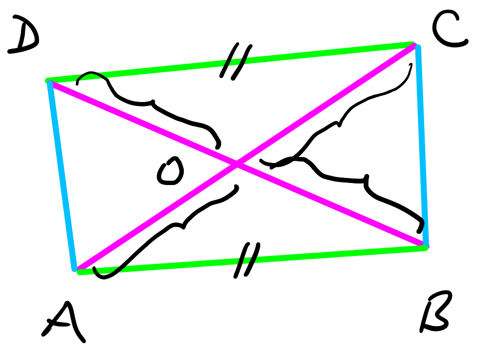
Matematika 2, 25. ožujka 2021.

Paralelogram je po određenju četverokut kojem se dijagonale raspolavljaju, ili drugim riječima čije obje dijagonale imaju isto polovište.

Ekvivalentan uvjet je da je to četverokut kojem su dvije po dvije stranice međusobno paralelne (i tada slijedi da su dvije po dvije jednake duljine). Ta karakterizacija je ekvivalentna gornjoj definiciji na osnovi razoniranja u kojem koristimo centralnu simetriju s centrom u polovištu dijagonala.

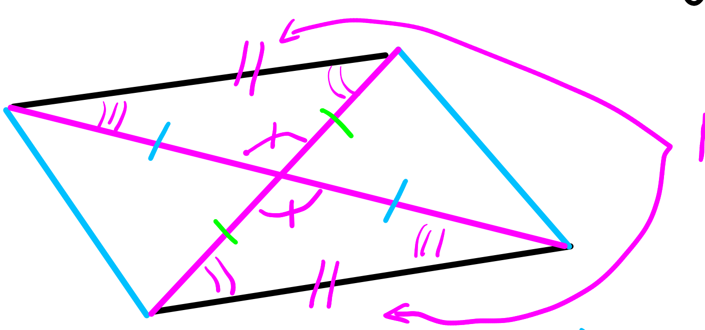


centralna simetrija šalje pravce u paralelne pravce, a po definiciji $s_O(C) = A$, $s_O(B) = D$ jer centralna simetrija šalje točku A u točku koja je na pravcu OA jednako udaljena od O kao i A (a kako je O polovište od dužine $\overline{AC}$ to mora biti točka C).

$AB \xrightarrow[s_O]{} CD$ pa je paralelna dužina/pravac

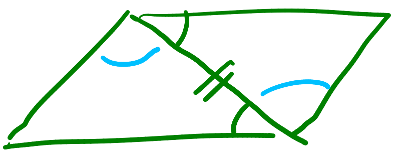
$\overline{AB} \xrightarrow[s_O]{} \overline{CD}$

Sad da vidimo obrat. Pretpostavimo dakle da su dvije po dvije stranice međusobno paralelne i trebamo pokazati da se onda dijagonale raspolavljaju.



paralelne

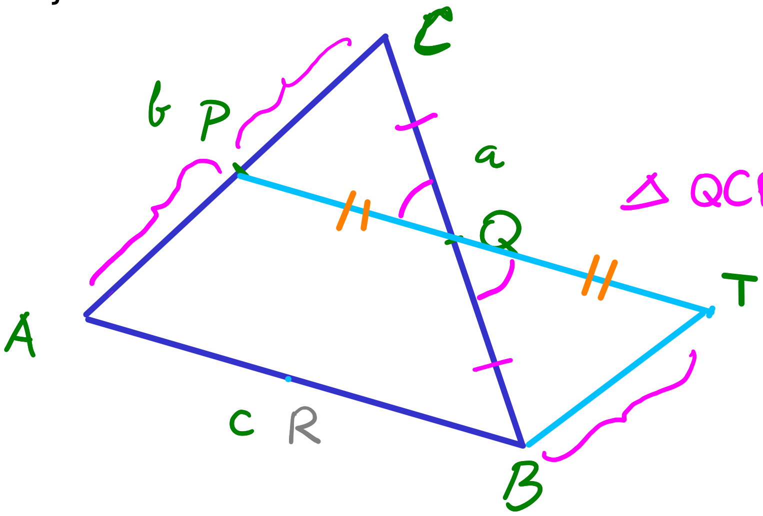
$\Rightarrow$ raspolavljaju



Knjiga od Pavkovića i Veljana, Elementarna matematika 1, str. 213 i okolo

Srednjica trokuta je spojnica koja spaja polovišta dviju različitih stranica. Dakle, svaki trokut ima tri srednjice.

Teorem o srednjici trokuta. Srednjica trokuta koja spaja polovišta dviju stranica paralelna je trećoj stranici i njena duljina s je pola duljine treće stranice.



$\triangle QCP \cong \triangle QBT$ jer centralna sim.

$S_Q(BT) = CP$

centralna simetrija ⇒ BT || CP

CA, isti pravac

dakle BT || PA

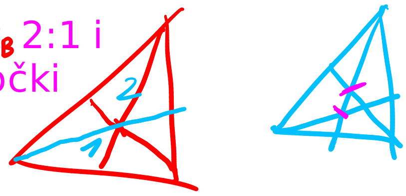
⇒ ABPT je paralelogram

⇒ PT || AB, i d(A,B) = d(P,T) = 2 d(P,Q) $\boxed{}$

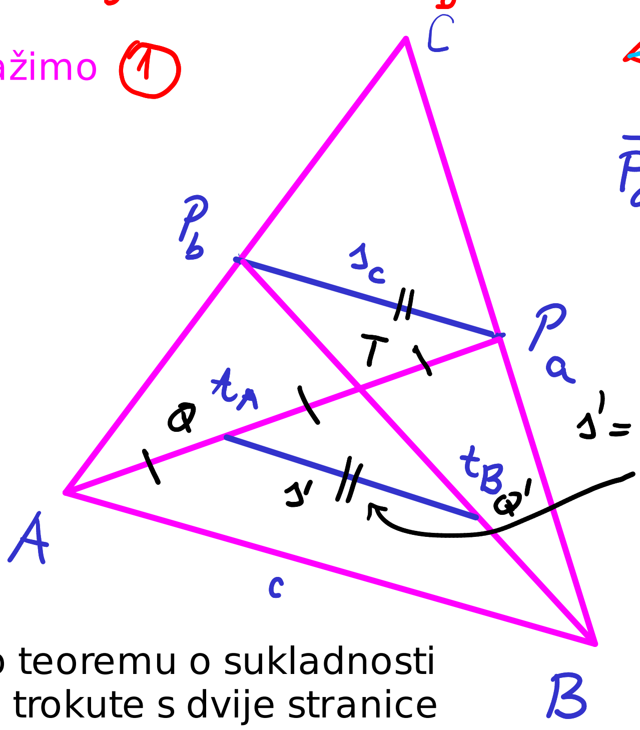
$\overline{AB} = \overline{PC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{AP}$

Teorem o težištu i težišnicama trokuta. 1 Svaka težišnica siječe svaku drugu težišnicu u točki koja je dijeli 2 naprama 1, s time da je veći dio bliže vrhu trokuta iz kojeg ide težišnica. 2 Kao rezultat toga sve tri težišnice sijeku se u istoj točki.

1 ⇒ 2 je lako, naime ako t_A dijeli t_B 2:1 i t_C dijeli t_B 2:1, onda sijeku t_B u istoj točki



Dokažimo 1

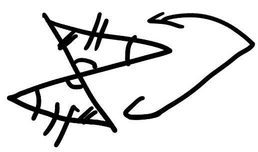


$\overline{P_a P_b} \parallel \overline{AB}$ po teoremu o srednjici za $\triangle$ABC

$s_c = \frac{1}{2}\overline{AB}$

$s' = \overline{P_{AT} P_{BT}} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ po teoremu o srednjici za $\triangle$ABT

i paralelna



$s_c \parallel \overline{AB} \parallel s'$

$\Rightarrow s_c \parallel s'$

po teoremu o sukladnosti za trokute s dvije stranice i kutem između njih

$\triangle QQ'T \cong \triangle P_a P_b T \Rightarrow \overline{TP_a} = \overline{TQ} = \overline{QA}$

$\Rightarrow 2:1$