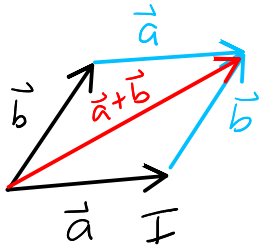
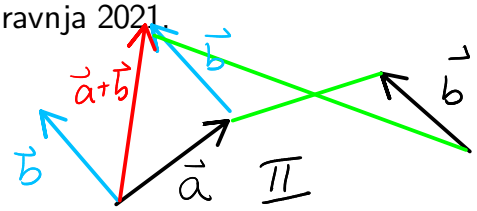
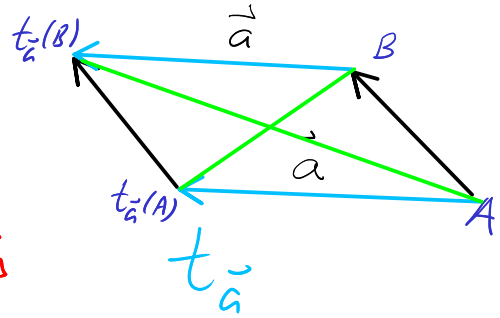
Matematika 4, 15. travnja 2021.



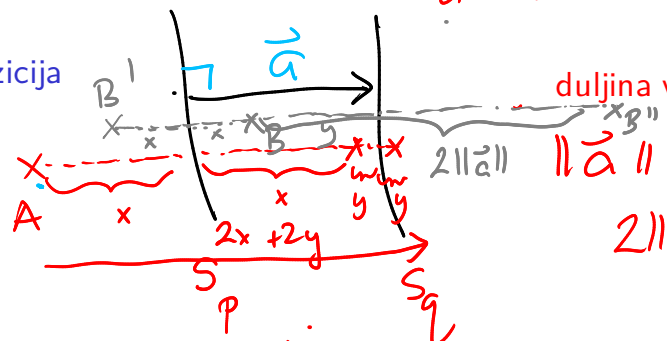




$\vec a = \vec{AB}$

translacija kao kompozicija dviju osnih simetrija

(zrcaljenja)



duljina vektora $\vec a$ ili norma od $\vec a$

$\|\vec a\| = d(A,B) = x+y$

$2\|\vec a\|$

$y+2x+y = 2x+2y$

$t_{2\vec a}(A) = s_q(s_p(A))$

(virtualna) slika je iza zrcala

svijeća

slika svijeće iza ogledala

ogledalo

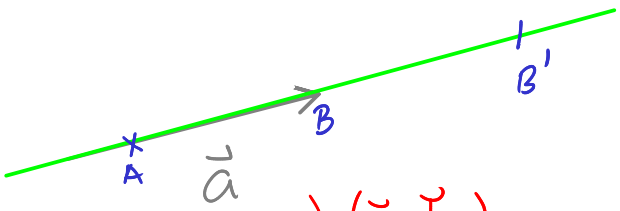
promatrač

množenje vektora i skalara $\lambda \in \mathbb{R}$ $\exists!\, B'$, $d(A,B') = |\lambda|\, d(A,B)$

i $AB' = AB$ (leže na istom (odredjuju isti pravac) pravcu)

i ako $\lambda > 0$ isti. poluprvac

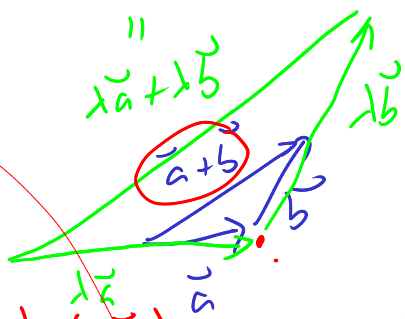
ako $\lambda < 0$ komplementni

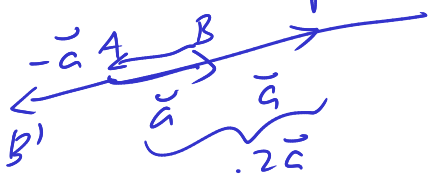


$\lambda(\vec a+\vec b)$

$\|$

$\lambda\vec a+\lambda\vec b$





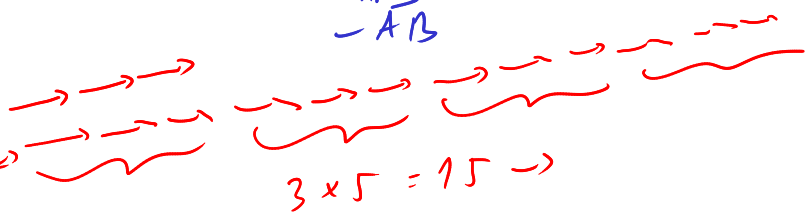
$1\cdot\vec a = \vec a$

$-1\cdot\vec{AB} = \vec{BA}$

$\|$

$-\vec{AB}$

$(\lambda\cdot\mu)\vec a = \lambda\cdot(\mu\vec a)$



$3\times 5 = 15$

$(\lambda+\mu)\vec a = \lambda\vec a + \mu\vec a$

$3\vec a + 2\vec a$

Vektorski prostor nad poljem F „skalara" (u gornjem slučaju to je bilo polje realnih brojeva) je Abelova grupa V čije elemente zovemo vektori, zajedno s operacijom množenja skalarom

$$(\lambda, \vec{a}) \longmapsto \lambda \cdot \vec{a}$$

tako da

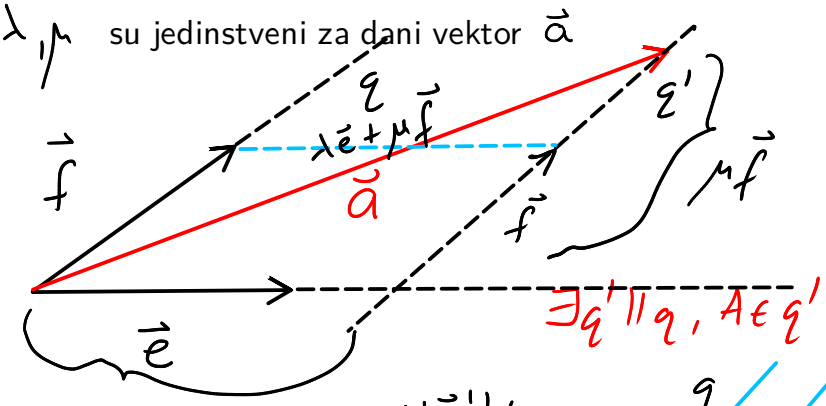
$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\cdot\vec{a} &= \lambda\cdot\vec{a} + \mu\cdot\vec{a} \\ (\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a} &= \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a}) \\ 1\cdot\vec{a} &= \vec{a} \\ \lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b}) &= \lambda\cdot\vec{a}+\lambda\vec{b} \end{aligned}\right\}$$

množenje broja množenje vektora skalarom

https://ncatlab.org/zoranskoda/show/vektorski+prostor

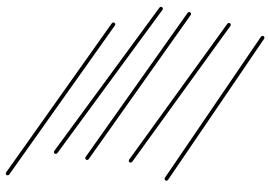
$\vec{a} = \lambda\vec{e} + \mu\vec{f}$ linearna kombinacija vektora $\vec{e}$ i $\vec{f}$

λ, μ su jedinstveni za dani vektor $\vec{a}$



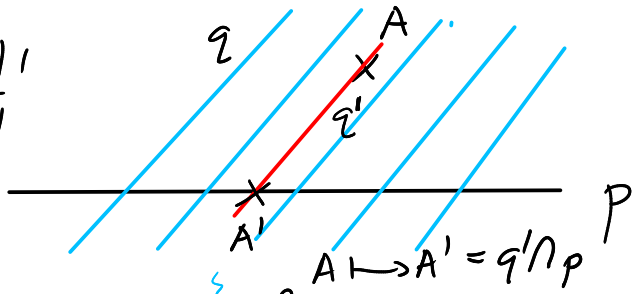
$\exists q' \parallel q,\ A \in q'$

$\lambda = \pm\frac{\|\vec{e}'\|}{\|\vec{e}\|}$



smjer = razred ekvivalencije pravaca po relaciji paralelnosti

orijentacija (smisao)



q pravac smjera kose projekcije

$\{A'\}$

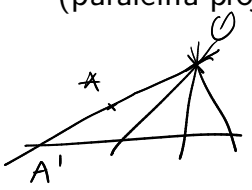
(λ, μ) komponente vektora u bazi

$A \longmapsto A' = q' \cap p$

$(\vec{e}, \vec{f})$ je baza

vektorskog prostora V^2 vektora u euklidskoj ravnini M^2

$M^2 \longrightarrow p$ kosa projekcija (paralelna projekcija)



centralna projekcija

općenito, neka su $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektori

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ skalari (brojevi iz polja)

tada je $\lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$ linearna projekcija vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ s koef. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$S = \{\vec{e}\}$ $\{\lambda\vec{e} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}, \vec{f}\} = V^2$

$= \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}\}$

$\lambda\vec{e} + \mu\vec{e} = (\lambda+\mu)\vec{e}$

Neka je V vektorski prostor nad nekim poljem F, tada skup S zovemo skup izvodnica vektorskog prostor V ako se svaki element od V da napisati kao linearna kombinacija vektora iz S.

Skup S vektora je linearno zavisan ako se jedan od njih (neki) da izraziti kao linearna kombinacija drugih vektora.

$\{\vec{e}, \vec{f}, \vec{e}-\vec{f}\}$ zavisan $\qquad \vec{v}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \qquad \vec{f} = -1(\vec{e}-\vec{f}) + 1\cdot\vec{e}$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \qquad 1\cdot\vec{e} + (-1)\vec{f} \qquad \underline{\underline{\vec{v}_2}} = -1\cdot\vec{v}_3 + 1\cdot\vec{v}_1$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

S

Skup vektora je linearno nezavisan ako se ni jedan od njih ne može izraziti kao linearna kombinacija drugih. Ekvivalentno tome postoji netrivijalna linearna kombinacija tih vektora koja je nula.

barem jedan koeficijent $\neq 0$

$\lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_k\vec{v}_k = 0$, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in S$ (različiti) . $\cancel{\vec{v}_1 - \vec{v}_1 = 0}$

$\exists \underline{\underline{\lambda_i}}, \lambda_i \neq 0$ $\qquad$ isti

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_{i-1}\vec{v}_{i-1} + \lambda_{i+1}\vec{v}_{i+1} + \dots + \lambda_k\vec{v}_k = -\lambda_i\vec{v}_i \quad / : \left(-\frac{1}{\lambda_i}\right)$$

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\vec{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i}\vec{v}_2 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\vec{v}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\vec{v}_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i}\vec{v}_k = \vec{v}_i$$

Obratno, ako je $\quad \vec{v}_i = \mu_1\vec{v}_1 + \dots + \mu_{i-1}\vec{v}_{i-1} + \mu_{i+1}\vec{v}_{i+1} + \dots + \mu_k\vec{v}_k$

onda je $\quad \vec{v}_1 - \mu_1\vec{v}_1 - \mu_2\vec{v}_2 \dots - \mu_k\vec{v}_k = 0$

dakle, to je ekvivalentno

Baza vektorskog prostora je podskup skupa vektora koji je istovremeno skup izvodnica (svaki vektor je linearna kombinacija elemenata tog podskupa) i linearno nezavisan.

$S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$

$$\left.\begin{aligned}\vec{v} &= \lambda_1\vec{e}_1 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n,\\ \vec{v} &= \lambda_1'\vec{e}_1 + \dots + \lambda_n'\vec{e}_n\end{aligned}\right\} -$$

$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \lambda_1')\vec{e}_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda_n')\vec{e}_n \Rightarrow \begin{aligned}\lambda_1 - \lambda_1' &= 0\\ \lambda_2 - \lambda_2' &= 0\\ &\vdots\\ \lambda_n - \lambda_n' &= 0\end{aligned}$$

to znači da su svaka dva prikaza vektora v kao linearne kombinacije ista (imaju iste koeficijente)

Baza je dakle skup vektora takav da se svaki vektor u vektorskom prostoru da napisati kao linearna kombinacija vektora baze i to na jedinstveni način. Slijedeći put: sve baze vektorskog prostora imaju istu kardinalnost koju zovemo dimenzija.