Permutacije -- bijekcije skupa u samog sebe

Sve permutacije čine grupu (kompozicija bijekcije je bijekcija, inverz bijekcije je bijekcija i identiteta je bijekcija koja je neutralni element s obzirom na kompoziciju)

Perm(X) gdje je X skup, u literaturi Sym(X) simetrična grupa (permutacije su simetrije skupa)

CAYLEYEV TEOREM

Svaka grupa je izomorfna podgrupi neke grupe permutacija. Na primjer mo uzeti grupu permutacija početne grupe.

$L_g : G \to G, \quad h \mapsto g.h$

$g \in G$

lijevi pomak za g

lijeva translacija za g

$L_g(L_{g'} h) = g(g'h) = (gg')h$

$\| \qquad = L_{gg'} h$

$(L_g \circ L_{g'})(h) = L_{gg'}(h)$

$L : g \mapsto L_g$

$gg' \mapsto L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$ homomorfizam

$L(gg') = L(g) \circ L(g')$

$L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$

$L(1) = L_1 : h \mapsto 1.h = h$

$\| \; Id$

$L(G) = \{ L_g \mid g \in G \}$ je podgrupa grupe permutacije Perm(G)

to je pogrupa „lijevih translacija” (pomaka) grupe G

$L : g \mapsto L_g$

$G \hookrightarrow \mathrm{Transl}(G) \overset{\text{podgrupa}}{\subset} \mathrm{Perm}(G)$

to je izomorfizam grupe G na podgrupu translacija

Očito je surjekcija jer svaki Lg je došao od (nekog svojeg) g

Provjerimo da je INJEKCIJA

$L_g = L_{g'} \overset{?}{\Rightarrow} g = g'$

$L_g = L_{g'}$ ako $\forall h \in G$, $\underbrace{L_g(h)}_{g \cdot h} = \underbrace{L_{g'}(h)}_{g' \cdot h}$ / $\cdot h^{-1}$ zdesna

$(gh)h^{-1} = (g'h)h^{-1}$ $\Rightarrow$ $g = g'$ $\quad \| \; L_{gg'}$

$L_g \circ L_{g'} \in \mathrm{Transl}(G)$

$g(\underbrace{hh^{-1}}_{1}) = g'(\underbrace{hh^{-1}}_{1})$

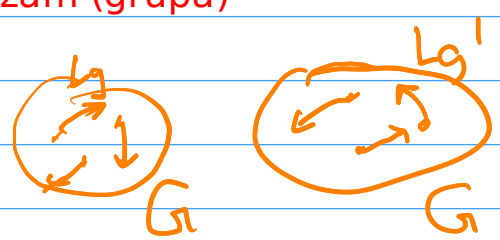
Transl(G) je podgrupa jer i

$(L_g^{-1} \circ L_g)(h)$
$= g^{-1}(gh)$
$= (g^{-1}g)h$
$= h$

$g = g'$

bijekcija

homomorfizam + injekcija + bijekcija =
= homomorfizam s inverzom
= izomorfizam (grupa)



$L_g^{-1} = (L_g)^{-1}$

$L(G)$

$L_1 = Id$

$L : G \to \mathrm{Perm}(G)$

PRIMJER: grupe izometrija ravnine i prostora

E^3 Euklidski prostor

ili E^2 Euklidska ravnina

Izometrija prostora ili ravnine je preslikavanje f prostora ili ravnine u samog sebe koje čuva udaljenost, tj. za svake dvije točke A i B udaljenost d(A,B) je ista kao i udaljenost d(f(A),f(B)). Ponovimo iz Matematike 2 što je to udaljenost i koje aksiome zadovoljava (nenegativnost, nedegeneriranost, simetričnost, nejednakost trokuta; i nejednakost trokuta je jednakost onda i samo onda ako je srednja točak između prve i zadnje, što uključuje da je na istom pravcu; bijekcija između svakog polupravca i R+).

Sve izometrije čine grupu (kompozicija izometrija je izometrija itd.). Provjeri!

Za slijedeći put vas molim da ponovite izometrije, jer sve izometrije čine grupu. Stranice u matematici 2

1) što je udaljenost i koji aksiomi
2) osnovni teorem o izometrijama
3) aksiomi o osnim simetrijama
4) definicije osne simetrije, rotacije, translacije (izometrija koja je kompozicija dvije osnih simetrija s obzirom na međusobno paralelne pravce), centralne simetrija
5) kongruentnost i sukladnost