(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}$$

Uvrštavajući vrijednosti dobivamo: I = 0,056 A.

Da bismo našli I_1 i I_3 koristit ćemo 1. Kirchhoffov zakon za čvor 1:

$$I = I_1 + I_3$$

i jednadžbu (££):

$$I_1 = I_3 \frac{R_3}{R_1}$$

odakle je:

$$I_3 = \frac{I\,R_1}{R_1 + R_3} = 0{,}007\ \mathrm{A}$$

$$I_1 = I - I_3 = \frac{I\,R_3}{R_1 + R_3} = 0{,}049\ \mathrm{A}$$

194. Navedena shema, kao i ona iz zadatka 187. može se riješiti samo istovremenom primjenom oba Kirchhoffova zakona:

1. Kirchhoffov zakon za konturu B$\mathcal{E}_1$AB:

$$I_1 r_1 + IR = \mathcal{E}_1$$

1. Kirchhoffov zakon za konturu B$\mathcal{E}_2$AB

$$I_2 r_2 + IR = \mathcal{E}_2$$

2. Kirchhoffov zakon za čvor A:

$$I_1 + I_2 = I$$

Na taj način dobivamo sistem od 3 jednadžbe s 3 nepoznanice čija su rješenja:

$$R = \frac{r_2(\mathcal{E}_1 - I_1 r_1)}{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) + I_1(r_1 + r_2)} = \frac{2}{3}\,\Omega$$

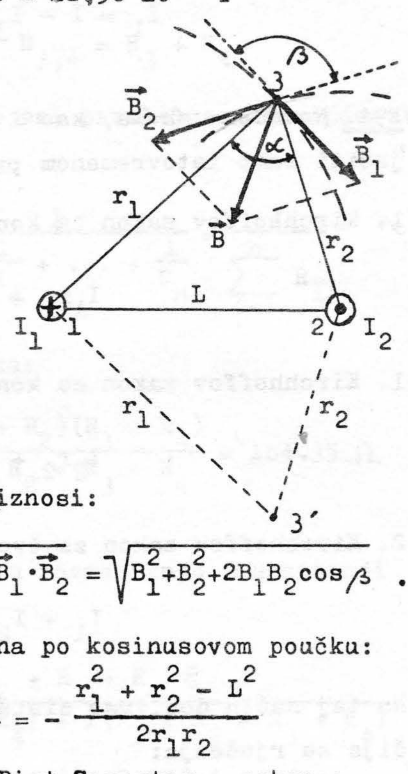
$$I = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + I_1 r_1 + I_1 r_2)/r_2 = 1{,}5\ \text{A}$$

$$I_2 = I - I_1 = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + I_1 r_1)/r_2 = 0{,}5\ \text{A}$$

195. $r = 0{,}08$ m ; **196.** D: AD = 3,3 cm , DB = 1,7 cm ;

197. $\mathcal{E}_{max} = 2\pi\nu BS$; **198.** $\mathcal{E} = 0{,}156$ V

199. $\mathcal{E} = 1{,}1\cdot 10^{-5}$ V ; **2oo.** $B = 12{,}56\cdot 10^{-3}$ T



2o1. Indukcija u točki 3 (uvjete zadatka zadovoljava i točka 3', ali se $|\vec{B}'|$ u njoj ne razlikuje od $|\vec{B}|$ u točki 3) iznosi:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

gdje su $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ vektori magnetske indukcije od I_1 i I_2.

Modul magnetske indukcije $|\vec{B}|$ iznosi:

$$|\vec{B}| = \sqrt{(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2\vec{B}_1\cdot\vec{B}_2} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\beta}\ .$$

$\cos\beta$ dobivamo iz zadanih veličina po kosinusovom poučku:

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha = -\frac{r_1^2 + r_2^2 - L^2}{2r_1r_2}$$

Indukcije B_1, B_2 ćemo dobiti iz Biot-Savartova zakona:

$$B_1 = \mu_0 I_1/(2\pi r_1)\ ; \quad B_2 = \mu_0 I_2/(2\pi r_2)$$

Uvrštavanje daje:

$$B = \frac{\mu_o}{2\pi r_1 r_2}\sqrt{I_1^2 r_2^2 + I_2^2 r_1^2 - I_1 I_2 (r_1^2 + r_2^2 - L^2)}$$

2o2. Ako otpor vodiča izrazimo kao:

$$R = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{2\pi\rho r}{S}$$

napon će, prema Ohmovom zakonu, biti:

$$U = 2\pi\rho I \frac{r}{S} \qquad (\text{£})$$

gdje je r radijus prstena, S presjek vodiča i ρ gustoća bakra (v. zadatak 17o.).

Po Biot-Savartovu zakonu je indukcija polja u centru kružnog toka (prstena):

$$B = \frac{\mu_o I}{2r}$$

odakle je:

$$r = \frac{\mu_o I}{2B}$$

što nakon uvrštavanja u (£) daje traženi napon:

$$U = \frac{\mu_o \pi I^2 \rho}{BS}$$

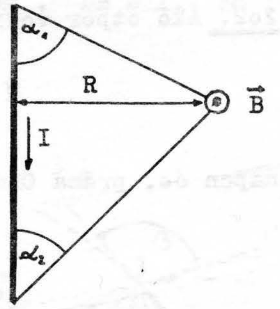
2o3. Magnetska indukcija u centru kružnog toka iznosi (Biot--Savartov zakon):

$$B_1 = \frac{\mu_o I}{2\, r}$$

Magnetska indukcija u centru kvadrata je jednaka sumi indukcija svake pojedine stranice. Budući da je ukupna dužina vodiča ostala nepromijenjena, zbroj dužina stranica kvadrata će biti jednak opsegu kruga:

$$4a = 2\pi r \ .$$

Općenito, indukcija koju tvori struja I koja teče kroz ravni vodič konačne dužine, u nekoj točki, koja je za R udaljena od vodiča, je:



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

sa značenjima i smjerovima veličina prema slici.

U našem slučaju je $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ jer je tražena točka u sredini kvadrata. Prema tome je doprinos svake pojedine stranice indukciji u centru:

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} 2\cos 45^0 = \frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{\pi^2 r} \qquad (R = \frac{a}{2})$$

Ukupna indukcija u centru je, dakle:

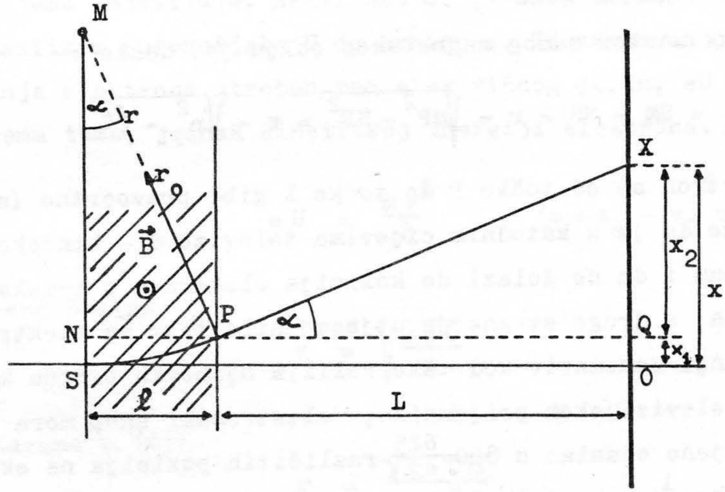
$$B_2 = 4\frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{\pi^2 r}$$

Ako napravimo omjer:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2} = 1{,}14$$

dobili smo kao rezultat da strujna petlja kvadratičnog oblika daje indukciju koja je 1.14 puta veća od indukcije koju daje petlja kružnog oblika, uz jednaku struju.

2o4.



Na nabijenu česticu, magnetsko polje indukcije B u području ℓ djeluje Lorentzovom silom:

$$F = q\vec{v}\times\vec{B} = q\,v\,B\sin(\vec{v},\vec{B})\,\vec{r}_o$$

Lorentzova sila uvijek djeluje pod pravim kutom na vektore $\vec{v}$ i $\vec{B}$, pa prema tome ne može vršiti rad, tj. ne može izmijeniti kinetičku energiju slobodno gibajućih naboja u magnetskom polju. Ona može samo promijeniti smjer brzine slobodnih naboja, tj. ona je centripetalna sila. U našem slučaju, kad je $\vec{v}\perp\vec{B}$, možemo, dakle, uspostaviti jednakost (uzimajući u obzir da je q = e - naboj elektrona - elementarni naboj; za njegovu numeričku vrijednost v. zadatak 159.):

$$e\,v\,B = \frac{m\,v^2}{r}$$

odakle dobivamo:

$$r = \frac{mv}{eB} \qquad (\pounds)$$

Pomak unutar samog magnetskog polja je, dakle :

$$x_1 = SM - SN = r - \sqrt{MP^2 - NP^2} = r - \sqrt{r^2 - \ell^2}$$

Elektron se od točke P do točke X giba pravocrtno (sjetite se da je u katodnim cijevima televizorâ - kineskopima - vakuum i da ne dolazi do kolizija elektrona s molekulama plina; s druge strane je utjecaj sile teže na elektrone u gibanju zanemariv kod tako velikih njihovih brzina kao što su u televizijskom prijemniku; elektronski snop mora biti odvojeno odaslan u $800 \cdot \frac{625}{2}$ različitih pozicija na ekranu u toku $\frac{1}{50}$ sekunde). Pravac PX zatvara s ulaznim pravcem SO (odnosno PQ) kut α koji je, zapravo, zakret Lorentzove sile unutar magnetskog polja. Prema tome su trokuti MPN i XPQ sukladni i vrijedi:

$$\frac{XQ}{PQ} = \frac{x_2}{L} = \frac{NP}{NM} = \frac{\ell}{\sqrt{r^2 - \ell^2}}$$

odakle dobivamo:

$$x_2 = \frac{\ell L}{\sqrt{r^2 - \ell^2}}$$

tako da je ukupan otklon elektrona:

$$x = x_1 + x_2 = r - \sqrt{r^2 - \ell^2} + \frac{\ell L}{\sqrt{r^2 - \ell^2}} = r + \frac{L\ell - r^2 + \ell^2}{\sqrt{r^2 - \ell^2}}$$

Ostaje nam još odrediti radijusvektor r. To ćemo učiniti pomoću izraza (£) nakon što prethodno odredimo v koji se u njemu pojavljuje. Rekli smo da je snop elektrona ubrzan razlikom potencijala U do brzine v. To znači da je na ubrzanje elektrona utrošen rad električnog polja, eU. On je, prema tome, jednak kinetičkoj energiji elektrona:

$$eU = \frac{mv^2}{2} \qquad (m = m_e \text{ - v. zad.159.})$$

Dobivenu brzinu:

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

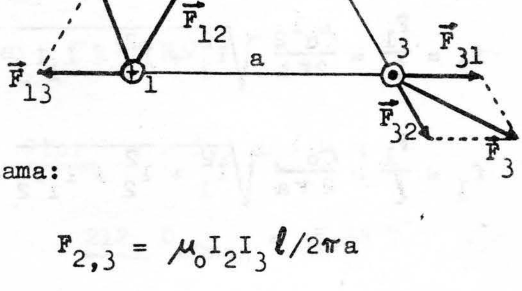
uvrštavamo u (£):

$$r = \frac{\sqrt{2eUm}}{eB}$$

odakle je:

$$x = \frac{1}{B\sqrt{e}}\left(\sqrt{2Um} + \frac{eB^2\ell(L+\ell) - 2Um}{\sqrt{2Um - e\ell^2B^2}}\right)$$

2o5. Vodiči 1 i 2 se međusobno privlače silom:



$$F_{1,2} = |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi a}$$

Vodiči 1 i 3, te 2 i 3 se međusobno odbijaju silama:

$$F_{1,3} = \mu_0 I_1 I_3 \ell/2\pi a \qquad F_{2,3} = \mu_0 I_2 I_3 \ell/2\pi a$$

205.

Vektorskim zbrajanjem dobivamo sile koje djeluju na svaki pojedini vodič:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{12} \quad ; \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} \quad ; \quad \vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$$

Modul sile $\vec{F}_1$ je:

$$F_1 = |\vec{F}_1| = \sqrt{F_{1,3}^2 + F_{1,2}^2 + 2\vec{F}_{13}\cdot\vec{F}_{12}} =$$

$$= \sqrt{F_{1,3}^2 + F_{1,2}^2 + 2F_{1,3}F_{1,2}\cos(\vec{F}_{13},\vec{F}_{12})} =$$

$$= \sqrt{F_{1,3}^2 + F_{1,2}^2 + 2F_{1,3}F_{1,2}\cos 120^\circ} = (\cos 120^\circ = -\tfrac{1}{2}) =$$

$$= \sqrt{F_{1,2}^2 + F_{1,3}^2 - F_{1,2}F_{1,3}}$$

Analogno je i za F_2 i F_3, s tim što je kod F_3 kut između komponentnih sila ($\vec{F}_{31}$ i $\vec{F}_{32}$) jednak 60° pa će treći član pod korijenom imati predznak "+" jer je $\cos 60^\circ = +\frac{1}{2}$.

Dakle, sila koja djeluje na jedinicu dužine svakog od pojedinih vodiča jednaka je:

$$f_1 = \frac{F_1}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\sqrt{I_2^2 + I_3^2 - I_2 I_3}$$

$$f_2 = \frac{F_1}{\ell} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\sqrt{I_1^2 + I_3^2 - I_1 I_3}$$

$$f_3 = \frac{F_1}{\ell} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi a}\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_1 I_2}$$

2o6. Svakom promjenom magnetskog toka, unutar neke konture presjeka S, inducira se u konturi elektromotorna sila:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Tok magnetskog polja Φ kroz neku konturu presjeka S definira se kao:

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \vec{B}\cdot\vec{n}\,S = B\,S\cos(\vec{B},\vec{n})$$

gdje je $\vec{n}$ normala na površinu S.
Budući da je u našem slučaju jedina veličina koja se mijenja tokom vremena - nagib površine S, odnosno normale $\vec{n}$, s obzirom na $\vec{B}$, to je jedino član $\cos(\vec{B},\vec{n})$ odgovoran za promjenu toka. No, on se može pisati i kao $\cos\omega t$, gdje je ω kutna brzina rotacije solenoida, tako da je (kad uzmemo u obzir i to da solenoid ima N navoja, tj. N površina presjeka S) promjena toka:

$$d\Phi = N\,B\,S\cdot d[\cos\omega t] = -\,N\,B\,S\omega\sin\omega t\;dt$$

a inducirana elektromotorna sila:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = N\,B\,S\omega\sin\omega t$$

Maksimalnu vrijednost će $\mathcal{E}$ postići za $\sin\omega t = 1$:

$$\mathcal{E}_{max} = B\,S\,N\omega = 2\pi B\,S\,N\nu$$

2o8. $\mathcal{E} = \mu_0\frac{N\,I\,S}{l\Delta t}$; 21o. $v = 0{,}5$ m/s ;

211. $n_1 = 4\,n_2$; 212. $U_{ADmax} = 35{,}36$ V ;

213. Trenutačni napon na priključcima neonske cijevi je:

$$u = U_{max} \sin \omega t = U_{max} \sin 2\pi \nu t \qquad (\pounds)$$

Napon gradske mreže se izražava efektivnim iznosom napona U, a kako za sinusne struje općenito vrijedi:

$$U = U_{ef} = U_{max}/\sqrt{2}$$

u našem slučaju će maksimalan napon biti:

$$U_{max} = \sqrt{2}\, U = \sqrt{2}\, 220 = 313.13 \text{ V}$$

Na taj je način trenutačna vrijednost napona na priključcima cijevi u određena u svakom trenutku t izrazom (£). Budući da je to periodična funkcija, tj. budući da se vrijednosti napona periodički ponavljaju mi ćemo problem riješiti prvo za jedan period. Jedan period T sinusne funkcije najmanji je broj >0 koji zadovoljava uvjet:

$$\sin(x + T) = \sin x$$

Prema tome je njegov iznos:

$$T = 2\pi$$

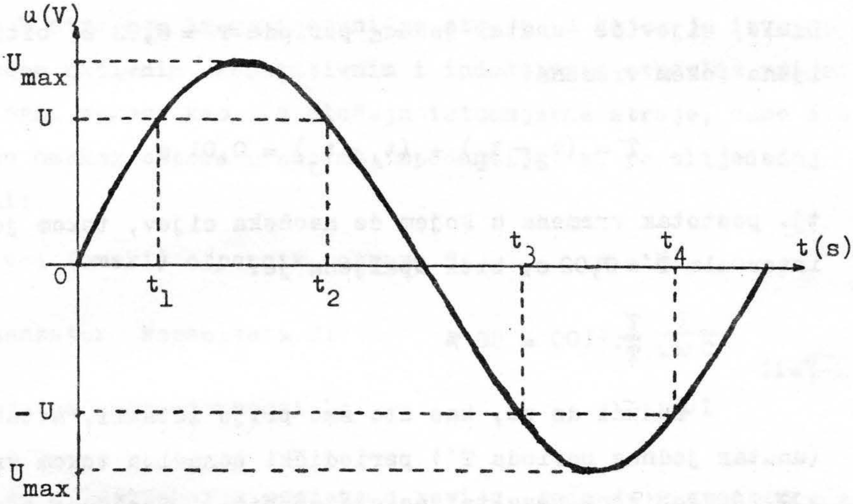
Dakle, za vrijeme T′, tj. za 1 period našeg oblika funkcije:

$$T' = \frac{2\pi}{2\pi\nu} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{ s}$$

će sinusna funkcija, tj. napon imati jednaku vrijednost kao i u t = 0 s.

Na osnovu dobivenih vrijednosti za U_{max} i T′ možemo napon, kao funkciju vremena, prikazati na slijedeći način:

213.



Ako na graf nanesemo napon paljenja, odnosno gašenja U, vidimo da će se neonska cijev upaliti u trenutku t_1, ugasiti u t_2, ponovo upaliti u t_3 i ponovo ugasiti u t_4. U vrijeme t_1, odnosno t_2, će trenutačna vrijednost napona u, na priključcima cijevi biti 220 V, odakle je, iz jednadžbe (£):

$$220 = U_{max} \sin 2\pi\nu t_{1,2} = \sqrt{2}\cdot 220 \sin 100\pi t_{1,2}$$

$$\Longrightarrow \sin 100\pi t_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \begin{cases} \Longrightarrow 100\pi t_1 = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow t_1 = 0{,}0025 \text{ s} \\ \Longrightarrow 100\pi t_2 = \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow t_2 = 0{,}0075 \text{ s} \end{cases}$$

Za $t_{3,4}$ ćemo iz:

$$-220 = \sqrt{2}\, 220 \sin 100\pi t_{3,4} \Longrightarrow \sin 100\pi t_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

dobiti:

$$t_3 = 0{,}0125 \text{ s} \quad ; \quad t_4 = 0{,}0175 \text{ s}$$

Dakle, cijev će unutar jednog perioda $T' = 0{,}02$ s biti upaljena tokom vremena:

$$\tau = (t_2 - t_1) + (t_4 - t_3) = 0{,}01 \text{ s}$$

tj. postotak vremena u kojem će neonska cijev, tokom jednog intervala $T' = 0{,}02$ s, biti upaljena je:

$$\frac{\tau}{T'} \cdot 100 = 50 \%$$

Budući da se, kao što smo prije istakli, situacija (unutar jednog perioda T') periodički ponavlja tokom vremena $t \gg T'$, dobiveni rezultat će ujedno biti i rješenje cjelokupnog problema.

Napomena: Uvjet $t \gg T'$ se podrazumijeva u formulaciji zadatka i u vezi s tim se zaključivanje od rezultata za jedan period na cjelokupno rješenje zasniva na slijedećem razmatranju. Ukoliko je vrijeme unutar kojeg promatramo ponašanje cijevi cjelobrojan umnožak osnovnog perioda: $t = n\,T'$ $(n = 1, 2, ..)$, onda će rješenje cjelokupnog problema biti egzaktno dano gornjim rezultatom za 1 period:

$$\frac{n\tau}{n\,T'} = \frac{\tau}{T'} = 50 \%$$

a ukoliko nije cjelobrojan umnožak, onda će cjelokupno rješenje biti utoliko bolje aproksimirano rezultatom za 1 period ukoliko je t veće od T':

$$\text{Postotak vremena} = \frac{n\tau}{(n+x)\,T'} \approx \frac{n\tau}{n\,T'} = \frac{\tau}{T'} = 50 \% \qquad \begin{matrix}(0 < x < 1)\\(n \gg 1)\end{matrix}$$

214. U strujnom krugu izmjenične struje, u kojem je izvor opterećen aktivnim, kapacitivnim i induktivnim otporima, vrijede analogni zakoni kao i u slučaju istosmjerne struje, samo što ulogu omskog otpora preuzima impedancija z, po slijedećoj shemi:

aktivni (omski) otpornik otpora R: $z = R$

kondenzator kapaciteta C: $z = \frac{1}{i\omega C}$ $(i=\sqrt{-1})$

zavojnica induktivnosti L: $z = i\omega L$

Ako je n impedancija spojeno u seriju, tada će ukupna impedancija biti:

$$z = z_1 + z_2 + \dots + z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$$ (i je indeks sumacije)

dok će u slučaju paralelnog spajanja iznositi:

$$z = \frac{1}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} z_i} .$$ (i je indeks sumacije)

Ohmov zakon za izmjeničnu struju trenutačnog napona u glasi:

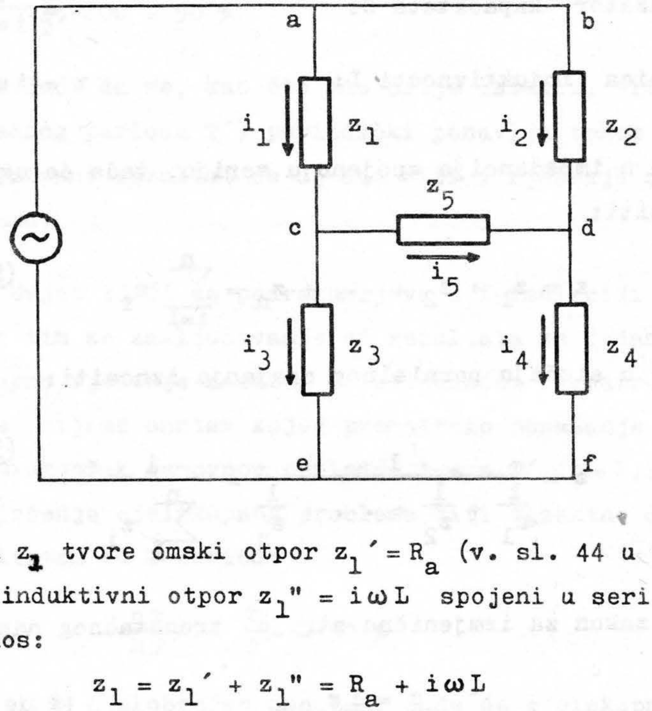
$$u = i\,z$$ (i je struja)

dok su Kirchhoffovi zakoni za izmjeničnu struju:

I Kirchhoffov zakon: $\sum\limits_{\text{po svakoj konturi}} u_i = 0$ (i je indeks sumacije)

II Kirchhoffov zakon: $\sum\limits_{u\ \check{c}voru} i_j = 0$ ($\underline{i}$ je struja) ($\underline{j}$ je indeks sumacije)

Pređimo sada na rješavanje našeg problema predstavivši prethodno shemu iz zadatka (sa slike 44.) u slijedećem obliku:



Impedanciju z_1 tvore omski otpor $z_1' = R_a$ (v. sl. 44 u tekstu zadatka) i induktivni otpor $z_1'' = i\omega L$ spojeni u seriju, pa je njen iznos:

$$z_1 = z_1' + z_1'' = R_a + i\omega L$$

Impedancije z_2, z_3 i z_5 su zapravo omski (aktivni) otpori R, R_D:

$$z_2 = R \quad ; \quad z_3 = R \quad ; \quad z_5 = R_D$$

dok impedanciju z_4 tvore paralelno spojeni kapacitivni otpor $z_4' = 1/i\omega C$ i omski otpor $z_4'' = R_b$ odakle je:

$$z_4 = \frac{1}{\frac{1}{z_4'} + \frac{1}{z_4''}} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R_b}}$$

Za pronalaženje međusobnog odnosa impedancija, na osnovu kojeg bismo mogli povezati L, R i C (što se traži u zadatku), ćemo iskoristiti Kirchhoffove zakone.

I Kirchhoffov zakon za konturu abdc daje:

$$i_1 z_1 + i_5 R_5 - i_2 z_2 = (i_5 = 0) = i_1 z_1 - i_2 z_2 = 0 \qquad (£)$$

a za konturu cdfe:

$$i_3 z_3 - i_4 z_4 - i_5 z_5 = i_3 z_3 - i_4 z_4 = 0 \qquad (££)$$

II Kirchhoffov zakon za čvor c daje:

$$i_1 - i_5 - i_3 = i_1 - i_3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad i_1 = i_3$$

a za čvor d:

$$i_5 + i_2 - i_4 = i_2 - i_4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad i_2 = i_4$$

Kad se posljednja dva rezultata uvrste u jednadžbe (£) i (££) one poprimaju oblik:

$$i_1 z_1 = i_2 z_2 \quad ; \quad i_1 z_3 = i_2 z_4$$

Podijelivši prvu jednadžbu drugom dobivamo:

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{i\omega L + R_a}{R} = \frac{z_2}{z_4} = R(i\omega C + \frac{1}{R_b})$$

odnosno:

$$R_a - R^2/R_b + i\omega(L - R^2C) = 0$$

Imaginarni dio posljednje jednadžbe daje traženi rezultat:

$$L = R^2C$$

215. Aktivni (omski) otpor vodiča zavojnice je:

$$R = \frac{\rho L'}{S}$$

gdje je L′ dužina vodiča, S ploština presjeka vodiča i $\rho = \rho_{Cu}$ specifičan otpor (bakrenog) vodiča. Budući da je duljina jednog navoja $2\pi r$, to R možemo izraziti kao:

$$R = \rho \frac{2\pi N r}{S}$$

Induktivnost zavojnice je općenito dana izrazom:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S'}{d}$$

koji u našem slučaju, s obzirom na $S' = \pi r^2$, glasi:

$$L = \mu_0 \frac{\pi N^2 r^2}{d}$$

Zavojnicu koja pruža aktivni otpor struji možemo shvatiti kao dva otpora, indukcijski i aktivni, spojena u seriju čija je impedancija onda:

$$z = R + i\omega L$$

Njoj odgovara iznos ukupnog otpora:

$$Z = |z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 \nu^2 L^2}$$

Traženi omjeri su:

$$\frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{2\pi\nu L}{R}\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\mu_0\pi\nu N r S}{\rho d}\right]^2}}$$

$$\frac{|z_L|}{Z} = \frac{|i\omega L|}{Z} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\rho d}{\mu_0\pi\nu N r S}\right]^2}}$$

216. Po prvom Kirchhoffovom zakonu će suma napona u konturi (koja se sastoji od napona na kondenzatoru u, induciranog napona na zavojnici $-L\frac{di}{dt}$ i pada napona na aktivnom otporu $-iR$) biti jednaka nuli:

$$u - L\frac{di}{dt} - iR = 0 \qquad (\pounds)$$

Jakost struje i ovisi o smanjenju naboja na kondenzatoru:

$$i = -\frac{dQ}{dt}$$

a budući da je naboj na kondenzatoru jednak:

$$Q = uC$$

struja se može izraziti kao:

$$i = -C\frac{du}{dt}$$

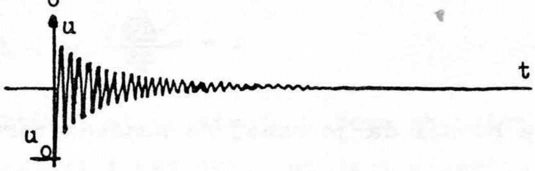
Uvrštavajući taj izraz za struju u jednadžbu ($\pounds$) dobit ćemo (diferencijalnu) jednadžbu koja će nam opisivati promjenu napona u krugu u toku vremena:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{u}{L\cdot C} = 0 \qquad (££)$$

Kakvo rješenje možemo fizikalno očekivati? S obzirom na činjenicu da krug sadrži kondenzator i zavojnicu u njemu će doći do harmoničkih oscilacija matematski opisivih trigonometrijskim funkcijama. Dakle, rješenje će svakako sadržavati funkciju $\cos\omega t$ (ili $\sin\omega t$), gdje je ω kružna frekvencija spomenutih oscilacija (titraja). S druge strane na aktivnom otporu dolazi do zagrijavanja materijala, tj. do pretvorbe električne energije u toplinsku, tj. do smanjenja energije titranja. Zbog toga će doći do smanjenja amplitude titranja tokom vremena, odnosno do tzv. prigušenog titranja, što se matematski može opisati eksponencijalnom (trnućom) funkcijom, $e^{-a\cdot t}$. Prema tome, rješenje možemo prikazati u obliku:

$$u = u_o e^{-at}\cos\omega t \qquad (£££)$$

čiji je grafički prikaz:



Konstante a i ω ćemo odrediti uvrštavanjem izraza (£££) u jednadžbu (££). Izračunajmo prethodno prvu i drugu derivaciju funkcije u iz (£££) koje zahtijeva jednadžba (££):

$$\frac{du}{dt} = - a u_o e^{-at}\cos\omega t - \omega u_o e^{-at}\sin\omega t$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 u_o e^{-at} \cos \omega t + 2a\omega u_o e^{-at} \sin \omega t - \omega^2 u_o e^{-at} \cos \omega t$$

Uvrštavajući ih u jednadžbu (££) dobivamo:

$$u_o e^{-at} \left[(a^2 - \omega^2 + \frac{1}{LC} - \frac{R}{L} a) \cos \omega t + (2a - \frac{R}{L}) \omega \sin \omega t \right] = 0$$

Da bi ta jednadžba bila zadovoljena za svaki t moraju koeficijenti uz $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ biti jednaki nuli. Iz tog zahtjeva proizlazi:

$$a = \frac{R}{2L} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - a^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Prema tome je frekvencija titrajnog kruga u prisutnosti zadanog otpora jednaka:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 132 \text{ Hz}$$

U slučaju smanjenja otpora na nulu frekvencija će biti određena Thomsonovom formulom i iznositi:

$$\nu' = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 148 \text{ Hz}$$

Razlika između neprigušenog i prigušenog titranja će, dakle, biti:

$$\Delta \nu = \nu' - \nu = 16 \text{ Hz}$$

217. Induktivnost zavojnice je određena izrazom:

$$L = \mu \mu_o \frac{N^2 S}{d}$$

gdje je N broj navoja zavojnice, S presjek zavojnice i d dužina zavojnice. U našem slučaju, neka L_1 označuje induktivnost prve, a L_2 induktivnost druge zavojnice:

$$L_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1^2 S}{d} \quad ; \quad L_2 = \mu\mu_0 \frac{N_2^2 S}{d}$$

gdje se podrazumijeva da su presjeci i dužine obadviju zavojnica jednaki, budući da su namotane na zajedničku jezgru. Uzajamna indukcija takvih zavojnica je:

$$L_{12} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{d} \tag{£}$$

Množeći L_1 s L_2 dobivamo:

$$L_1 L_2 = \mu^2 \mu_0^2 \frac{N_1^2 N_2^2 S^2}{d^2}$$

odakle je:

$$N_1 N_2 = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\mu\mu_0 S} d$$

Uvrštavanje tog izraza u (£) daje:

$$L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Napon induciran u drugoj zavojnici, prolaskom struje kroz prvu, je:

$$U_2 = - L_{12} \frac{dI_1}{dt} .$$

Odavde, koristeći Ohmov zakon: $U = IR$ dobivamo srednju vrijednost struje u drugoj zavojnici:

$$I_2 = \frac{U_2}{R} = \frac{L_{12}}{R}\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R}\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Uvrštavajući zadane numeričke vrijednosti dobivamo:

$$I_2 = 0{,}37 \text{ A}$$

218. Kapacitet dvaju kondenzatora, spojenih u seriju je:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Odgovarajući kapacitivni otpor u krugu je:

$$|z_C| = \frac{1}{\omega C} = \frac{C_1 + C_2}{\omega C_1 C_2}$$

Struja u krugu je, dakle, po Ohmovom zakonu (za efektivne vrijednosti):

$$I = \frac{U}{|z_C|} = \frac{2\pi\nu U C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 0{,}009 \text{ A}$$

Padovi napona na svakom od kondenzatora su:

$$U_1 = I|z_{C_1}| = \frac{I}{\omega C_1} = \frac{\omega U C_1 C_2}{(C_1 + C_2)\omega C_1} = \frac{U C_2}{C_1 + C_2} = 73{,}3 \text{ V}$$

$$U_2 = I|z_{C_2}| = \frac{I}{\omega C_2} = \frac{U C_1}{C_1 + C_2} = U - U_1 = 146{,}7 \text{ V}$$

Dodatak

PREGLED JEDINICA

VELIČINA	DIMEZIONA FORMULA		JEDINICE		
	SI i cgs	MKpS	SI	cgs	MKpS
Dužina	L	L	$\boxed{m}$	$\boxed{cm}$	$\boxed{m}$
Masa	M	$L^{-1}FT^2$	$\boxed{kg}$	$\boxed{g}$	$kp \cdot s^2/m$
Vrijeme	T	T	$\boxed{s}$	$\boxed{s}$	$\boxed{s}$
Kut	1	1	rad	rad	rad
Prostorni kut	1	1	sr	sr	sr
Brzina	LT^{-1}	LT^{-1}	m/s	cm/s	m/s
Akceleracija	LT^{-2}	LT^{-2}	m/s^2	cm/s^2	m/s^2
Kutna brzina	T^{-1}	T^{-1}	s^{-1}	s^{-1}	s^{-1}
Kutna akcel.	T^{-2}	T^{-2}	s^{-2}	s^{-2}	s^{-2}
Period	T	T	s	s	s
Frekvencija	T^{-1}	T^{-1}	Hz	Hz	Hz
Sila	LMT^{-2}	F	N	dyn	$\boxed{kp}$
Moment sile	L^2MT^{-2}	LF	N·m	dyn·cm	kp·m
Količina gib.	LMT^{-1}	FT	kg·m/s	g·cm/s	kp·s
Rad, energija	L^2MT^{-2}	LF	J	erg	kp·m
Snaga	L^2MT^{-3}	LFT^{-1}	W	erg/s	kp·m/s
Moment količine gibanja	L^2MT^{-1}	LFT	$kg \cdot m^2/s$	$g \cdot cm^2/s$	kp·m·s
Moment tromosti	L^2M	LFT^2	$kg \cdot m^2$	$g \cdot cm^2$	$kp \cdot m \cdot s^2$
Pritisak	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	N/m^2	dyn/cm^2	kp/m^2
Modul elastičnosti	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	N/m^2	dyn/cm^2	kp/m^2
Viskozitet	$L^{-1}MT^{-1}$	$L^{-2}FT$	$N \cdot s/m^2$	P	$kp \cdot s/m^2$
Koeficijent difuzije	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}	m^2/s	cm^2/s	m^2/s
Gustoća	$L^{-3}M$	$L^{-4}FT^2$	kg/m^3	g/cm^3	$kp \cdot s^2/m^4$

VELIČINA	DIMENZIONA SI FORMULA	SI JEDINICE
Naboj	TI	Coulomb, C
Električno polje	$LMT^{-3}I^{-1}$	volt po metru, V/m
Električni pomak	$L^{-2}TI$	C/m^2
Električni tok	TI	C
Potencijal	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	volt, V
Kapacitet	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	farad, F
Dielektrična konst.	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	F/m
Jakost struje	$\boxed{I}$	amper, A
Gustoća struje	$L^{-2}I$	A/m^2
Otpor	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	om,
Vodljivost	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	siemens, S
Magnetska indukcija	$MT^{-2}I^{-1}$	tesla, T
Magnetski tok	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	weber, Wb
Magnetsko polje	$L^{-1}I$	A/m
Induktivnost	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	henry, H
Magnetska permeabilnost	$LMT^{-2}I^{-2}$	H/m
Svjetlosna jakost	$\boxed{\mathcal{J}}$	kandela, cd
Svjetlosni tok	$\mathcal{J}$	lumen, lm (=cd·sr)
Osvijetljenost	$M^{-2}\mathcal{J}$	lux, lx $(=lm/m^2)$

Sistemske i vansistemske jedinice pojedinih fizikalnih veličina izražene pomoću osnovnih SI jedinica:

KUT	$1^o = 1,75 \cdot 10^{-2}$ rad(ijan)				
KUTNA BRZINA	1 okr/s = 6,28 rad/s = (SI:) = 6,28 s^{-1}				
SILA	1 dyn $= 10^{-5}$	1 kp (kilopond) = 9,81			N(ewton)
PRITISAK	1 dyn/cm^2 (bar) = 0,1	1 kp/m^2 (mm H_2O) = 9,81	1 pieze $= 10^3$	1 bar (hectopieze) $= 10^5$	N/m^2 (pascal)
1 atm (standardna atmosfera) $= 1,01 \cdot 10^5$	1 kp/cm^2 (at - tehnička atmosfera) $= 9,81 \cdot 10^4$	1 mm Hg (mm žive) $= 1,33 \cdot 10^2$			N/m^2 (pascal)
RAD I ENERGIJA	1 erg $=10^{-7}$	1 cal =4,19	1 kWh $=3,6 \cdot 10^6$		J(oule)
SNAGA	1 erg/s $= 10^{-7}$	1 KS $= 7,36 \cdot 10^2$	1 kcal/h = 1,16	1 kp·m/s =9,81	W(att)

Prefiksi za multiple i podmultiple jedinica:

T(era)	10^{12}	h(ecto)	10^2	μ (micro)	10^{-6}
(npr.: terajoule: TJ)		d(ec)a	10	n(ano)	10^{-9}
G(iga)	10^9	d(eci)	10^{-1}	p(ico)	10^{-12}
M(ega)	10^6	c(enti)	10^{-2}	f(emto)	10^{-15}
k(ilo)	10^3	m(ili)	10^{-3}	a(tto)	10^{-18}

Literatura

Babić, E., R. Krsnik i M. Očko: "Zbirka riješenih zadataka iz fizike", Zagreb, 1982.

Batygin, V. V. and I. N. Toptygin: "Problems in Electrodynamics", London, 1964.

Bukhovtsev, B., V. Krivchenkov, G. Myakishev and V. Shalnov: "Problems in Elementary Physics", Moscow, 1978.

"The Feynman Lectures on Physics" - "Exercises", Reading, Mass., 1964 - 5.

Gofman, Ju. B.: "Zakoni, formuli, zadači fiziki", Kiev, 1977.

Grechko, L. G., V. I. Sugakov, O. F. Tomasevich and A. M. Fedorchenko: "Problems in Theoretical Physics", Moscow, 1977.

Kos, V.: "Zadaci iz fizike", Zagreb, 1972.

Lightman, A. P., W. H. Press, R. H. Price and S. A. Teukolsky: "Problem Book in Relativity and Gravitation", princeton, 1975.

Ljaško, I. I., A. K. Bojarčuk, Ja. G. Gai i G. P. Golovač: "Spravočnoe posobie po matematičeskomu analizu; I, II", Kiev, 1978., 1979.

Rašković, D. P.: "Zbirka zadataka iz mehanike", Beograd, 1967.

Spiegel, M. R.: "Vector Analysis", New York, 1974.

Slobodeckii, I. Š. i L. G. Aslamazov: "Zadači po fizike", Moskva, 1980.

Vekštein, E. G.: "Sbornik zadač po elektrodinamike", Moskva, 1966.

Volkenštein, V. S.: "Sbornik zadač po obščemu kursu fiziki", Moskva, 1976.

Westphal, W. H.: "Physik", Berlin, 1963.