# STATISTIKA

9.3.21.

uvjetna vjerojatnost

Bayesova formula

$$\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

AKO

# POV KOJE ZAD. UVJET

# MOG KOJE ZAD. UVJET

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A\cap B)}{\cancel{n}}}{\frac{n(B)}{\cancel{n}}}$$

$$P(A\cap B) = P(A|B)\,P(B)$$

$$P(A\cap B) = P(B|A)\,P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ više kanala/putova

$$B_i \cap B_j = \emptyset$$

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_n = \text{sve}$$

$$A = A\cap(\text{sve}) = A\cap(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n)$$

$$= (A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots\cup(A\cap B_n)$$

i svi su disjunktni

$$\frac{P(A\cap B_1)}{P(A)} = P(B_1|A)$$

ako

$$P(A) = P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) + \ldots + P(A\cap B_n)$$

(FLA) TOTALNA VJER.

$$P(A) = P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + \ldots + P(A|B_n)\,P(B_n)$$

Bayes

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)\,P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + \ldots}$$

Primjer.

Pero ide Crvenkapici u posjetu Nekad ide stazom kod Babinog potoka, a nekad Lugarevom stazom. Ukoliko je lijepo vrijeme odabire da ide Babinim potokom, a inače Lugarevu stazu. Vjerojatnost da naleti na vuka je 0.03 ako ide Babinom potokom, a 0.04 ako ide Lugareovom stazom. Lijepo veijrme je 4 puta tjedno u prosjkez. Koja je vjerojatnost da u nasumičan dan Pero naleti na vuka ?

Rješenje. Najprije označimo događaje i ekstrahiramo podatke iz gornjeg teksta.

BP Pero ide Babinim potokom $P(V \mid BP) = 0.03$

LS Pero ide Lugarevom stazom $P(V \mid LS) = 0.04$

V Pero sreo vuka $V^c$ nije sreo vuka $P(K) = 3/7 = P(LS)$

K pada kiša $K^c$ lijepo vrijeme $P(K^c) = 4/7 = P(BP)$

$P(V)$ $P(BP \mid K^c) = 1$ $P(BP) = P(K^c)$

$$P(V) = P(V \mid BP) \cdot P(BP) + P(V \mid LS)\, P(LS)$$
$$= 0.03 \cdot 4/7 + 0.04 \cdot 3/7$$
$$= 0.12/7 + 0.12/7 = 0.24/7$$
$$= 0.0342857 1 \ldots \approx 3.4\%$$

Koja je vjerojatnost da je Pero išao Lugarevom stazom ako znamo da je naletio na vuka ?

$$P(LS \mid V) = \frac{P(V \mid LS) \cdot V(LS)}{P(V \mid LS) \cdot V(LS) + P(V \mid BP)\, P(BP)}$$

$$= \frac{0.04 \cdot 3/7}{0.03 \cdot 4/7 + 0.04 \cdot 3/7}$$

$$= 0.5 = 50\%$$

slučajno jer

0.03 x 4/7 = 0.04 x 3/7

U tvornici se proizvode dvije vrste čizmica i jedne vrste cipela i to visoke čizmice oko 30%, niske čizmice 50% i cipele u 20% asortimana. Jedna od pet visokih čizmica ima grešku u proizvodnji, jedna od četiri niske čizmice i 12% cipela.
Ako na izlazu iz pogona nasumce izaberemo prozvod i taj proizvod ima grešku kolika je vjerojatnost da je to visoka čizmica, niska čizmica i cipela (svako posebno? razdioba vjerojatnosti po slučajevima).

$V, N, C$ gr (greška)

$V \cup N \cup C$ je sve

$P(V) = 0.3$

$P(N) = 0.5$

$P(C) = 0.2$

$P(gr \mid V) = 1/5 = 20\%$

$P(gr \mid N) = 1/4 = 25\%$

$P(gr \mid C) = 0.12 = 12\%$

$P(V \mid gr) = \frac{P(V \cap gr)}{P(gr)} = \frac{0.20 \times 0.3}{0.209} = \frac{0.060}{0.209} = 60/209$

$P(N \mid gr) = \frac{P(N \cap gr)}{P(gr)} = 0.125/0.209 = 125/209$

$P(C \mid gr) = \frac{P(C \cap gr)}{P(gr)} = 0.024/0.209 = 24/209$

$P(gr) = P(gr \mid N)P(N) + P(gr \mid V)P(V) + P(gr \mid C)P(C)$

$= 0.25 \times 0.5 + 0.20 \times 0.3 + 0.12 \times 0.2$

$= 0.125 + 0.060 + 0.024$

$= 0.209$

$\neg gr$ (nije s greškom)

$P(\neg gr \mid V) = 4/5 = 0.80$

$P(\neg gr \mid N) = 3/4 = 0.75$

$P(\neg gr \mid C) = 0.88$

$P(V \mid \neg gr) = \frac{P(V \cap \neg gr)}{P(\neg gr)} = \frac{0.80 \times 0.3}{0.791} = \frac{240}{791}$

$P(\neg gr \mid V)P(V)$

$P(\neg gr) = P(\neg gr \mid V)P(V) + P(\neg gr \mid N)P(N) + P(\neg gr \mid C)P(C)$

$= 0.80 \times 0.3 + 0.75 \times 0.5 + 0.88 \times 0.2$

$= 0.240 + 0.375 + 0.176$

$= 0.791$

Igraću kocku bacamo 3 puta. Kolika je vjerojatnost da su sva tri broja bila parna, ako su prva dva broja oba veća ili jednaka 4 ?

$P(ppp \mid \geq 4 \geq 4\ ?) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{9}$

4, 6 — 2, 4, 6 — 4, 5, 6

1. mjesto, 2., 3. — sva tri parna

1., 2., 3. bilo što — prva dva $\geq 4$

1. 2. 3. 1. 2. 3.

$$P(ppp \mid \geq 4 \geq 4\ ?) = \frac{n(ppp \cap \geq 4 \geq 4\ ?)}{n(\geq 4 \geq 4\ ?)}$$

$n(ppp) = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$n(\geq 4 \geq 4\ ?) = 3 \times 3 \times 6 = 54$

$n(?\ ?\ ?) = 6 \times 6 \times 6 = 216$

$n(ppp \cap \geq 4 \geq 4\ ?) = 2 \times 2 \times 3 = 12$

$\frac{12}{54} = \frac{2}{9}$

$$P(ppp \mid \geq \geq 4\ ?) = \frac{P(ppp \cap \geq 4 \geq 4\ ?)}{P(\geq 4 \geq 4\ ?)} = \frac{\frac{12}{216}}{\frac{54}{216}} = \frac{2}{9}$$

Izvlačimo iz špila od 32 karte, 4 karte. Ako u ruci imamo barem jedan par istih karata po skali (7,8,9...), kolika je vjerojatnost da imamo barem jednu tricu istih karata ?

Kolika je vjer. da ~~dvije~~ tri barem iste ako su barem dvije

$J_K J_H Q_H 8_P$ par

$\boxed{J_K\ J_H\ J_P}\ 8_P$

$J_K\ J_H\ J_P\ J_T$ tris (unutar četvorke)

$$P = \frac{P(\geq \text{trica} \cap \geq \text{par})}{P(\geq \text{par})} = \frac{n(\geq \text{trica})}{n(\geq \text{par})} =$$

$$= \frac{n(\text{tri}+1) + n(\text{četiri})}{n(\text{dvije}+1+1) + n(2+2) + n(3+1) + n(4)}$$

$$= \frac{8 \cdot \binom{4}{3} \cdot 28 + 8 \cdot \binom{4}{4}}{8\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{2} 4 \cdot 4 + \binom{8}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} + 8\binom{4}{3} 28 + 8\binom{4}{4}}$$

J, K... 2 boje

$\neq 8 \cdot \binom{4}{2} \cdot 7\binom{4}{2} = 2 \cdot \binom{8}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}$

$n(2+2) = \#$ duplih parova $= \binom{8}{2} 4 \cdot 4$

$n(\text{dvije}+1+1) + n(2+2) = 8 \cdot \binom{4}{2}\binom{7}{2} 4 \cdot 4 + \binom{8}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}$
$= 8 \cdot 6 \cdot 21 \cdot 16 + 28 \cdot 36 = 17136$

$n(\text{dvije} + \text{bilo što})$ JJ $\neq$ J $=$ krivo $= 8 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{2} = 18144$
$= 17136 + 1008$ preveč!

$28 \cdot 36$

Previše jer je $\overbrace{28 \cdot 36}^{n(\text{par}+\text{par})}$ računato dva puta !!

15 novčića raspodijelimo na 3 hrpice. Na koliko načina to možemo učiniti i koja je vjerojatnost da su sve tri hrpice po točno 5 novčića. Svaka hrpica mora imati barem jedan novčić. Pri tome novčiće ne razlikujemo, nego samo koliko novčića je na svakoj hrpici. Kod vjerojatnosti gledamo da su sve raspodjele veličina hrpica jednako vjerojatne.

o o o o o | o o o o o o o o | o o o — 2 pregrade! — 17 predmeta (15o, 2|)

$\binom{17}{2}$ načina $= 17 \times 8 = 136$

ali moguće da na nekoj hrpi nije ništa

$0 + 10 + 5$

0, 0, 0    3 moram staviti

o o o o | o o o o o o o | o o    $12 + 2$

|| o o o o o o o o o o o o o o

$$\begin{array}{r} 0012 \\ +111 \\ \hline 1113 \end{array}$$

$\binom{14}{2}$ načina $= \frac{14 \cdot 13}{2} = 7 \cdot 13 = 91$

$136 - 91 = 45$

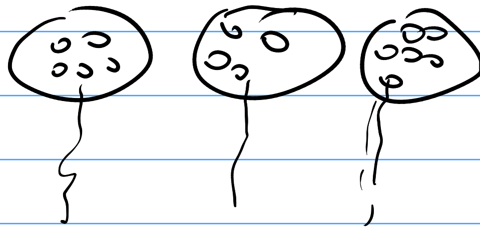
$$P = \frac{1}{\binom{14}{2}} = \frac{1}{91} \approx 0.01091 \approx 1.09\%$$

$100 : 91 = 1.091$
900
110

(REDOSLIJED HRPICA IMA VEZE)

1 12 2
1 2 12

A B C



$\binom{17}{2}$ — nedozvoljeni raspoređi

$14 = \binom{14}{1} \rightarrow$ 0 ? ?    ? 0 ?    ? ? 0

$3 \rightarrow$ 0 0 15    15 0 0    0 15 0

~~0 0 0~~    $? \neq 0$

NEMOGUĆE jer 15 novčića mora negdje biti

$14 \times 3 + 3 = 45$

45 nem. $\boxed{91 \text{ mogućih}}$ ukupno $\binom{17}{2} = 136$