

statistika 8.6.2021. (sa skicom rješenja)

3+7+4+3+6+5+7+8=43 boda, 21.5 prolaz, 26.5 trojka, 33 četvorka, 38 pet

1. (3 boda) Na koliko načina možemo poredati 7 kuglica u niz, ako su od 7 kuglica (tajpos, pisalo 6) 4 bijele, 2 crne i jedna plava, a kod poretka gledamo samo boje, a ne razlikujemo kuglice koje su iste boje ?

Rješenje: Da su sve kuglice različite, imali bismo $7! = 5040$ načina, ali kako razmještaje bijelih unutar sebe ($4! = 24$), crnih unutar sebe ($2! = 2$) ne brojimo to je rješenje $\frac{7!}{4!2!1!} = \frac{5040}{12} = 105$.

2. (7 b.) U kutiji je 25 plavih i 34 crvene baterije. Baterije su stare dvije godine i neke rade i neke ne. Plave baterije su od lošijeg proizvođača i za dvije godine je vjerojatnost da neka baterija prestane raditi 50 posto. Kod crvenih je ta vjerojatnost 20 posto. Ako smo izvukli nasumce dvije baterije i obje baterije ne rade kolika je vjerojatnost

- da su obje baterije plave
- da je jedna baterija plava, a jedna crvena
- da su obje baterije crvene

R: Ovo je zadatak s uvjetnim vjerojatnostima. Označimo događaje:

NN dvije baterije ne rade

$$pp \text{ obje baterije plave } P(pp) = \frac{25}{25+34} \cdot \frac{24}{24+34} = \frac{600}{3422} = \frac{300}{1711}$$

$$cc \text{ obje baterije crvene } P(cc) = \frac{34}{25+34} \cdot \frac{33}{25+33} = \frac{1122}{3422} = \frac{561}{1711}$$

$$pc \text{ jedna baterija plava i jedna crvena } P(pc) = \frac{25 \cdot 34}{\binom{59}{2}} = \frac{25 \cdot 34 \cdot 2}{3422} = \frac{1700}{3422} = \frac{850}{1711}$$

Vidimo da je $P(pp) + P(pc) + P(cc) = 1$ kao što i treba.

$$P(NN|pp) = P(N|p) \cdot P(N|p) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$$

$$P(NN \cap pp) = P(pp) \cdot P(NN|pp) = \frac{300}{1711} \cdot \frac{4}{100} = \frac{12}{1711}$$

$$P(NN|cc) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 = 1/4$$

$$P(NN \cap cc) = P(cc) \cdot P(NN|cc) = \frac{561}{1711} \cdot \frac{1}{4} = \frac{561}{4 \cdot 1711}$$

$$P(NN|cp) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.10$$

$$P(NN \cap cp) = P(cp) \cdot P(NN|cp) = \frac{12}{1711} \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{5 \cdot 1711}$$

Zanimaju nas a) $P(pp|NN)$, b) $P(pc|NN)$, c) $P(cc|NN)$ i koristimo Bayesovu formulu.

$$P(pp|NN) = \frac{P(pp \cap NN)}{P(NN)} = \frac{\frac{12}{1711}}{\frac{12}{1711} + \frac{561}{4 \cdot 1711} + \frac{4}{5 \cdot 1711}}$$

$$P(pp|NN) = \frac{12}{12 + 561/4 + 4/5} = \frac{12}{(240 + 2805 + 16)/20} = \frac{240}{3061} = 0.0784$$

$$P(pc|NN) = \frac{561/(4 \cdot 1711)}{3061/(20 \cdot 1711)} = \frac{2805}{3141} = 0.9164$$

$$P(cc|NN) = \frac{4/(5 \cdot 1711)}{3061/(20 \cdot 1711)} = \frac{16}{3061} = 0.0052$$

I kako treba, $P(pp|NN) + P(pc|NN) + P(cc|NN) = 1$.

3. (2+2) Ako igraču kocku bacamo osam puta kolika je vjerojatnost da će

a) točno pet puta ispasti paran broj

b) najviše jednom ispasti dvojka

$$\text{R: a) } P = \binom{8}{5} \left(\frac{3}{6}\right)^5 \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \binom{8}{3} \frac{1}{2^8} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 256} = \frac{56}{256} = \frac{7}{32} = 0.21875$$

$$\text{b) } P = \binom{8}{0} \left(\frac{5}{6}\right)^8 + \binom{8}{1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{5^8 + 8 \cdot 5^7}{6^8} = \frac{13}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0.6046769$$

4. (3 b.) Cestom voze auti i ponekad im iscuri ponešto nafte i ostavi mrlju na cesti. Ako na dvadeset metara ceste ima u prosjeku 5 mrlja, kolika je vjerojatnost da će na 25 metara ceste ispred Jurekove kuće biti točno 6 mrlja ?

To je Poissonova razdioba. Zanima nas 25 metara, na njima očekujemo u prosjeku $\lambda = (5/20) \cdot 25 = 125/20 = 25/4$ mrlja. Ovdje je $m = 6$.

$$P = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \frac{(25/4)^6}{6!} e^{-25/4} = 0.1598$$

5. (6 b.) U toru su 4 svinje od 185, 187, 195 i 206 kg. Nadji medijan, srednju vrijednost, varijancu (srednje kvadratno odstupanje) i standardnu devijaciju u toru.

Medijana je na sredini dva srednja, to su 187 i 195, dakle 191 kg.

Srednja vrijednost je $(185 + 187 + 195 + 206)/4 = 193.25$ kilograma.

Standardna devijacija je po podacima 8.25757, dakle oko 8 kg.

6. (3+2 b) Najbolji skokovi članova u vis u juniorskom sportskom klubu približno se ponašaju po normalnoj razdiobi gdje je srednja vrijednost 170 centimetara, a standardna devijacija 7 cm.

a) kolika je vjerojatnost da nasumce odabrani skakač može skočiti najviše između 160 i 165 cm ?

b) kolika je vjerojatnost da nasumce odabrani skakač može skočiti iznad 190 cm ?

$\sigma = 7$, $\mu = 170$, Izračunajmo pripadne Z-vrijednosti.

$$a) Z_1 = \frac{160-170}{7} = -10/7 = -1.428$$

$$Z_2 = \frac{165-170}{7} = -5/7 = -0.714$$

Prema tablici,

$$\Phi(-0.71) - \Phi(-1.43) = 0.2389 - 0.0764 = 0.1625$$

Kako smo zaokruživali i nismo radili interpolacije u tablici, možemo uzeti da je rezultat 0.16.

<https://www2.irb.hr/korisnici/zskoda/PhiHikvadrattablice.pdf>

$$Z_3 = \frac{190-170}{7} = \frac{20}{7} = 2.857$$

i $\Phi(2.86) = 0.9985$ pa je $P(Z > 2.86) = 1 - 0.9985 = 0.015$

7. (7 b) Tri puta mjerimo dvije slučajne veličine, x i y i nalazimo parove vrijednosti (x, y) : (3.0, 1.5), (3.9, 2.2), (5.5, 3.6). Nadj koeficijent korelacije, kovarijancu uzorka $Cov(x, y)$, koeficijent regresije i jednadžbu pravca linearne regresije.

Tablicu neću crtati. Rezultati su:

$$\bar{x} = 4.13333, \bar{y} = 2.43333$$

$$Var(x) = 3.2067/3 = 1.0689$$

$$Var(y) = 0.7622$$

$$Cov(x, y) = 0.9022$$

$$Kor = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} = 0.99955$$

$$\text{koeficijent regresije } \frac{Cov(x,y)}{Var(x)} = 0.84407$$

$$y - \bar{y} = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)}(x - \bar{x})$$

$$y - 2.43333 = 0.84407 \cdot (x - 4.13333)$$

$$\text{Regresija } y = 0.84407x - 1.05551$$

8. (8 b) Ocjene iz veterine na prvoj godini studija su, prema spolu (M/Ž),

Petica M 40, Ž 31

Četvorka M 47, Ž 50

Trojka M 90, Ž 81

Dvojka M 53, Ž 38

Jedinica M 45, Ž 33

Pomoću hi-kvadrat testa testirajte hipotezu, sa značajnošću od 0.05, da je vjerojatnosna distribucija ocjena medju studentima i studenticama jednaka.

Ukupno je $40+47+90+53+45 = 275$ muških i $31+50+81+38+33 = 233$ ženskih od $275+233 = 508$ studentarije

Od toga je 71 petica od 508, pa je očekivano

$71/508 \cdot 275 = 38.435$ M, $71/508 \cdot 233 = 32.565$ Ž

97 četvorke, 52.510 M, 44.490 Ž

171 trojke, 92.569 M 78.431 Ž

91 dvojka, 49.262 M 41.738 Ž

78 jedinica, 42.224 M 35.776 Ž

$$\begin{aligned}\chi^2 = & (40 - 38.435)^2/38.435 + (47 - 52.510)^2/53.663 + (90 - 92.569)^2/92.569 + \\ & + (53 - 49.262)^2/49.262 + (45 - 42.224)^2/42.224 + (31 - 38.435)^2/38.435 + (50 - 44.490)^2/63.337 + \\ & + (81 - 78.431)^2/78.431 + (38 - 41.738)^2/41.738 + (33 - 35.776)^2/35.776 = 3.7188\end{aligned}$$

Broj stupnjeva slobode je $(5-1)(2-1) = 4$.

Prema tablici

<https://www2.irb.hr/korisnici/zskoda/PhiHikvadrattablice.pdf>

za značajnost 0.05 pri 4 stupnja slobode imamo $\chi_{0.05}^2 = 9.488$, kako je naša vrijednost $3.7188 < 9.488$ mi ne možemo odbaciti hipotezu da je razdioba ocjena ravnomjerna medju studentima i studenticama.