mat1 T1C 2. rok 15.1.2021., 10 zad., 50 bod.

1. (2 boda) Neka su C, D skupovi i R, Q neki predikati, R s jednim argumentom i Q s dva argumenta. Napiši matematičkim simbolima izraz: skup svih x iz C takvih da vrijedi $R(x)$ i da postoji y iz D takav da vrijedi $Q(x, y)$.

Rješenje. $\{x \in C \mid R(x) \wedge (\exists y \in D) Q(x, y)\}$

2. (3 boda) Nadji inverz funkcije $f : \mathbb{N} \to \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \ldots\}$ dane formulom $f(n) = 3n - 1$.

$f^{-1}(m) = n$ ako i samo ako $f(n) = m$, dakle $3n - 1 = m$ što je ekvivalentno $n = (m + 1)/3$. Ako je $m = 2, 5, 8, \ldots$ tada je $m + 1$ djeljivo s 3 pa je $(m + 1)/3 = 1, 2, 3, \ldots$ kako se tražilo.

3. (2+2+2 boda) Neka su $A = \{a, 5, 6\}$, $B = \{s, t, 6, 7\}$, $C = \{a, t\}$.

Nadji a) skupovnu diferenciju $A \backslash C = \{a, 5, 6\} \backslash \{a, t\} = \{5, 6\}$

b) $A \cup (B \cap C) = \{a, 5, 6\} \cup \{t\} = \{a, 5, 6, t\}$

c) $A \times C \backslash \{(a, a), (a, 6), (6, a), (6, t)\} =$

$$= \{(a, a), (a, t), (5, a), (5, t), (6, a), (6, t)\} \backslash \{(a, a), (a, 6), (6, a), (6, t)\}$$

$$= \{(a, t), (5, a), (5, t)\}$$

4. i) (3 boda) Od 32 karte (4 boje, 8 po skali) izvlačimo ruku od 4 karte. Koliko mogućnosti postoji za tu ruku ako je u njoj jedna karta karo, dvije herc, a preostala nije niti karo niti herc ?

Biramo 1 K karo (8 karti), 2 H herc (8 karti), 1 O ostala (od 16 karti)

$8 \cdot \binom{8}{2} \cdot 16 = 8 \cdot \frac{8}{2} \cdot 16 = 8 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 16 = 512 \cdot 7 = 3584$

ii) (1 bod) Na koliko načina možemo poredati u red pet ljudi ?

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

iii) (2 boda) Na koliko načina možemo poredati u red tri čovjeka i dvije žene koje razlikujemo ako prva u redu mora biti žena ? Svih pet ljudi međusobno razlikujemo.

Prvo odredimo poziciju na kojoj je druga žena. Za to imao 4 pozicije. Onda odredimo koja je na prvom, a koja na drugom mjestu 2 načina. Onda rasporedimo 3 preostala čovjeka na 3 pozicije na $3! = 6$ n. Dakle $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$.

5. a) Pretvori brojku $1757_{(8)}$ na bazi 8 u dekadski sustav. (2 boda)

$1757_{(8)} = 1 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 1 \cdot 512 + 7 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = 512 + 448 + 40 + 7 = 1007_{(10)}$

b) Pretvori dekadsku brojku $2429_{(10)}$ u brojku zapisanu u bazi 6. (3 boda)

$2429 : 6 = 404 +$ ostatak 5

$404 : 6 = 67 +$ ostatak 2

$67 : 6 = 11 +$ ostatak 1

11: $6 = 1 +$ ostatak 5

$2429 = 1 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0 = 15125_{(6)}$

Provjera: 1296+1080+36+12+5 = 2429

6. (4 boda) Nađi najveću zajedničku mjeru i najmanji zajednički višekratnik brojeva 1008 i 1548 Euklidovim algoritmom.

1548 : 1008 = 1 s ostatkom 540

1008:540 = 1 s ostatkom 468

540:468 = 1 s ostatkom 72

468: 72 = 6 s ostatkom **36**

72:36 = 2 bez ostatka

Dakle, $M(1008, 1548) = 36$ i $V(1008, 1548) = \frac{1008 \cdot 1548}{36} = 43344$

7. (3+3+3) Izračunaj umnožak slijedećih kompleksnih brojeva (točka je decimalna točka, a $i = \sqrt{-1}$, a i^n je n-ta potencija broja i). Rezultat mora biti u obliku $a + bi$ gdje su a i b realni konačni decimalni brojevi napisani točno (ne kao razlomci nego kao decimalni brojevi!!). a) (3 boda)

$$\begin{aligned}
(0.71 + 4.3i) \cdot \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{5}{8}i\right) &= (0.71 + 4.3i) \cdot (0.2 + 0.625i) \\
&= 0.142 + 0.71 \cdot 0.625i + 0.86i - 4.3 \cdot 0.625 \\
&= (0.142 - 2.6875) + (0.44375 + 0.86)i \\
&= -2.5455 + 1.30375i
\end{aligned}$$

7b) $(1 + i + i^5 + i^7) \cdot (1 - i - i^2 - i^3)$ (savjet: prvo izračunajte svaku potenciju, onda ih zbrojite u svakoj zagradi i na kraju pomnožite dva dobivena kompleksna broja, 3 boda)

$$(1+i+i^5+i^7) \cdot (1-i-i^2-i^3) = (1+i+i-i) \cdot (1-i+1+i) = (1+i) \cdot 2 = 2+2i$$

7c) (3 boda) Podijeli kompleksne brojeve (rezultat *mora* biti u obliku $a + bi$ gdje su a i b realni brojevi).

$$\frac{2+i}{5-7i} = \frac{2+i}{5-7i}\frac{5+7i}{5+7i} = \frac{10+14i+5i-7}{25+49} = \frac{3}{74} + \frac{19}{74}i$$

8. (4 boda) Napiši broj $5.1232323\ldots$ kao razlomak kojem su brojnik i nazivnik cijeli brojevi.

$5.1232323\ldots = 5.1 + x$ gdje je $x = 0.0232323\ldots$
$100x = 2.323232323\ldots = 2.3 + x$
$99x = 2.3$, dakle $x = 2.3/99 = 23/990$
Ukupno $5.1 + 23/990 = 51/10 + 23/990 = \frac{51 \cdot 99 + 23}{990}$
Brojnik je $(5100 - 51) + 23 = 5049 + 23 = 5072$
Dakle, rezultat je $\frac{5072}{990} = \frac{2536}{495}$

9. (2+3) Janko ima 40-postotnu rakiju u boci, drugim riječima u boci ima 40 posto alkohola i 60 posto vode.

a) (2 boda) ako je rakije samo 7 decilitara i Janko dopuni 3 decilitra čiste vode u bocu, kolika će biti jakost tako dobivene patvorene rakije ?

Sve računajmo u litrama. 1 dcl = 0.1 l
jakost = udio = $\frac{0.7 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0}{0.7 + 0.3} = 0.28$ ili 28%

b) (3 boda) ako mu Slavko donese bocu 50-postotne rakije i Janko želi napraviti litru rakije koja je 48-postotna miješajući rakiju iz Slavkove s rakijom iz svoje boce, koliko će u mješavini biti one slabije Jankove rakije ?

Dakle miješa 50 postotnu s 28 postotnom iz dijela a)
Sad je ukupno litra: x Jankove od 0.28 i $(1 - x)$ Slavkove od 0.50.

$$\frac{x \cdot 0.28 + (1 - x) \cdot 0.50}{x + 1 - x} = 0.48$$

$$\frac{0.50 + (0.28 - 0.50)x}{1} = 0.48$$

$$0.50 - 0.22x = 0.48$$

$$0.02 = 0.22x$$

$$x = 0.02/0.22 = 2/22 = 1/11 = 0.090909\ldots$$

Mogli smo i drukčije: gledati traženi defekt od 2 posto (48-50) i gledamo razliku u jačini od 22 posto po litri pa znači da promjena treba samo na 2 od 22 dijela, što je $9.09\ldots$ posto.

10. (6 bodova) Dokaži matematičkom indukcijom da za sve $k = 2, 3, 4, \ldots$ vrijedi identitet

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$$

S lijeve strane jednakosti se množi $(k-1)$ množitelja.

Rješenje. Baza indukcije s lijeve strane ima samo jedan množitelj, $1 - 1/2^2 = 1 - 1/4 = 3/4$, a s desne $1/2 + 1/(2 \cdot 2) = 1/2 + 1/4 = 3/4$, dakle isto.

Pretpostavimo da vrijedi za k, tada za $k+1$ trebamo vidjeti je li

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2(k+1)} \qquad (1)$$

Prema pretpostavci indukcije svi množitelji lijeve strane osim zadnjeg daju $\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$ pa je lijeva strana to pomnoženo sa zadnjim množiteljem,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right) \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

U svakoj od dvije zagrade zbrojimo razlomke i umnožak ispada

$$\frac{k+1}{2k} \frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2} = \frac{k^2 + 2k + 1 - 1}{2k(k+1)} = \frac{k^2 + k}{2k(k+1)} = \frac{k(k+2)}{2k(k+1)} = \frac{k+2}{2(k+1)},$$

a desna strana od (1) je $\frac{1}{2} + \frac{1}{2(k+1)} = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)} = \frac{k+2}{2(k+1)}$, dakle isto. Time je korak indukcije dokazan i tvrdnja slijedi.