$\sim_H$

Matematika 4, 11.03.2021.

$\underline{\underline{hg}} \sim_H g \sim_H \underline{\underline{h'g}}$, $h, h' \in H \subset G$ podgrupa

lijeva susjedna klasa elementa g s obzirom na podgrupu H

$g \sim_H g$ $(h = e)$ $\qquad g \sim g' \Rightarrow g' \sim g$

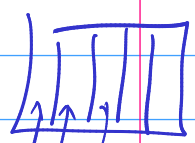
$\underset{\in H}{h} g = g' \Rightarrow \underset{\in H}{h^{-1}} g' = g$

$\overset{g \sim_H g'}{h_1 g = g'}$ $\qquad \overset{g' \sim_H g''}{h_2 g' = g''}$

$\underbrace{(h_2 h_1)}_{\in H} g = h_2 (\underbrace{h_1 g}_{g'}) = h_2 g' = g''$

$g \sim g' \iff [g] = [g']$ $\qquad g \sim_H g''$

$[g] \cap [g'] = \begin{cases} \emptyset \\ [g] \end{cases}$



razvedi S

$S = \bigcup_{g \in G} [g]$ razvedi ili jednaki ili disjunktni

$H \to H \cdot g = \{h \cdot g \mid h \in H\} = \{g' \in G \mid g' = hg\} = [g]$ za neki $h \in H$

$h \mapsto h \cdot g$ JE INJEKCIJA $\qquad h_1 \cdot g = h_2 \cdot g \Rightarrow h_1 g = h_2 g$

$h_1, h_2 \in H$, $h_1 \cdot g = h_2 \cdot g \quad / \cdot g^{-1}$

$(h_1 \cdot g) \cdot g^{-1} = (h_2 \cdot g) \cdot g^{-1}$

$h_1 = h_1 (\underbrace{g \cdot g^{-1}}_{e}) = h_2 (\underbrace{g \cdot g^{-1}}_{e}) = h_2$

$H \longrightarrow H \cdot g$ je bijekcija $\{hg \mid h \in H\}$

$h \longmapsto h \cdot g$

injekcija surjekcija

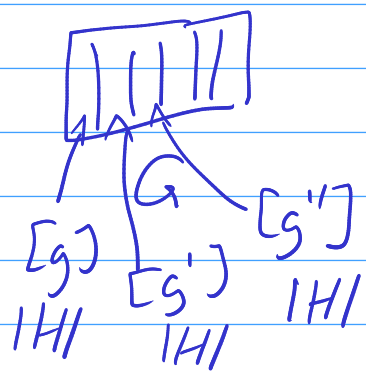
$$\mathrm{card}(H) = \mathrm{card}(Hg)$$

$$\# H = \# Hg$$

$$|H| = |Hg|$$

dakle svake dvije susjedne klase imaju isti kardinalni broj elemenata
Ako je G konačna grupa (ima konačno mnogo elemenata) tada je
i H konačna jer je njen podskup i

$|H| = |Hg|$



$$|G| = \underbrace{|H| + |H| + |H| + \dots + |H|}_{\text{onoliko koliko ima klasa}}$$

Lagrangeov teorem

$$|G| = |H| \cdot |H \backslash G|$$

za desne klase

$$|G| = |H| \cdot |G/H|$$

$$\{Hg \mid g \in G\} = H \backslash G$$ skup susjednih klasa

{ H g | g iz G } = H\G skup lijevih susjednih klasa
(lijevi kvocijentni skup grupe G u odnosu na podgrupu H)
{ g H | g iz G } = G/H skup desnih susjednih klasa
(desni kvocijentni skup grupe G u odnosu na podgrupu H)

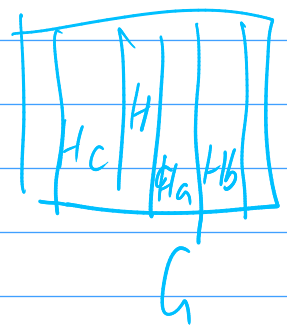
Lagrangeov teorem
Broj elemenata podgrupe dijeli broj elemenata konačne grupe.

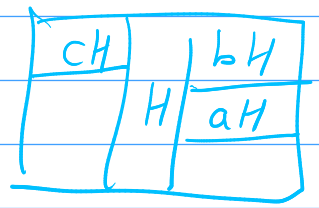
$$|H| \cdot |G/H| = |G|$$

$$m \cdot k = n \qquad m \mid n \begin{cases} m \text{ dijeli } n \\ n \text{ je djeljiv s } m \end{cases}$$

$|G| = 12$ onda je nemoguće da ima podgrupu od 8 elemenata

$|G| = 1$ $\{e\}$
$|G| = 12$ G } trivijalne podgrupe





$Hb \neq bH$

$Hb \cap bH \ni b$

Definicija. Podgrupa H grupe G je NORMALNA podgrupa ako je svaka lijeva susjedna klasa Hg jednaka nekoj desnoj susjednoj klasi (i u tom slučaju to je gH).

$$(\forall g \in G)\ gH = Hg$$

to ne znači da je gh = hg za sve h u H !!

$$\{gh \mid h \in H\} = \{hg \mid h \in H\}$$

$$gh = h'g \qquad (h \neq h' \text{ općenito!})$$

$$ghg^{-1} = h' \in H$$

Dakle, podgrupa H je normalna onda i samo onda kad za svaki g u G i svaki h u H element ghg^{-1} je u H

$$(g^{-1})^{-1} = g \qquad (\ )^{-1} : G \to G$$

je bijekcija

Ako je H normalna podgrupa u G onda je dakle lijevi kvocijentni skup (skup H\G lijevih susjednih klasa) jednak desnom kvocijentnom skupu G/H i na tom skupu je dobro definirano množenje pravilom

[g]*[g'] = [g g']

$[gg'] = [\check{g}\check{g}'] = [hgh'g']$

$[g] = [\check{g}] \quad (\exists h)\, hg = \check{g}$

$[g'] = [\check{g}'] \quad (\exists h')\, h'g' = \check{g}'$

$[hg] = [g]$

$gg' \underset{?}{\sim} hgh'g'$

$hgh'g' = \underbrace{\underbrace{h}_{\in H}\underbrace{(gh'g^{-1})}_{\in H}}_{\in H} gg' \sim gg'$

← da nije H normalna ne bi bilo uvijek u H pa $[gg']$ nije dobro definirano

$[\check{g}\check{g}'] = [hgh'g'] = [gg']$

Ako je $g \in G$, onda $\mathrm{konj}_g : G \to G$

$x \longmapsto gxg^{-1}$

konjugiranje elementom g u G

TEOREM. $(G/H, *, \underset{H}{\underset{\shortparallel}{[e]}})$ je grupa (kvocijentna grupa)

$[a]*[b] = [a \cdot b]$

$[a]*[b]$ je uvijek definirano

<u>asoc.</u> $([a]*[b])*[c] = [ab]*[c]$

$= [(ab)c] = [a(bc)]$

$= [a]*[bc] = [a]*([b]*[c])$

$[e] = He = H$ je neutralni element

$$[e] * [g] = [e \cdot g] = [g]$$

$$[g] * [e] = [g e] = [g]$$

$[g] \in G/H$, $[g]^{-1} = [g^{-1}]$

$$[g^{-1}] * [g] = [g^{-1} \cdot g] = [e]$$

$$[g] * [g^{-1}] = [g \cdot g^{-1}] = [e]$$

Q.E.D.

Napomena. $g \sim g' \iff (\exists h \in H) \quad hg = g' \quad \mathrm{I}$

$g \sim g' \iff (\exists h, h' \in H) \quad hg = h'g' \quad \mathrm{II}$

$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II} \quad \exists h' = e$

$\mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{I} \qquad hg = h'g' \Rightarrow$

$$\Rightarrow (h')^{-1} \cdot (hg) = (h')^{-1} \cdot (h'g')$$

$$\underbrace{((h')^{-1} \cdot h)}_{\tilde{h}} \cdot g \qquad \underbrace{((h')^{-1} h')}_{e} g'$$

$$\tilde{h} \cdot g = e\, g' = g'$$

π_H

$(\exists \tilde{h} \in H) \quad \tilde{h} \cdot g = g' \quad \mathrm{I}$

Slobodna grupa na alfabetu S

$S = \{a, b, c\}$ $\quad S^{-1} = \{a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}\}$

sve riječi s alfabetom $S \cup S^{-1}$

$W_0(S \cup S^{-1})$

$ab,\ ac,\ aaab,\ \underset{\overset{\shortparallel}{e}}{()},\ a^{-1}bcc^{-1}ac^{-1},\ c^{-1}b^{-1}$

$ab \cdot c^{-1}de = abc^{-1}de$ spajanje

$w \sim w'$ ako se dobije s konačno mnogo umetanja i izbacivanja izraza tipa $cc^{-1}, c^{-1}c$

riječ

$\underline{\underline{abc^{-1}d^{-1}dca}} \sim abc^{-1}ca \sim aba$

$\wr$

$\underline{\underline{ab^{-1}bba}}$

množimo [klase]

$[w] * [w'] = [ww']$

dobro def.

i to je grupa (slobodna)