

mat1 11.5.2021. grupa T1C, 10 zadataka

bodovi 27 (2), 34 (3), 40 (4), 48 (5), ukupno 54 boda

1. (3 b) Neka su C, D skupovi i R, Q neki predikati, R s jednim argumentom i Q s dva argumenta. Napiši matematičkim simbolima izraz: skup svih y iz D takvih da vrijedi $R(x)$ i da ni za jedan x iz C ne vrijedi $Q(x, y)$.

Rješenje: $\{y \in D \mid R(x) \wedge \neg((\exists x \in C)Q(x, y))\}$

2. (4 b) Promatraj funkcije $f : A_1 \rightarrow A_2$ i $g : A_2 \rightarrow A_3$ gdje je $A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n \leq 3 + 4 \cdot i\}$, za $i \in \{1, 2, 3\}$. Neka su f, g dani formulama $f : k \mapsto 2 \cdot k - 3$ na cijeloj domeni i $g : k \mapsto k + 2$ za $k \geq 9$ i $g : k \mapsto 2k - 2$ ako je $k < 9$. Izračunaj kompoziciju $g \circ f$ pojedinačno za svaki element u domeni. Iz def., $A_1 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $A_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$,

$$A_3 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

$$3 \xrightarrow{f} 2 \cdot 3 - 3 = 3 \xrightarrow{g} 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

$$4 \xrightarrow{f} 2 \cdot 4 - 3 = 5 \xrightarrow{g} 2 \cdot 5 - 2 = 8$$

$$5 \xrightarrow{f} 2 \cdot 5 - 3 = 7 \xrightarrow{g} 2 \cdot 7 - 2 = 12$$

$$6 \xrightarrow{f} 2 \cdot 6 - 3 = 9 \xrightarrow{g} 9 + 2 = 11$$

$$7 \xrightarrow{f} 2 \cdot 7 - 3 = 11 \xrightarrow{g} 11 + 2 = 13$$

$$g \circ f : 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 8, 5 \mapsto 12, 6 \mapsto 12, 7 \mapsto 13.$$

3. (2+2+2) Neka su $A = \{a, D, E\}$, $B = \{i, j, E, F\}$, $C = \{a, j\}$.

Nađi a) simetričnu diferenciju $A \Delta C = \{D, E, j\}$

b) $A \cap (B \cup C) = \{a, E\}$

c) $(C \times C) \setminus \{(a, a), (a, E), (a, F)\} = \{(a, j), (j, a), (j, j)\}$

4. (i) (3b) Raspoređujemo 8 jednakih kuglica u 3 rupe označene A, B, C. Moguće je da u nekim rupama ne bude ni jedne kuglice. Koliko različitih rasporeda kuglica postoji? Npr. A3+B0+C5, A5+B0+C3, A3+B2+C3, A3+B3+C2 su neki od tih rasporeda.

Rješenje: osam kuglica i dvije pregrade među njima je 10 predmeta pa je 10 izaberi 8 = 10 izaberi 2 = $10 \times 9/2 = 45$

ii) (2b) Definiraj što je to permutacija. Koliko postoji permutacija od 4 slova? R: Permutacija je bijekcija skupa u samog sebe. $4! = 24$

iii) (3b) Na koliko načina možemo poredati u red tri čovjeka i dvije žene koje razlikujemo ako prva u redu mora biti žena? Svi pet ljudi međusobno razlikujemo.

Rj.: prvo izaberemo ženu na prvo mjesto, jedna od dvije, onda kako raspodijeliti ostalih 4 ljudi dakle $2 \times 4! = 48$.

5. (2 b) a) Pretvori brojku $1555_{(6)}$ na bazi 6 u dekadski sustav.

$$1 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0 = 216 + 180 + 30 + 5 = 431_{(10)}$$

(3 b) b) Pretvori dekadsku brojku $2109_{(10)}$ u brojku zapisanu u bazi 7.

$$2109 : 7 = 301 \text{ i } 2 \text{ ostatak}$$

$$301 : 7 = 43 \text{ i } 0 \text{ ostatak}$$

$$43 : 7 = 6 \text{ i } 1 \text{ ostatak}$$

$$6 : 7 = 0 \text{ i } 6 \text{ ostatak}$$

$$2 + 0 \cdot 7 + 1 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^3 = (6102)_{(7)}$$

$$\text{Provjera } 2 + 49 + 6 \cdot 343 = 51 + 2058 = 2109_{(10)}$$

6. (4 b) Nađi najveću zajedničku mjeru i najmanji zajednički višekratnik brojeva 2016 i 774 Euklidovim algoritmom.

$$2016: 774 = 2 \text{ i } 468 \text{ ostatak}$$

$$774 : 468 = 1 \text{ i } 306 \text{ ostatak}$$

$$468 : 306 = 1 \text{ i } 162 \text{ ostatak}$$

$$306 : 162 = 1 \text{ i } 144 \text{ ostatak}$$

$$162: 144 = 1 \text{ i } 18 \text{ ostatak}$$

$$144 : 18 = 8 \text{ i } 0 \text{ ostatak}$$

$$M(2016, 774) = 18 \text{ (provjera: } 2016/18 = 112 \text{ i } 774/18 = 43 \text{ i } 43 \text{ je prost)}$$

$$V(2016, 774) = 2016/18 \cdot 774 = 112 \cdot 774 = 77400 + 7740 + 1548 = 86688$$

$$\text{ili } 2016 \cdot 43 = 80640 + 6048 = 86688$$

7. (3+3+3) Izračunaj umnožak slijedećih kompleksnih brojeva (točka je decimalna točka, a $i = \sqrt{-1}$, a i^n je n -ta potencija broja i). Rezultat mora biti u obliku $a + bi$ gdje su a i b realni konačni decimalni brojevi napisani točno (ne kao razlomci nego kao decimalni brojevi!!).

a) rješenje je

$$(0.2 + 0.625i) \cdot (7.1 + 4.3i) = (0.2 - 0.625 \cdot 4.3) + (0.625 \cdot 7.1 + 0.2 \cdot 4.3)i = -1.2675 + 5.2975i$$

Kao razlomci (to se NIJE tražilo)

$$(1/5 + 5/8i) \cdot (71/10 + 43/10i) = -\frac{507}{400} + \frac{2119}{400}i$$

b) $(1 + 2i + 3i^5) \cdot (1 - i - 5i^2 - i^3)$ (savjet: prvo izračunajte svaku potenciju, onda ih zbrojite u svakoj zagradi i na kraju pomnožite dva dobivena kompleksna broja) $= (1 + 5i) \cdot (1 - i + 5 + i) = 6 + 30i$

c) Podijeli kompleksne brojeve (rezultat mora biti u obliku $a + bi$ gdje su a i b realni brojevi).

$$\frac{1 + 2i}{6 - 7i} = \frac{1 + 2i}{6 - 7i} \cdot \frac{6 + 7i}{6 + 7i} = \frac{6 - 14 + 12i + 7i}{36 + 49} = \frac{-8}{85} + \frac{19}{85}i$$

8. (4 b) Napiši beskonačni decimalni broj $3.11252525\dots$ kao razlomak kojem su brojnik i nazivnik cijeli brojevi.

$$b = 3.11 + x \text{ gdje je } x = 0.00252525\dots,$$

$$100x = 0.2525\dots = 0.25 + x$$

$$99x = 25/100 = 1/4, \text{ dakle } x = 1/396$$

$$b = 311/100 + 1/396 = (311 \cdot 396 + 100)/39600 = 123256/39600 = 30814/9900 = 15407/4950$$

9. Pripremamo dvije mješavine zemlje i pjeska.

a) (1 bod) U prvoj mješavini stavimo 10 kila pjeska i 80 kila zemlje.
Koliki je udio pjeska u mješavini ?

$$10/90 = 1/9 = 0.1111$$

b) (4 boda) Drugu mješavinu, s većim udjelom pjeska, radimo u koritu tako da miješamo čisti pjesak zajedno s nekom količinom prve mješavine. Ako smo u koritu priredili 50 kila druge mješavine u kojoj je ukupno 15 kila pjeska (čisti pjesak zajedno s pjeskom koji se već nalazi u prvoj mješavini koja je dodana) koliko smo u koritu stavili čistog pjeska, a koliko prve mješavine (zbroj mora biti 50 kila!).

x prve mj. i y čistog pjeska, dobijemo

$$x + y = 50$$

$$1/9 x + y = 15$$

$$\begin{aligned} \text{oduzmem i dobijemo } & 8/9 x = 35, \text{ dakle } x = 35 \text{ puta } 9 \text{ kroz } 8 = 315/8 \\ & = 39.375 \text{ u } y = 50 - 39.375 = 10.625 \text{ kg ili } y = (8 \text{ puta } 50 - 315)/8 = 85/8 \\ & = 10.625 \text{ kg.} \end{aligned}$$

10. (6 bodova) Dokaži matematičkom indukcijom da vrijedi za sve $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}$$

S lijeve strane jednakosti je zbroj n razlomaka, a na desnoj strani je razlika dva razlomka.

Za $n = 1$ imamo $1/3 = 1/2 - 1/6$.

Korak indukcije: lijeva strana za $(n+1)$ je

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{[2(n+1)-1][2(n+1)+1]} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{-(2n+3)+2}{2(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{-(2n+1)}{2(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+6} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4(n+1)+2} \end{aligned}$$

što je desna strana za $(n+1)$.