4+6+3 +2+7+6+4+6+5 = 43 boda

Prolaz 21.5 bodova , trojka od 27 bodova, četvorka od 32.5 boda, petica od 38 bodova

mat4 10.6.2021. IME i PREZIME:

2+2

1. Promatraj skup svih kompleksnih brojeva kojima su i realni i imaginarni dio cijeli brojevi.

a) je li taj skup podgrupa skupa svih kompleksnih brojeva s obzirom na zbrajanje da, zatvorenost, asocijativnost, 1 je unutra i suprotni element unutra

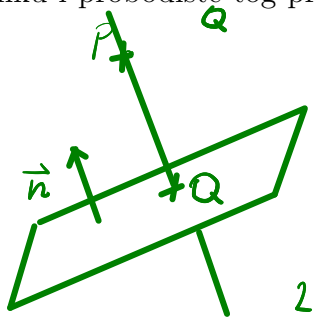
b) je li taj skup podgrupa skupa svih kompleksnih brojeva s obzirom na množenje ? Objasni zašto je ili nije.

b) nije, prvo niti kompleksni brojevi nisu grupa jer 0 nema inverz, a tako ni ovaj podskup nije grupa jer ne samo 0, nego svi cjelobrojni kompleksni brojevi nemaju inverz osim plus minus 1 i plus minus i.

6 bodova

2. Promatraj ravninu M s jednadžbom $2x + 3y + z - 1 = 0$ i točku $P(1, 1, 1)$ koja je van ravnine. Nadji pravac p koji prolazi kroz P, a okomit je na M u parametarskom obliku i probodište tog pravca s M (dakle okomitu projekciju P na M),

p...$\vec{r}(t) = P + t\,\vec{n} = (1+2t,\ 1+3t, 1+t)$



$Q \in M$

$2Q_x + 3Q_y + Q_z - 1 = 0$

$Q = P + t\vec{n}$

$2(1+2t) + 3(1+3t) + (1+t) - 1 = 0$

$2 + 4t + 3 + 9t + \cancel{1} + t - \cancel{1} = 0$

$14 t_Q = -5$

$t_Q = -\frac{5}{14}$

$t_Q = -\frac{5}{14}$

$Q\left(1 + 2\left(-\frac{5}{14}\right), 1 + 3\left(-\frac{5}{14}\right), 1 - \frac{5}{14}\right)$

$Q\left(\frac{4}{14}, -\frac{1}{14}, \frac{9}{14}\right)$ provera: $2 \cdot \frac{4}{14} + 3\left(-\frac{1}{14}\right) + \frac{9}{14} - \frac{14}{14} = \frac{8 - 3 + 9 - 14}{14} = 0$

$\vec{PQ} = \left(-\frac{10}{14}, -\frac{15}{14}, -\frac{5}{14}\right) = -\frac{5}{14}(2, 3, 1)$

3 boda

3. Promatrajmo 2×2 matrice s elementima u tijelu kvaterniona, gdje je $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$. Izračunaj

$$\begin{pmatrix} j & 3 \\ j & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j+k & i \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j(j+k)+3\cdot 0 & j\cdot i+3i \\ j(j+k)-k\cdot 0 & j\cdot i-k\cdot i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+i & 3i-k \\ -1+i & -j-k \end{pmatrix}$$

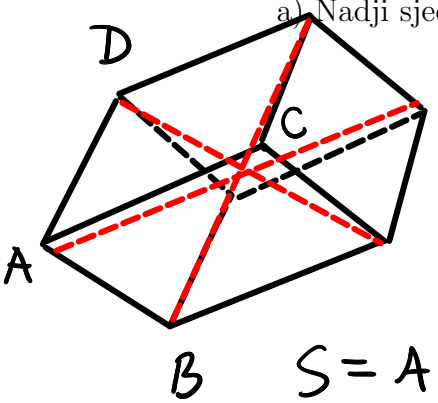
2 boda

4. Izračunaj kompoziciju permutacija skupa $\{A, B, C, D\}$ (gornji red je početno, a donji red u svakom stupcu završno stanje, kao i obično)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix}$$

3+4 boda

5. Promatramo paralelepiped kojem su četiri vrha $A(1,1,0)$, $B(2,3,0)$, $C(-1,0,3)$, $D(0,0,1)$. a) Nadji sjecište dijagonala tog paralelepipeda. b) Nadji volumen.



S (SUSJEDNI VRHOVI)

$(1,2,0)\ [(-2,-1,3)\times(-1,-1,+1)]$

$V = |\vec{AB}\cdot(\vec{AC}\times\vec{AD})|$

$\pm V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2 - 2\cdot 1 = 0$

paralelepiped je degeneriran!

sve 4 tačke u ravnini

ili

$-3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3+3=0$

$S = A + \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD})$

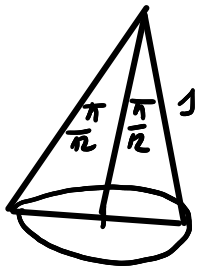
$S = (1,1,0) + \frac{1}{2}(-2,0,4)$

$S = (1-1, 1+0, 0+2)$

$S(0,1,2)$

6 bodova

$\theta = \frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{12}$



$2r\pi$

$\varphi = 2\pi \frac{r}{s}$

6. Promatrajmo uspravni stožac takav da je kut pri vrhu $\pi/6$ radijana (to je kut u ravnini presjeka s ravninom kroz vrh stošca koja je okomita na ravninu osnovice) i visina je $h = 1$. Nadji oplošje P i volumen V stošca.

$P_{\triangle} = s^2\pi \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = rs\pi$

$\parallel$

0.87148...

$r = h \cdot tg\frac{\pi}{12} = 1 \cdot tg\frac{\pi}{12} =$ 0.267949...

$s = \sqrt{h^2 + r^2}$

$s =$ 1.035276...

$V = r^2\pi \cdot h/3 = \pi tg^2\frac{\pi}{12} \cdot 1/3 =$ 0.075...

$P = r^2\pi + rs\pi \approx$ 0.2255+0.8715 = 1.097

ili $s = \frac{h}{\cos\frac{\pi}{12}}$

ili $P = \pi tg^2\frac{\pi}{12} + tg\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{12}} = \pi tg\frac{\pi}{12} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{12} + 1}{\cos\frac{\pi}{12}} \approx 1.097$

7. Neka je $e = (e_1, e_2)$ baza od $\mathbb{R}^2$ dana vektorima

2+2 boda

$$e_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

(u standardnoj bazi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ od $\mathbb{R}^2$; $e_1 = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ itd.)

Ako je linearni operator $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dan vrijednostima na bazi, $g(e_1) = -2e_1 + e_2$, $g(e_2) = 3e_1 + 2e_2$.

a) koliko je $g(e_1 - 2e_2)$ u bazi e_1, e_2; (koristi linearnost od g!)

b) Rezultat napiši i u standardnoj bazi.

a) $g(e_1 - 2e_2) = g(e_1) - 2g(e_2) = -2e_1 + e_2 - 2(3e_1 + 2e_2)$

$g(e_1 - 2e_2) = -8e_1 - 3e_2$

b) $= -8\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48-3 \\ -16-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -51 \\ -25 \end{pmatrix}$

6 bodova

3 5 1

8. Nadji jednadžbu ravnine kojoj pripadaju pravac $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = z - 1$ i točka $P(0,4,1)$.

parametarski, p je

r(t) = A + t a

x = 2 + 3t

y = -4 + 5t

z = 1+t

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (3,5,1) je uzduž tog pravca p

izaberemo dvije točke A i B na p

A(2,-4,1) je na p, B(2+3,-4+5,1+1)=(5,1,2) je na p

$t=0$ $\qquad$ $t=1$

$\overrightarrow{AP}$ = (-2,8,0)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & +8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ +8 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & +8 \end{vmatrix}$$

$$= -8\vec{i} - 2\vec{j} + 34\vec{k}$$

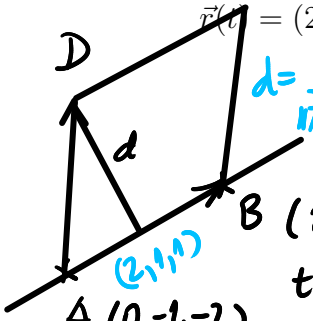
-8x - 2y + 34 z + D = 0, uvrstimo P(x_p,y_p,z_p)

P... $-8\cdot\cancel{0} - 2\cdot 4 + 34 + D = 0$ $\quad D = -26$

$-8x - 2y + 34z - 26 = 0$ ili $4x + y - 17z + 13 = 0$

Provjera $4(2+3t) + (-4+5t) - 17(1+t) + 13 = 0$

9. Nadji udaljenost od točke $D(0,2,3)$ do pravca parametarski danog s $\vec{r}(t) = (2t, t-1, t-2)$.



$d = \frac{P_{\square}}{|\overrightarrow{AD}|}$

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-10)^2 + 6^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{140}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{70}{3}}$$

$\overrightarrow{AB}$ (2,1,1)

$\overrightarrow{AD}$ (0,3,5)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 2\vec{i} - 10\vec{j} + 6\vec{k}$$

5 bodova

$\vec{r}(t) = \overset{A}{(0,-1,-2)} + (2,1,1)t$

napomena: umjesto $\overrightarrow{AD}$ mogli smo uzeti $\overrightarrow{BD}$, rezultat je isti

$\overrightarrow{BD}$ (-2,2,4)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 10\vec{j} + 6\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} =$

$\overrightarrow{AB} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})$

$= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD}$

jer je $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

alternativno rješenje (predložila G. Rubelj): nađimo ravninu okomitu na pravac AB koja prolazi kroz D

To je 2 x + y + z - 5 = 0 i njeno sjecište N s pravcem AB odgovara parametru

2(2t)+(-1+t)+(-2+t)-5 =0, dakle 6 t = 8, t = 4/3, N(8/3,1/3,-2/3) pa je

d(p,D) = d(N(8/3,1/3,-2/3),D(0,2,3)) = korijen((64+25+121)/9) = korijen(210/9) = korijen(70/3)