

## mat1 29.1.2020. grupa T1A

Zabranjeni kalkulatori. Na svakoj stranici napiši svoje ime, a uz svaki zadatak broj zadatka i cjelokupni postupak.

1. Neka su  $C, D$  skupovi i  $R$  neki predikat koji uzima dva argumenta. Napiši matematičkim simbolima izraz: skup svih parova  $(x, y)$  iz  $C \times D$  takvih da je par u skupu onda i samo onda kad je  $R(x, y)$  lažno.
2. Nadji inverz funkcije  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{5, 7, 9, \dots\}$  dane formulom  $f(n) = 2n + 3$ .
3. Neka su  $A = \{-1, 0, 6\}$ ,  $B = \{b, c, 6, 7\}$ ,  $C = \{-1, c\}$ .  
Nadji a)  $A \setminus C$   
b)  $A \cup (B \cap C)$   
c)  $A \times C \setminus \{(-1, -1), (2, c), (0, c)\}$
4. i) Od 32 karte (4 boje, 8 po skali) izvlačimo ruku od 4 karte. Koliko mogućnosti postoji za tu ruku ako je u njoj svaka karta boje herc osim točno jedne koja nije herc ?  
ii) Na koliko načina možemo poredati u slog (konačni niz) dvije bijele, dvije crne i jednu žutu kuglicu ako kuglice iste boje ne razlikujemo, tj. međusobni poredak je bitan za brojenje samo ako se boje razlikuju ?
5. a) Pretvori brojku  $2707_{(8)}$  na bazi 8 u dekadski sustav.  
b) Pretvori dekadsku brojku  $1239_{(10)}$  u brojku zapisanu u bazi 6.
6. Za malu tepsiiju bakinog kolača ide 25 grama grožđica, 100 grama šećera, 400 grama brašna, i 5 jaja. Ako imate samo 4 jaja i želite napraviti manji kolač jednakog sastava, koliko treba staviti grožđica, šećera i brašna ?

7. Nađi najveću zajedničku mjeru i najmanji zajednički višekratnik brojeva 660 i 120 Euklidovim algoritmom.

8. Izračunaj umnožak slijedećih kompleksnih brojeva (točka je decimalna točka, a  $i = \sqrt{-1}$ , a  $i^n$  je  $n$ -ta potencija broja  $i$ ). Rezultat mora biti u obliku  $a + bi$  gdje su  $a$  i  $b$  realni konačni decimalni brojevi napisani točno.

a)

$$(0.21 + 1.3i) \cdot \left( \frac{1}{8} + \frac{3}{5}i \right)$$

b)  $(1 + i + i^2 + i^3) \cdot (1 - i - i^2 - i^3)$  (savjet: prvo izračunajte svaku potenciju, onda ih zbrojite u svakoj zagradi i na kraju pomnožite dva dobivena kompleksna broja)

c) Podijeli kompleksne brojeve (rezultat mora biti u obliku  $a + bi$  gdje su  $a$  i  $b$  realni brojevi).

$$\frac{2+i}{4-3i} =$$

9. Napiši broj

1.2145454545... kao razlomak kojem su brojnik i nazivnik cijeli brojevi.

10. Ako tri čovjeka za 14 sati u radionici naprave 70 kvalitetnih cipela koliko cipela naprave dva čovjeka za 30 sati ?

### Skica rješenja za mat1 29.1.2020., T1A

1. Neka su  $C, D$  skupovi i  $R$  neki predikat koji uzima dva argumenta. Napiši matematičkim simbolima izraz: skup svih parova  $(x, y)$  iz  $C \times D$  takvih da je par u skupu onda i samo onda kad je  $R(x, y)$  lažno.

Odgovor:  $\{(x, y) \in C \times D \mid \neg R(x, y)\}$

2. Nadji inverz funkcije  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{5, 7, 9, \dots\}$  dane formulom  $f(n) = 2n + 3$ .

Odgovor: Ako je  $f(n) = m$  tada je  $f^{-1}(m) = f^{-1}(f(n)) = n$ . iz  $m = f(n) = 2n + 3$  slijedi  $2n + 3 = m$ , dakle  $n = -3/2 + 1/2m$ . Dakle, funkcija treba biti  $f^{-1} : m \mapsto -3/2 + m/2 = \frac{m-3}{2}$ ,  $f^{-1} : \{5, 7, 9, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$ . Ta funkcija je dobro definirana i bijekcija.

3. Neka su  $A = \{-1, 0, 6\}$ ,  $B = \{b, c, 6, 7\}$ ,  $C = \{-1, c\}$ .

Nadji a) skupovnu diferenciju (skup svih elemenata koji su u  $A$ , a nisu u  $C$ )

$$A \setminus C = \{0, 6\}$$

$$\text{b)} A \cup (B \cap C) = \{-1, 0, 6\} \cup \{c\} = \{-1, 0, 6, c\}$$

$$\text{c)} A \times C \setminus \{(-1, -1), (2, c), (0, c)\} =$$

$$= \{(-1, 0), (-1, 6), (-1, c), (0, -1), (0, 0), (0, 6), (6, -1), (6, 0), (6, 6), (6, c)\}$$

4. i) Od 32 karte (4 boje, 8 po skali) izvlačimo ruku od 4 karte. Koliko mogućnosti postoji za tu ruku ako je u njoj svaka karta boje herc osim točno jedne koja nije herc ?

Odgovor: u toj ruci će biti 3 od 8 herčeva po skali što je 8 povrh 3 načina, a četvrta karta se izabire od 24 karte koje nisu herc.

$$\text{Dakle, } \binom{8}{3} \cdot 24 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 24 = 56 \cdot 24 = 1120 + 224 = 1344$$

ii) Na koliko načina možemo poredati u slog (konačni niz) dvije bijele, dvije crne i jednu žutu kuglicu ako kuglice iste boje ne razlikujemo, tj. međusobni poredak je bitan za brojenje samo ako se boje razlikuju ?

Odgovor: 5 različitih kuglica možemo poredati na  $5! = 120$  načina. Kako se poredak od dvije bijele ne gleda to podijelimo u grupe s  $2!=2$  ekvivalentnih poredaka bijelih kuglica i ponovno rezultate na grupe po  $2!=2$  poredaka crnih kuglica. Dakle, rezultat je

$$\frac{5!}{2!2!} = \frac{120}{4} = 30$$

5. a) Pretvori brojku  $(2707)_{(8)}$  na bazi 8 u dekadski sustav.

$$2 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 2 \cdot 512 + 7 \cdot 64 + 7 = 1024 + 448 + 7 = (1479)_{(10)}.$$

b) Pretvori dekadsku brojku  $(1239)_{(10)}$  u brojku zapisanu u bazi 6.

$$1239 : 6 = 206 \text{ ostatak } 3$$

$$206 : 6 = 34 \text{ ostatak } 2$$

$$34 : 6 = 5 \text{ ostatak } 4$$

$$5 : 6 = 0 \text{ ostatak } 5$$

Rezutat:  $5423_{(6)}$

6. Za malu tepsiju bakinog kolača ide 25 grama grožđica, 100 grama šećera, 400 grama brašna, i 5 jaja. Ako imate samo 4 jaja i želite napraviti manji kolač jednakog sastava, koliko treba staviti grožđica, šećera i brašna ?

Odgovor: ovdje imamo produljeni razmjer  $25:100:400:5 = g:s:b:4$ , odnosno tri obična razmjera  $25:5=g:4$  itd.

Dakle,  $\frac{25 \cdot 4}{5} = 20$  grama grožđica,  $\frac{100 \cdot 4}{5} = 80$  grama šećera i  $\frac{400 \cdot 4}{5} = 320$  grama brašna na 4 jaja.

7. Nađi najveću zajedničku mjeru i najmanji zajednički višekratnik brojeva 660 i 120 Euklidovim algoritmom.

$$660:120 = 5 \text{ s ostatkom } 60$$

$120:60 = 2 \text{ s ostatkom } 0$ , dakle zadnji ostatak s kojim smo dijelili je broj s kojim su svi djeljivi i to je  $M(660,120)=60$

$$\text{Tako je } 660 = 11 \cdot 60 \text{ i } 120 = 2 \cdot 60$$

$$V(660, 120) = \frac{660 \cdot 120}{60} = 11 \cdot 2 \cdot 60 = 1320.$$

8. Izračunaj umnožak sljedećih kompleksnih brojeva (točka je decimalna točka, a  $i = \sqrt{-1}$ , a  $i^n$  je  $n$ -ta potencija broja  $i$ ). Rezultat mora biti u obliku  $a + bi$  gdje su  $a$  i  $b$  realni konačni decimalni brojevi napisani točno.

a)

$$\begin{aligned}
 (0.21 + 1.3i) \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{5}i\right) &= \frac{0.21}{8} - \frac{1.3 \cdot 3}{5} + \frac{0.21 \cdot 3}{5}i + \frac{1.3 \cdot 1}{8}i \\
 &= \frac{21}{800} - \frac{39}{50} + \frac{63}{500}i + \frac{13}{80}i \\
 &= \frac{21-39 \cdot 16}{800} + \frac{63 \cdot 8 + 13 \cdot 50}{4000}i \\
 &= \frac{-603}{800} + \frac{1154}{4000}i \\
 &= -6.03 : 8 + 1.154i : 4 \\
 &= -0.75375 + 0.2885i
 \end{aligned}$$

Ili

$$\begin{aligned}
 (0.21 + 1.3i) \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{5}i\right) &= (0.21 + 1.3i) \cdot (0.125 + 0.6i) \\
 &= (0.21 \cdot 0.125 - 1.3 \cdot 0.6) + (0.21 \cdot 0.6 + 1.3 \cdot 0.125)i \\
 &= (0.02625 - 0.78) + (0.126 + 0.1625)i \\
 &= -0.75375 + 0.2885i
 \end{aligned}$$

b)  $(1 + i + i^2 + i^3) \cdot (1 - i - i^2 - i^3)$  (savjet: prvo izračunajte svaku potenciju, onda ih zbrojite u svakoj zagradi i na kraju pomnožite dva dobivena kompleksna broja)

$$(1 + i - 1 - i) \cdot (1 - i - (-1) - (-i)) = 0 \cdot 2 = 0$$

c) Podijeli kompleksne brojeve (rezultat mora biti u obliku  $a + bi$  gdje su  $a$  i  $b$  realni brojevi).

$$\frac{2+i}{4-3i} = \frac{(2+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

Za varijantu zadatka s  $2 - i$  u brojniku rješenje je  $11/25 + 2/25 \cdot i$

9. Napiši broj  $z = 1.214545454545\dots$  kao razlomak kojem su brojnik i nazivnik cijeli brojevi.

$$z = 1.214545\dots = 1.21 + x, \text{ gdje je } x = 0.00454545\dots$$

$$x - 0.0045 = x/100, \text{ dakle } \frac{99}{100}x = 0.0045 = \frac{45}{10000}$$

$$x = \frac{45 \cdot 100}{99 \cdot 10000}$$

$$x = \frac{45}{9900}$$

$$\text{Dakle, } z = 1.21 + \frac{45}{9900} = \frac{121}{100} + \frac{45}{9900} = \frac{121 \cdot 99 + 45}{9900}$$

$$z = \frac{12100 - 121 + 45}{9900} = \frac{11979 + 45}{9900} = \frac{12024}{9900} \text{ ili skratimo s 4 pa } \frac{3006}{2475} \text{ ili dalje } \frac{334}{275}$$

Provjeraj:

$$12024 : 9900 = 1.214545\dots$$

$$021240$$

$$0014400$$

$$00045000 \leftarrow$$

$$000054000$$

000004500 ← ponavljanje ostatka, a spuštamo samo nule

$$3006:2475 = 1.21\dot{4}\dot{5}$$

$$05310$$

$$003600$$

$$0011250 \leftarrow$$

$$00013500$$

00001125 ← ponavljanje ostatka, a spuštamo samo nule

10. Ako tri čovjeka za 14 sati u radionici naprave 70 kvalitetnih cipela koliko cipela naprave dva čovjeka za 30 sati ?

$$70 : (3 \cdot 14) = x : (2 \cdot 30)$$

$$x = \frac{70 \cdot 2 \cdot 30}{3 \cdot 14} = 100$$

## mat1 29.1.2020. grupa T1B s skicom rješenja

Zabranjeni kalkulatori. Na svakoj stranici napiši svoje ime, a uz svaki zadatak broj zadatka i cjelokupni postupak.

1. Neka su  $A, B$  skupovi i  $P$  neki predikat koji uzima dva argumenta. Napiši matematičkim simbolima izraz: skup svih parova  $(x, y)$  iz  $C \times D$  takvih da je par u skupu onda i samo onda kad je  $P(x, y)$  istinito.

Odgovor:  $\{(x, y) \in C \times D \mid P(x, y)\}$

2. Nadji kompoziciju funkcija  $f \circ g$  ako je  $g : A \rightarrow B$ ,  $f : B \rightarrow A$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{b, c\}$ ,  $g : 1 \mapsto b, 2 \mapsto c, 3 \mapsto b$  i  $f : b \mapsto 3, c \mapsto 2$ .

$$f \circ g : A \rightarrow A : 1 \mapsto f(g(1)) = f(b) = 3, 2 \mapsto f(g(2)) = f(c) = 2, 3 \mapsto f(g(3)) = 3$$

3. Neka su  $A = \{2, 0, 6\}$ ,  $B = \{r, d, 6, 7\}$ ,  $C = \{2, d\}$ .

Nadji a) skupovnu diferenciju  $A \setminus C = \{0, 6\}$

b)  $A \cup (B \cap C) = \{2, 0, 6\} \cup \{d\} = \{2, 0, 6, d\}$

c)  $A \times C \setminus \{(-1, -1), (2, d), (0, d)\} = \{(2, 2), (0, 2), (6, 2), (6, d)\}$

4. i) Od 32 karte (4 boje, 8 po skali) izvlačimo ruku od 4 karte. Koliko mogućnosti postoji za tu ruku ako su dvije karte boje herc, a dvije karte boje pik ?

$$\binom{8}{2} \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \cdot 28 = 784$$

- ii) Na koliko načina možemo poredati u slog (konačni niz) dvije bijele, tri crne i jednu žutu kuglicu ako kuglice iste boje ne razlikujemo, tj. međusobni poredak je bitan za brojenje samo ako se boje razlikuju ?

$$\frac{6!}{2!3!1!} = \frac{720}{12} = 60$$

5. a) Pretvori brojku  $(4501)_{(6)}$  na bazi 6 u dekadski sustav.

$$4 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0 = 4 \cdot 216 + 5 \cdot 36 + 1 = 1045$$

- b) Pretvori dekadsku brojku  $1036_{(10)}$  u brojku zapisanu u bazi 7.

$$1036:7 = 148 + 0 \text{ ostatak}$$

$$148:7 = 21 + 1 \text{ ostatak}$$

$$21: 7 = 3 + 0 \text{ ostatak}$$

$$3:7 = 0 + 3 \text{ ostatak}$$

$$\text{rezultat } 3010_{(7)}. \text{ Provjera: } 3 \cdot 7^3 + 7^1 = 3 \cdot 343 + 7 = 1036.$$

6. Za malu tepsijsku bakinog kolača ide 25 grama grožđica, 100 grama šećera, 400 grama brašna, i 5 jaja. Ako imate samo 4 jaja i želite napraviti manji kolač jednakog sastava, koliko treba staviti grožđica, šećera i brašna ?

Odgovor: ovdje imamo produljeni razmjer  $25:100:400:5 = g:s:b:4$ , odnosno tri obična razmjera  $25:5=g:4$  itd.

Dakle,  $\frac{25 \cdot 4}{5} = 20$  grama grožđica,  $\frac{100 \cdot 4}{5} = 80$  grama šećera i  $\frac{400 \cdot 4}{5} = 320$  grama brašna na 4 jaja.

7. Nađi najveću zajedničku mjeru i najmanji zajednički višekratnik brojeva 1150 i 425 Euklidovim algoritmom.

$$1150 : 425 = 2 \text{ i } 200 \text{ ostatak}$$

$$425:200 = 2 \text{ i } 25 \text{ ostatak}$$

$200:25 = 8 \text{ i } 0$  ostatak, zadnji s kojim smo dijelili je 25 pa je sve višekratnik od 25

$$M(1150, 425) = 25$$

$$V(1150, 425) = \frac{1150 \cdot 425}{25} = 1150 \cdot 17 = 11500 + 8050 = 19550$$

8. Izračunaj umnožak sljedećih kompleksnih brojeva (točka je decimalna točka, a  $i = \sqrt{-1}$ , a  $i^n$  je  $n$ -ta potencija broja  $i$ ). Rezultat mora biti u obliku  $a + bi$  gdje su  $a$  i  $b$  realni konačni decimalni brojevi napisani točno.

a)

$$\begin{aligned} (1.01 + 2.3i) \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{2}i\right) &= (1.01 + 2.3i)(0.2 + 1.5i) \\ &= (1.01 \cdot 0.2 - 2.3 \cdot 1.5) + (1.01 \cdot 1.5 + 2.3 \cdot 0.2)i \\ &= (0.202 - 3.45) + (1.515 + 0.46)i \\ &= -3.248 + 1.975i \end{aligned}$$

b)  $(1 + 2i + i^2 + 5i^3 + i^4) \cdot (1 - 3i^3)$  (savjet: prvo izračunajte svaku potenciju, onda ih zbrojite u svakoj zagradi i na kraju pomnožite dva dobivena kompleksna broja)

$$(1 + 2i - 1 - 5i + 1)(1 + 3i) = (1 - 3i)(1 + 3i) = 10$$

c) Podijeli kompleksne brojeve (rezultat mora biti u obliku  $a + bi$  gdje su  $a$  i  $b$  realni brojevi).

$$\frac{3 - 2i}{2 + i} = \frac{(3 - 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{(6 - 2) + (-3i - 4i)}{4 + 2i - 2i + 1} = \frac{4}{5} + \frac{-7}{5}i$$

9. Napiši broj 23.012121212... kao razlomak kojem su brojnik i nazivnik cijeli brojevi. Rez.: 11391/495, za postupak pogledaj gruu A

10. Ako pet ljudi za 14 sati u radionici naprave 105 kvalitetnih cipela koliko cipela naprave dva čovjeka za 25 sati ?  $105 : (5 \cdot 14) = x : (2 \cdot 25)$ ,  $x = \frac{105 \cdot 2 \cdot 25}{5 \cdot 14} = 75$  cipela