zadarmat2 5.6.2017. moguće 50 bodova

Heronova formula $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, s = \frac{a+b+c}{2}$, implicitna jednadžba ravnine u prostoru $Ax + By + Cz + D = 0$ okomita na vektor $(A, B, C) = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$. Vektorski umnožak

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_z - a_z b_x)\vec{k}, \ \|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

Parameterska jednadžba pravca $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, $\vec{a}$ je vektor uzduž pravca, a $\vec{r}_0$ koordinate izabrane točke. U testu koristimo $\cos 30° = \sqrt{3/2}$, $\sin 30° = 1/2$. Skalarni umnožak $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$, iz njega je $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$.

1. Piramida ima osnovicu koja je paralelogram sa stranicama $a = 5$, $b = 3$ i kut izmedju a i b je 30° i visinu od 4. Koliko je površina osnovice piramide ? Koliki je volumen piramide? (5b)

Površina paralelograma je $av_a = ab \sin 30° = 5 \cdot 3 \cdot 1/2 = 15/2$. Volumen je 1/3 površine baze (paralelograma) puta visina jednako 10 kubnih jedinica.

2. Koje su tvrdnje točne ? Zaokruži sve točne odgovore. (5b, rješenje: samo e)

a) za svaki četverokut postoji opisana kružnica (NE: tada bi bio tetivni)

b) ako su A, B, C nekolinearne točke u ravnini tada postoji beskonačno mnogo raznih kružnica koje prolaze kroz te tri točke (NE! točno jedna kružnica)

c) translacija je kompozicija dviju osnih simetrija čiji su pravci simetrije medjusobno okomiti (NE! jer trebaju biti paralelni, ako su okomiti to je centralna simetrija)

d) četverokut je uvijek konveksan skup (ne, ima nekonveksnih)

e) ako se dijagonale četverokuta raspolavljaju onda su mu nasuprotne stranice paralelne (da, to su dvije karakterizacije paralelograma, prvu uzimamo za definiciju)

3. Objasni kako konstruirati trokut ako su mu zadane stranice $b > a$ i kut β nasuprot stranici b i skiciraj

To je jedna od 4 osnovne konstrukcije trokuta. Prvo prenesemo stranicu a kao $\overline{BC}$, i gledamo tu dužinu kao krak kuta β kojempreneseom drugi krak Bp kuta β na uobičajeni način s vrhom u jednom od krajeva dužine, a to je točka B. U šestar stavimo dužinu b i napravimo krug oko C s tim otvorom, sjecište s krakom Bp bit će točka A. Skica u knjizi Pavković, Veljan.

4. Skiciraj jedan nekonveksni četverokut. (2 boda) vidi udžbenik

5. Promatrajte uspravni STOŽAC kojemu je izvodnica duljine c i baza promjera d. Kolik je njen volumen V i koliko je oplošje P u terminima d i c ?

Površina osnovice je $B = r^2\pi = \frac{d^2}{4}\pi$, a volumen je $\frac{Bh}{3}$ gdje je h visina, $h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ po Pitagorinom teoremu za polovinu jednakokračnog trokuta $c - d - c$ koji je uspravni presjek stošca po sredini stošca. Oplošje je površina baze $(d/2)^2\pi$ plus površina plašta. Dok plašt razmotamo dobijemo kružni isječak radijusa c i površine $\alpha \cdot c$ gdje je razmotani kut α u radijanima takav da $\alpha \cdot c$ je kružni luk, a on je opseg donje kružnice $d\pi$, dakle $\alpha = d\pi/c$ i površina isječka, dakle plašta $(d/2)c\pi$. Ukupno oplošje je dakle $(d/2)c\pi + (d^2/4)\pi$.

6. Nadji kut θ (ili kosinus ili sinus kuta, dovoljno) izmedju ravnine $3x + 2y + 5z - 8 = 0$ i pravca $x = 3t$, $y = 2t + 1$, $z = -t - 1$.

Pravac je u obliku $\vec{r} = (0, 1, -1) + (3, 2, -1)t$, dakle vektor $\vec{a} = (3, 2, -1)$ je uzduž pravca. Vektor normale na ravninu je $\vec{n} = (3, 2, 5)$. Kut izmedju normale i pravca komplementaran je kutu izmedju ravnine i pravca, dakle kosinus izmedju normale i pravca $\cos\angle(\vec{a}, \vec{n})$ je sinus traženog kuta $\sin\theta$. A kosinus normale i pravca je kao kosinus kuta izmedju dva vektora, pa se dobije iz skalarnog umnoška $\|\vec{a}\|\|\vec{n}\| \cos\angle(\vec{a}, \vec{n})$. Dakle sinus traženog kuta je $(3, 2, 5) \cdot (3, 2, -1) = 8$ podijeljeno s duljinama vektora $(3, 2, -1)$ (to je $\sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$) i vektora $(3, 2, 5)$ (to je $\sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38}$), dakle $\sin\theta = 8/\sqrt{14 \cdot 38} = 4/\sqrt{7 \cdot 19} = 4/\sqrt{133}$. Inverzni sinus nam daje kut θ. (5 bodova)

7. Neka je $\alpha = 30^\circ$ šiljasti kut paralelograma. Stranice tog paralelograma su $a = 3$ i $b = 4$. Koliko je visina na stranicu a ? Koliko je visina na stranicu b ? Koliko je površina paralelograma ?

$v_b = a \sin 30^\circ = 3/2$, $v_a = b \sin 30^\circ = 2$, $P = av_a = bv_b = ab \sin 30^\circ = 6$ (4 boda)

8. Neka je donja osnovica trapeza $a = 3$, srednjica trapeza $s = \frac{a+c}{2} = 4$ i visina $v = 11$. Kolika je površina tog trapeza ?

$P = s \cdot v = 44$ (3 boda)

9. Nadji visinu i površinu jednakokračnog trokuta kojem su stranice $a = 6$, $b = c = 10$.

Razdijelimo jednakokračni trokut visinom na a na dva sukladna pravokutna trokuta sa stranicama $a/2, b, v_a$. Tada je $v_a = \sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{91}$ i $P = av_a/2 = 3\sqrt{91}$ (3 boda)

10. Zadana je uspravna četverostrana prizma (plašt ima četiri stranice) kojoj je visina v, a osnovica je romb stranice a i kuta medju susjednim stranicama od 30°. Koliki je volumen prizme ?

Površina romba je $av_a = aa \sin 30^\circ = a^2/2$, a volumen je površina romba puta visina, a to je $a^2v/2$. (4 boda)

11. Koliko dijagonala ima pravilni deseterokut ? Koliki je zbroj njegovih unutarnjih kuteva ?

Iz svakog vrha idu spojnice prema ostalih 9 vrhova, od čega su 7 dijagonale, a 2 su stranice. Dakle bilo bi $7 \cdot 10$ dijagonala, ali se svaka dijagonala računa dvaput jer izlazi iz dva vrha, pa je zapravo $70/2 = 35$ dijagonala, a zborj kuteva je $180^\circ(10-2) = 1080^\circ$. (4 boda)

12. Kolika je duljina luka kružnice radijusa 10 cm i središnjeg kuta $\pi/3$? (3 boda)

Ako je kut 2π onda je kružni luk cijela kružnica, a njena duljina je $2r\pi$. Ako je kut α onda je duljina luka proporcionalna kutu, dakle $\alpha : 2\pi = l : (2r\pi)$, tj. $l = \alpha r = 10\pi/3$.

13. Tri vrha paralelograma su $A(2,1), B(3,2), C(5,5)$. Nadji vrh D nasuprotan vrhu A. (4b)

Ako je nasuprotan (tj. vrhovi su redom $ABDC$), tada se $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ raspolavljaju, polovište P od $\overline{BC}$ je $(\frac{3+5}{2}, \frac{2+5}{2}) = (4, \frac{7}{2})$ pa je $\vec{PD} = \vec{AP} = (2, 5/2)$ i $D = P + \vec{PD} = P + \vec{AP} = (6,6)$. Priznavao sam djelomično i račun/rezultat ako su oznake bile redom $ABCD$ no tada ne bi D bio nasuprotni vrh!