Matematika 4, 24. ožujka 2021.

permutacije: bijekcije nekog skupa na samog sebe
ako je skup konačan i ima n elemenata onda skup svih permutacija ima n! elemenata 0! = 1! = 1, (n+1)! = (n+1)*n!
n! = n (n-1) (n-2)...1

brojenje skupova i slični argumenti -- kombinatorika

Obradili smo prošli tjedan da je skup svih permutacija Perm(S)=Sym(S) grupa s obzirom na kompoziciju permutacija grupa i da je svaka grupa izomorfna grupi permutacija nekog skupa, na primjer samo sebe (ovo zadnje je Cayleyev teorem)

$S=\{1,2,3,\dots,n\}$ $\quad S \xrightarrow{f} S$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 5 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$g\circ f \begin{cases} f & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 3 & 5 & 4 & & 1 \end{matrix} \\ g & \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \end{cases}$$

← svaki točno 1x

$(g\circ f)(x) = g(f(x))$

$$\overset{g}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \circ \overset{f}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ciklička permutacija

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3412)

$1\to3\to1$
$2\to4\to2$

$(13)(24)$

transpozicija (zamjena dva elementa)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$S=\{1,2,3,4\}$

(32)

rastav na disjunktne (nepresijecajuće) cikličke permutacije

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$1\to2\to5\to6\to3\to7$
$4\to4$

$(4)(125637)$

$(125637)(4)$

elementi a i b u magmi (pa dakle i grupi) komutiraju ako a*b = b*a
Nepresjekujući ciklusi međusobno komutiraju.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 7 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (126)(37)(45)$$

Napomena: na wikiju imamo stranicu permutacija
Inverzija (permutacije p skupa S) je svaki par elemenata (i,j) skupa S, kojeg smatramo uređenim (poredanim), za koji vrijedi da je i<j ali p(i)>p(j).
Permutacija je parna ako u njoj postoji paran broj inverzija.
Permutacija je neparna ako u njoj postoji neparan broj inverzija.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$(1,2)$, $\cancel{(1,3)}$, $\cancel{(1,4)}$, $\cancel{(2,3)}$, $\cancel{(2,4)}$, $(3,4)$

$1<2$ $\quad 1<3$
$2>1$ $\quad 2<4$

2 inverzije

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,4)$ $\quad$ 6 inverzija

$\quad 4>3 \quad 4>2 \quad 4>1 \quad 3>2 \quad 3>1 \quad 2>1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $(1,2),\ (1,3),\ (2,3)$ $\quad$ 3 inverzije, neparna

kompozicija parnih permutacija je parna
kompozicija neparnih je parna
i kompozicija neparne i parne ili parne i neparne je parna
to jest, broj inverzija se zbraja modulo 2, ali se ne zbraja točno!

$$\underset{6}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \circ \underset{6}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = Id = \underset{0}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$$

Ako skup ima više od 1 elementa (a konačan broj) onda je pola permutacija parno, n!/2, a pola neparno, n!/2.
Parne permutacije čine grupu, naime podgrupu grupe svih permutacija skupa: dvije parne permutacije i njihova kompozicija je parna (zatvorenost), identiteta je u podskupu jer je identiteta parna permutacija, i ako je p parna onda je i inverz parna permutacija (to trebamo provjeriti!).

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 3 & 1 & 4 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & \cdots & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & & n \end{pmatrix}$$

$\boxed{1<3}$ $\quad 1<2$, $3>1$ } ako se ovi razlikuju $< \ >$

$\boxed{2>1}$ $\quad 1<2$ } onda se i ovi razlikuju

$p: 1\ 2 \mapsto 3\ 1 \quad (1,2)$

$p^{-1}: 3\ 1 \mapsto 1\ 2$

$(1,3) \mapsto 2\ 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{<'\,<'\,<'}{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}} \quad \begin{matrix} 2 <' 4 \\ 3 >' 1 \end{matrix}$$

6 inv.

$(1\,4)(2\,3)$

2 parno

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$(1\,6)(2)(4)(3\,5)$

$1+1$

Permutacija je parna onda i samo onda kad se može napisati kao kompozicija parnog broja transpozicija! A ako gledamo kao kompoziciju nepresijecajućih ciklusa onda gledamo (duljine-1) ciklusa da li je zbroj paran