

Prof. dr. Boris Pavković
Prof. dr. Darko Veljan

ELEMENTARNA MATEMATIKA II

TRIGONOMETRIJA
STEREOMETRIJA – GEOMETRIJA PROSTORA
ANALITIČKA GEOMETRIJA
ELEMENTARNA TEORIJA BROJEVA



ŠKOLSKA KNJIGA, ZAGREB, 1995.

Urednik
ZLATKO ŠPORAER

Recenzenti
Prof. dr. VLADIMIR VOLENEC
Prof. dr. NEVEN ELEZOVIĆ

Lektorica
ILIJANA MILENKOVIĆ

Izrada crteža
T&S

Omot opremio
ALFRED PAL

Korektor
ANTE TERZIĆ

Grafički urednik
ŽELJKO PRODANOVIĆ

Slog i prijelom
T&S, Zagreb

Nacionalna i sveučilišna biblioteka, Zagreb
CIP – Katalogizacija u publikaciji

UDK 51 (075.8)
371[3:51] (075.8)

PAVKOVIĆ, Boris

Elementarna matematika II: trigonometrija, stereometrija-geometrija prostora, analitička geometrija, elementarna teorija brojeva / Boris Pavković, Darko Veljan. – Zagreb : Školska knjiga, 1995. – X, 609 str. : ilustr. ; 24 cm

Bibliografija: str. 599-602. – Kazalo.

ISBN 953-0-30810-8

1. Veljan, Darko

950323023

ISBN 953-0-30810-8

Tisak: ZRINSKI d.d., Čakovec

Predgovor

Ova je knjiga drugi dio dvodijelnog udžbenika i zajedno s prvim dijelom potpuno obuhvaća sadržaj kolegija Elementarna matematika I i II, koji se predaje na prvoj godini studija matematike, kao i dio kolegija Metodika nastave matematike I i II, koji se predaje na trećoj i četvrtoj godini studija nastavničkih smjerova na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Kao i u prvom dijelu, pojedini sadržaji u ovoj knjizi pogodni su za rad s naprednijim učenicima srednjih škola, a knjiga može poslužiti i kao izvor tema za maturalne radove. Preporučujemo je kao štivo i svima koji žele osvježiti ili produbiti svoje znanje iz srednjoškolske matematike.

Sadržaj ovoga drugog dijela sastoji se od četiri cjeline, i to IV. poglavlja - trigonometrija, V. poglavlja - stereometrija, VI. poglavlja - analitička geometrija ravnine i prostora, te VII. poglavlja - elementarna teorija brojeva. Svakako valja naglasiti da se izlaganja u ovoj knjizi bitno oslanjaju na sadržaje iz prvog dijela. Isto tako, već smo se u prvom dijelu katkad oslanjali na neke pojmove i činjenice iz ovog dijela. Stoga možemo reći da ove dvije knjige čine prirodnu i organsku cjelinu.

U poglavlju trigonometrija, osim sustavno iznesenog standardnoga gradiva, iznesene su i osnovne zasade sferne trigonometrije i ukazano je na njene primjene. Osim toga, detaljno su obrađene i ciklotometrijske, hiperbolne i area-funkcije. Na kraju tog poglavlja, razmatra se i jedna od mogućih aksiomatskih izgradnji trigonometrije. U petom poglavlju izloženi su osnovni pojmovi geometrije prostora (stereometrije) - te "rak rane" srednjoškolske matematike. Izlaganje se zasniva na jednom od mogućih sustava aksioma. Osobita je pozornost posvećena korektnoj definiciji poliedra i pojmu volumena. Također se detaljno razmatra za teoriju volumena važan tzv. treći Hilbertov problem. To poglavlje završava paragrafom o izoperimetrijskim problemima u ravnini i prostoru. Šesto je poglavlje posvećeno analitičkoj geometriji u ravnini i prostoru. Osim standardnog gradiva, izlaže se i opća teorija krivulja drugog reda, i to na suvremeni način, uz korišćenje linearne algebre. U tu su svrhu obrađeni oni pojmovi linearne algebre koji se tu koriste. U zadnjem dijelu tog poglavlja izvedene su osnovne formule analitičke geometrije prostora i dan je pregled ploha drugog reda. U sedmom poglavlju o elementarnoj teoriji brojeva, poslije osnovnih svojstava djeljivosti i činjenica o prostim brojevima, dokazan je tzv. osnovni teorem aritmetike. Nadalje, razmatrana je problematika gustoće prostih brojeva u skupu prirodnih brojeva. Posebna je pozornost posvećena kongruencijama i tzv. diofantskim jednadžbama, koje su važne za primjenu. Ovo poglavlje završava nekim posebnim problemima teorije brojeva.

Napomenimo da s ove dvije knjige nije potpuno obuhvaćena elementarna matematika, npr. nije obrađena elementarna kombinatorika i elementarna teorija vjerojatnosti, diskretna i kombinatorna geometrija, kao ni raznovrsne numeričke, a niti mnoge elementarne ad hoc metode, jer bi to dovelo do znatnijeg proširenja opsega ovog već ionako opsežnog djela. No, neka od tih područja su pokrivena drugim djelima na našem jeziku.

Kao u prvom dijelu, ni ovdje nismo naveli zadatke za samostalno rješavanje, ali je zato osnovni tekst obogaćen brojnim riješenim primjerima. Na kraju smo (kao i u prvom dijelu) dodali nekoliko zadataka iz Elementarne matematike II s rješenjima koji su na pismenim ispitima zadavani studentima tijekom nekoliko zadnjih godina.

Dakako da sav materijal sadržan u ove dvije knjige nije moguće ispredavati u okviru kolegija Elementarna matematika I, II uz tjednu satnicu 2+2, 2+2. Na Matematičkom odjelu PMF-a Sveučilišta u Zagrebu, predaju se sljedeći sadržaji (s brojem sati predavanja u zagradi):

Elementarna matematika I. Prvi dio: pogl. I §1 - §5 (3 sata); pogl. II §2, 2.1 - 2.6 (4 sata); §3, 3.1 - 3.6 (3 sata), §4 - §6 (3 sata); pogl. III §1, 1.1 - 1.6 (3 sata), §2 (3 sata), §3 (2 sata), §4 - §5 (2 sata), §6, 6.1 - 6.5 (4 sata), §7, 7.1 - 7.3 (3 sata). Elementarna matematika II. Drugi dio: pogl. IV §1 - §3 (2 sata), §4 - §6 (2 sata), §8 - §9 (1 sat), §11 - §12 (2 sata); pogl. V §1 - §4 (3 sata), §5, 5.1 - 5.6 (3 sata), §6 6.1 - 6.4, §7 7.1, 7.2 (2 sata); pogl. VI §1 - §3 (2 sata), §4, §5, 5.1 - 5.3, 5.7 (2 sata) §6, 6.1 - 6.4, §7, 7.1 - 7.3, 7.8 (2 sata), §9, 9.1 - 9.3, 9.6 - 9.8 (2 sata); pogl. VII §1 - §2 (3 sata), §3 (2 sata), §4 - §5 (2 sata).

Rukopis knjige pomno su pročitali i dali mnoge korisne primjedbe i pojedina poboljšanja recenzenti prof. dr. Vladimir Volenec i prof. dr. Neven Elezović, na čemu im se najsrdačnije zahvaljujemo. Također zahvaljujemo asistentu mr. Andreju Dujelli na pomoći oko zadataka s pismenih ispita.

Za vrlo lijep slog na računalu i grafičku opremu cijele knjige, zahvalnost dugujemo poduzeću T&S.

Školska knjiga, a posebno njezin urednik mr. Zlatko Šporer, zaslužni su za lijepu opremu knjige i njezinu skoriju pojavu pred čitateljima.

Svakome tko upozori na "preživjele" pogreške unaprijed se zahvaljujemo.

Zagreb, ožujak, 1994.

Boris Pavković,
Darko Veljan

Sadržaj

IV. TRIGONOMETRIJA	1
§ 1. Geometrijska teorija trigonometrijskih funkcija	2
1.1. Brojeva ili trigonometrijska kružnica. Eksponencijalno preslikavanje pravca na kružnicu	2
1.2. Definicija trigonometrijskih funkcija	3
1.3. Još neke interpretacije trigonometrijskih funkcija	8
§ 2. Parnost, neparnost, periodičnost i osnovne veze među trigonometrijskim funkcijama	12
2.1. Parnost i neparnost	12
2.2. Domene i kodomene trigonometrijskih funkcija. Predznaci	13
2.3. Periodičnost trigonometrijskih funkcija	15
2.4. Osnovne veze među trigonometrijskim funkcijama	21
§ 3. Intervali monotonosti, neprekidnost i grafovi trigonometrijskih funkcija	25
3.1. Intervali monotonosti i neprekidnost trigonometrijskih funkcija	25
3.2. Grafovi trigonometrijskih funkcija	29
§ 4. Adicione formule i posljedice	33
§ 5. Kompleksni brojevi i trigonometrijske sume i produkti	46
§ 6. Arkus funkcije	52
6.1. Definicija arkus funkcija. Osnovne relacije	52
6.2. Adicioni teoremi za arkus funkcije	60
6.3. Čebiševljevi polinomi	65
§ 7. Trigonometrijske jednačbe i nejednačbe. Sustavi trigonometrijskih jednačbi	68
7.1. Trigonometrijske jednačbe	68
7.2. Sustavi trigonometrijskih jednačbi	79
7.3. Neke transcendentne jednačbe	81
7.4. Ciklotometrijske jednačbe	82
7.5. Trigonometrijske nejednačbe	85
§ 8. Skalarni produkt vektora	90
8.1. Geometrijska definicija skalarnog produkta	90
8.2. Skalarni produkt na vektorskim prostorima	93
8.3. Neke primjene skalarnog produkta u geometriji	98
§ 9. Sinusov i kosinusov poučak. Primjene u planimetriji	103
9.1. Sinusov i kosinusov poučak	103
9.2. Primjene u planimetriji	107
9.3. Trigonometrijske jednakosti i nejednakosti za kutove trokuta	118
§ 10. Neke primjene trigonometrije u geodeziji, fizici, mehanici i astronomiji	121
§ 11. Sferna trigonometrija	132
11.1. Osnovni pojmovi	132
11.2. Sferni trokut	133
11.3. Osnovne veze među elementima sfernog trokuta	135
11.4. Pravokutni sferni trokut	138
11.5. Neki načini rješavanja sfernih trokuta i primjene	141
§ 12. Analitička teorija trigonometrijskih funkcija	146
12.1. Aksiomatsko zasnivanje trigonometrijskih funkcija	146

12.2. Egzistencija trigonometrijskih funkcija	155
12.3. Još neke aksiomatike trigonometrijskih funkcija	159
12.4. Transcendentnost trigonometrijskih funkcija	161
12.5. Izračunavanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija	162
12.6. Hiperbolne i ostale elementarne funkcije	163
V. STEREOMETRIJA – GEOMETRIJA PROSTORA	169
§ 1. Aksiomi stereometrije. Paralelnost i okomitost pravca i ravnine	169
1.1. Aksiomi euklidske geometrije prostora	169
1.2. Prve posljedice aksioma stereometrije	170
1.3. Paralelnost pravaca i ravnina	174
1.4. Okomitost pravaca i ravnina	178
1.5. Paralelna projekcija prostora na ravninu	183
1.6. Poučak o tri normale	188
1.7. Okomitost dviju ravnina	190
§ 2. Kutovi pravaca i ravnina	192
2.1. Kut dvaju pravaca	192
2.2. Kut pravca i ravnine. Kut dviju ravnina	195
§ 3. Udaljenosti točaka, pravaca i ravnina. Izometrije	199
3.1. Udaljenost točke od ravnine	199
3.2. Udaljenost točke od pravca	201
3.3. Najkraća udaljenost mimoilaznih pravaca	201
3.4. Simetralne ravnine dužine i para ravnina	204
3.5. Diedri i triedri	205
3.6. "Izlet u prostor"	208
§ 4. Izometrije i neka preslikavanja prostora	211
4.1. Grupa izometrija prostora	211
4.2. Translacija prostora	214
4.3. Centralna simetrija prostora	214
4.4. Simetrije prostora obzirom na ravninu	216
4.5. Simetrije prostora obzirom na pravac	218
4.6. Rotacije prostora oko pravca	219
4.7. Osnovni teorem o izometrijama	219
4.8. Homotetije prostora	220
4.9. Preslikavanja sličnosti prostora	222
4.10. Inverzija i stereografska projekcija	222
§ 5. Poliedri	226
5.1. Pojam poliedra	226
5.2. Neke vrste poliedara. Piramide, bipiramide i prizme	229
5.3. Eulerova formula za poliedre	236
5.4. Pravi poliedri	240
5.5. Volumen poliedra	246
5.6. Vektori u prostoru i poliedri. Vektorski produkt	264
5.7. Jednakosastavljenost u prostoru – treći Hilbertov problem	277
§ 6. Izmjerivi skupovi točaka u prostoru i njihov volumen	287
6.1. Izmjerivost i volumen	287
6.2. Volumen rotacionog tijela	294
6.3. Volumeni i Cavalierijev princip	299
§ 7. Oplošje plohe	304
7.1. Pojam plohe	304
7.2. Oplošje plohe	305
§ 8. Izoperimetrijski problemi u ravnini i prostoru	316

VI. ANALITIČKA GEOMETRIJA	323
§ 1. Koordinate vektora u ravnini	323
1.1. Koordinate vektora. Zbrajanje i množenje vektora sa skalarom. Modul vektora. Udaljenost dviju točaka	323
1.2. Dijeljenje dužine u zadanom omjeru. Polovište dužine. Težište trokuta	326
1.3. Kut dvaju vektora. Projekcija vektora na drugi vektor. Skalarni produkt u koordinatama	329
§ 2. Orijentacija ravnine. Površina orijentiranog trokuta	334
2.1. Orijentacija ravnine	334
2.2. Površina orijentiranog trokuta	337
§ 3. Jednadžba pravca u ravnini	340
3.1. Jednadžba pravca određenog točkom i vektorom smjera	340
3.2. Parametarske jednadžbe pravca. Kanonski oblik	341
3.3. Jednadžba pravca kroz dvije točke. Eksplicitni, implicitni i segmentni oblik jednadžbe pravca	342
3.4. Udaljenost točke od pravca. Normalan oblik jednadžbe pravca	345
3.5. Kut dvaju pravaca u ravnini. Uvjet okomitosti i paralelnosti	348
3.6. Sjecište dvaju pravaca	350
3.7. Pramen pravaca u ravnini	352
3.8. Simetrala kuta dvaju pravaca	356
§ 4. Kružnica	358
4.1. Jednadžba kružnice	358
4.2. Jednadžba kružnice kroz tri točke	360
4.3. Pravac i kružnica, tangenta, pol i polara	361
4.4. Potencija točke s obzirom na kružnicu. Potencijala dviju kružnica. Radikalno središte triju kružnica	366
4.5. Pramen kružnica	369
§ 5. Elipsa	372
5.1. Jednadžba elipse	372
5.2. Elipsa kao kontrakcija kružnice	379
5.3. Tangenta elipse. Zrcalna svojstva elipse. Pol i polara	382
5.4. Direktrise elipse	389
5.5. Elipsa kojoj su fokusi na osi ordinata	390
5.6. Jednadžba translirane elipse	391
5.7. Parametarske jednadžbe kružnice i elipse	393
§ 6. Hiperbola	396
6.1. Jednadžba hiperbole	396
6.2. Tangenta i zrcalna svojstva hiperbole	400
6.3. Asimptote hiperbole	404
6.4. Tangente povučene iz točke izvan hiperbole na hiperbolu. Pol i polara hiperbole	406
6.5. Direktrise hiperbole	410
6.6. Hiperbola kojoj su fokusi na osi ordinata	411
6.7. Jednadžba translirane hiperbole	412
6.8. Alternativna definicija hiperbole	413
6.9. Hiperbola kojoj su asimptote paralelne s koordinatnim osima	414
6.10. Dijametri elipse i hiperbole	417
§ 7. Parabola	421
7.1. Jednadžba parabole	421
7.2. Uvjet dodira pravca i parabole. Jednadžba tangente i zrcalno svojstvo parabole	424
7.3. Tangente povučene iz točke izvan parabole na parabolu. Pol i polara parabole	429
7.4. Dijametri parabole	433
7.5. Parabola kojoj je os paralelna s jednom od koordinatnih osi	434
7.6. Vršne (tjemene) jednadžbe krivulja 2. reda	437

7.7. Jednadžba krivulje 2. reda određena fokusom i direktrisom. Zajednička polarna jednadžba krivulja 2. reda	439
7.8. Krivulje 2. reda kao presjeci stošca ravninom	442
§ 8. Opća teorija krivulja 2. reda	444
8.1. Transformacija koordinata. Algebarske i transcendentne krivulje	444
8.2. Linearni operatori i transformacije	454
8.3. Svojtveni vektori i svojstvene vrijednosti linearnog operatora	458
8.4. Dijagonalizacija. Simetrični operatori	461
8.5. Krivulje 2. reda	462
8.6. Invarijante krivulje 2. reda	466
8.7. Skiciranje krivulja 2. reda	470
§ 9. Analitička geometrija prostora	476
9.1. Kartezijev koordinatni sustav u prostoru	476
9.2. Koordinate vektora	477
9.3. Osnovne metričke relacije analitičke geometrije prostora	481
9.4. Orijentacija prostora. Volumen tetraedra	483
9.5. Transformacija koordinata. Eulerovi kutovi	485
9.6. Jednadžba ravnine u prostoru	490
9.7. Jednadžba pravca u prostoru	497
9.8. Međusobni položaji točaka, pravaca i ravnina	502
9.9. Plohe 2. reda	504
VII. ELEMENTARNA TEORIJA BROJEVA	515
§ 1. Uvod. Djeljivost. Prosti brojevi	515
Neke aritmetičke funkcije	525
Möbiusova i Eulerova funkcija	526
§ 2. Prosti brojevi i funkcija $\pi(x)$	530
§ 3. Kongruencije	539
3.1. Kongruencija $ax \equiv b \pmod{n}$	541
3.2. Kongruencije višeg stupnja	548
§ 4. Diofantske jednadžbe	553
§ 5. Još neke teme i primjeri iz elementarne teorije brojeva	565
5.1. Euklidov algoritam i neprekidni razlomci	565
5.2. Prikaz broja kao sume kvadrata	568
Izbor iz pismenih ispita iz elementarne matematike II	573
Literatura	599
Literatura na hrvatskom jeziku	602
Kazalo	603

IV. TRIGONOMETRIJA

Uvod i malo historijata

Trigonometrija je nastala iz potreba za računanjem elemenata raznih geometrijskih figura na temelju danih podataka o geometrijskoj figuri.

Svoje početke trigonometrija (posebno sferna) vuče od starih Babilonaca i Egipćana. Nastali su pri rješavanju raznih problema iz zemljomjerstva ("geometrije") promatranju neba i mjerenjima zbog navigacije. Zbog stalnih naplava rijeke Nil, koje su odnosile kolčiće razgraničenja poljoprivrednih čestica uz rijeku, napravljeni su od užeta s čvorićima pravokutni trokuti veličine $3 \times 4 \times 5$ za nova premjeravanja. Znajući odavno za Pitagorin poučak (koji je, dakle, niknuo na raznim mjestima u razna vremena) oni su ta znanja koristili za gradnju piramida, mjerenja polja itd., te tako udarili temelje trigonometriji. Sam naziv dolazi od grč. *trigónom* - trokut i *métron* - mjera.

Baštinici i naredni izgrađivači trigonometrije jesu Grci, a ističu se "otac astronomije" Aristarh (3. st. pr. Kr), Hiparh (2. st.), s prvim tablicama duljina tetiva za razne središnje kutove, zatim Menelaj (1. st.), s prvom knjigom "Sferika", Ptolomej (2. st.), koji izučava pravokutni (i opći) sferni trokut.

U srednjem vijeku trigonometriju naročito izučavaju Indi i Arapi. Indi uvode polovinu korde (tetine), dakle sinus, imaju tablice, poznaju formulu $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, znaju za sinus i kosinus tupih kutova, a Brahmagupta (7. st.) pozna već sinusov poučak u obliku $a = 2R \sin \alpha$.

Arapi preuzimlju od Grka heksagezimalni sustav, a od Inda sinus i kosinus i uvode ostale trigonometrijske funkcije. Preko Arapa došla je trigonometrija u Europu. Prvo sustavno djelo o trigonometriji u Europi "De triangulis omnimodis", napisao je J. Müller u 15. st., a važne doprinose dao je F. Viète (16. st.), prijatelj dubrovačkog matematičara Marina Getaldića. On je povezao trigonometriju s algebrom, i time obostrano obogatio obje te grane matematike. I veliki hrvatski matematičar Dubrovčanin Ruđer Bošković (1711-1787) dao je važne priloge (sfernoj) trigonometriji.

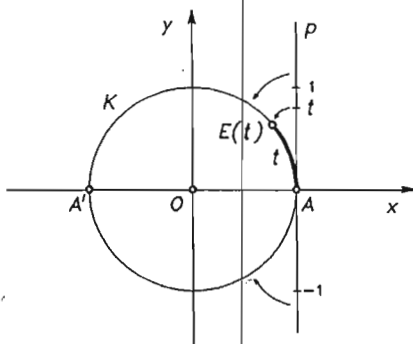
Dalji razvoj znanosti pokazao je da se trigonometrijske funkcije pojavljuju prirodno ne samo kao aparat važan za rješavanje računskih geometrijskih problema, nego da one igraju važnu ulogu u mehanici i uopće fizici za opis periodičkih procesa. Na taj je način nastala potreba za formalnom izgradnjom teorije trigonometrijskih funkcija, bez obzira na njeno geometrijsko značenje. Osnovni doprinos izgradnji te "analitičke" teorije trigonometrijskih funkcija dao je (a tko bi drugi?) Leonhard Euler (1707-1783). Kasnije su još značajni Carnot, Gauss, Lagrange, Möbius i poglavito Fourier s trigonometrijskim redovima u 19. st.

Mi ćemo u ovome prikazu najprije definirati trigonometrijske funkcije na geometrijski i intuitivno vrlo prihvatljiv način, pokazati njihova razna svojstva i neke primjene, da bismo na kraju zaokružili cijelu teoriju dokazavši jedinstvenost tih funkcija te pokazavši da se one podudaraju s funkcijama koje se definiraju redovima potencija.

§ 1. Geometrijska teorija trigonometrijskih funkcija

1.1. Brojeva ili trigonometrijska kružnica. Eksponencijalno preslikavanje pravca na kružnicu

Eksponencijalno preslikavanje koje ćemo sada uvesti osnova je za (heurističko) razumijevanje trigonometrijskih funkcija. To je preslikavanje s pravca (ili skupa realnih brojeva) na jediničnu kružnicu koja je shvaćena kao podskup koordinatne ravnine. Osnovna ideja dolazi odatle da želimo mjeriti duljinu luka na kružnici. Na primjer, ako kružnicu na sl. 1. shvatimo kao kotač koji se može vrtjeti oko svoje osi



Sl. 1.

u smjeru kazaljke na satu ili suprotno gibanju kazaljke na satu, onda se kotač može mnogo puta okrenuti oko svoje osi i pri tome točka na obodu kotača prilikom vrtnje kotača prijeđe mnogo veći put od opsega kotača. Da bismo izmjerili duljinu puta koji točka na obodu kotača prevali prilikom vrtnje kotača, uzimamo koordinatni sustav na pravcu p i prislonimo pravac na kružnicu, tako da mu ishodište padne u točku $A = (1, 0)$ kružnice K . Kružnica K je jedinična kružnica u koordinatnoj ravnini (česta je oznaka i S^1). Sada taj pravac namatamo na kružnicu (tj. prislanjamo ga na kružnicu bez klizanja i rastezanja, kao da je, npr., sačinjen od konca) kao

na sl.1. Pri tome polupravac na kojemu su smješteni pozitivni brojevi namatamo na kružnicu suprotno gibanju kazaljke na satu, a polupravac na kojemu su smješteni negativni brojevi namatamo na kružnicu u skladu s gibanjem kazaljke na satu. Svakom realnom broju t pripada potpuno određena točka na brojevnom pravcu p , a ova navedenim namatanjem prelazi u posve određenu točku $E(t)$ kružnice K . Nakon identifikacije pravca p sa skupom \mathbf{R} , vidimo da je na taj način definirano preslikavanje $E : \mathbf{R} \rightarrow K$, $t \mapsto E(t)$, koje se zove eksponencijalno preslikavanje (ili namatanje) pravca na kružnicu.

Jedinična kružnica na koju su na navedeni način smješteni realni brojevi zove se brojevná ili trigonometrijska kružnica. Za razliku od obične kružnice, na ovoj su kružnici smješteni brojevi tako da mjere od točke A duljine lukova njenim polumjerom, i to na način da pozitivnim brojevima pridružuje duljinu luka, a negativnim brojevima duljinu luka, ali s negativnim predznakom. Duljina (ili opseg) jedinične kružnice je 2π . Preslikavanje E pridružuje broju 0 točku A , broju π točku A' , broju 2π ponovno točku A , broju 3π ponovno točku A' , broju 4π točku A itd. Isto tako, broju $-\pi$ funkcija E pridružuje točku A' , broju -2π točku A itd. Općenito, vidimo da vrijedi

$$E(t) = E(t + 2k\pi),$$

za svako $k \in \mathbf{Z}$. Funkcija $E : \mathbf{R} \rightarrow K$ je očito surjekcija i original svake točke s kružnice je skup ekvidistantnih točaka na pravcu s razmakom među susjednim točkama jednakim 2π , što vidimo "odmotavanjem" ili kotrljanjem kružnice duž pravca. Tako je, npr., $E^{-1}(A) = \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Općenito, ako je $T \in K$ i $E(t) = T$, za neko $t \in \mathbf{R}$, onda je

$$E^{-1}(T) = \{t + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\},$$

tj. sve točke $t + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ padaju pri namotavanju u istu točku T i samo one padaju u T . Ovo važno svojstvo zove se svojstvo vlakna eksponencijalnog preslikavanja E . Restrikcija $E|_{[0, 2\pi)}$ funkcije E na poluotvoreni interval $[0, 2\pi)$ očito je bijekcija sa $[0, 2\pi)$ na K . Njena inverzna funkcija $K \rightarrow [0, 2\pi)$ služi kao mjera duljine luka, odnosno kuta. Drugim riječima, točki na kružnici pridružen je broj t koji predočuje duljinu luka na K od A do te točke u pozitivnom smislu (tj. u smislu gibanja kazaljke na satu), a duljina luka $\widehat{AE}(t)$ jednaka je t .

1.2. Definicija trigonometrijskih funkcija

Sada možemo dati geometrijsku (više heurističku) definiciju trigonometrijskih funkcija. Neka je K brojevná kružnica smještena u Kartezijevoj koordinatnoj ravnini tako da joj je središte u ishodištu, a polumjer jednak jediničnoj dužini. Za pravac koji namatamo uzimamo da je paralelan s osi y i da prolazi točkom $A = (1, 0)$ (sl. 2). Svakom realnom broju t pridružena je točka $E(t)$ brojevne kružnice K . Tako je, npr., broju 0 pridružena točka $E(0) = (1, 0)$, pa dalje $E(\pi) = (-1, 0)$,

$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$, $E\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$, $E(2\pi) = E(4\pi) = E(6\pi) = \dots = E(-2\pi) = E(-4\pi) = \dots = (1, 0)$. Namatanje $E : \mathbf{R} \rightarrow K$ je funkcija koja broju $t \in \mathbf{R}$ pridružuje točku $E(t) \in K$. Apscisa točke $E(t)$ zove se **kosinus broja t** i označava sa $\cos t$. Ordinata točke $E(t)$ zove se **sinus broja t** i označava sa $\sin t$. Na taj su način definirane funkcije $\cos : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ i $\sin : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, koje se zovu redom funkcije **kosinus** i **sinus**. Pomoću funkcija sinus i kosinus definiraju se funkcije $t \mapsto \operatorname{tg} t$, $t \mapsto \operatorname{ctg} t$ ovako:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \text{tangens,}$$

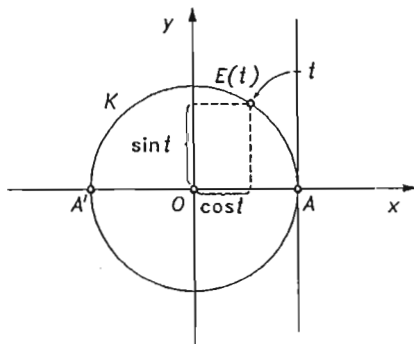
$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \text{kotangens.}$$

Pri tome se podrazumijeva da je tangens definiran za one realne brojeve za koje je $\cos t \neq 0$, a kotangens za $t \in \mathbf{R}$ za koje je $\sin t \neq 0$, tj. domena funkcije tangens je $\mathcal{D}(\operatorname{tg}) = \{t \in \mathbf{R} \mid \cos t \neq 0\}$ i slično $\mathcal{D}(\operatorname{ctg}) = \{t \in \mathbf{R} \mid \sin t \neq 0\}$.

Funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens zovu se **trigonometrijske funkcije**. Katkad se još koriste i izvedene funkcije definirane sa:

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}, \quad \text{sekans,}$$

$$\operatorname{cosec} t = \frac{1}{\sin t}, \quad \text{kosekans.}$$



Sl. 2.

Sa slike 2. vidimo da je zbog $E(0) = (1, 0)$, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, a zbog $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$ slijedi $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Dalje, zbog $E(\pi) = (-1, 0)$ slijedi $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, pa dalje iz $E\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$ slijedi $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, i zbog $E(2\pi) = (1, 0)$, $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$.

Mi ćemo mnogo kasnije dokazati, shvatimo li brojevnju kružnicu K kao jediničnu kružnicu u kompleksnoj ravlini, da je zapravo $E: \mathbb{R} \rightarrow K$ dana formulom $E(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$.

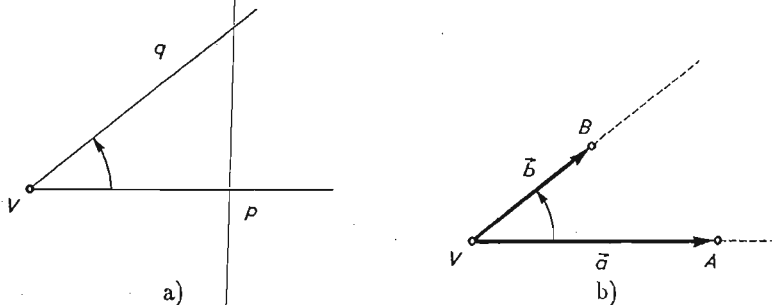
Kosinus i sinus su složene funkcije koje možemo ovako zamišljati

$$\mathbb{R} \xrightarrow{E} K \xrightarrow{pr_x} \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \xrightarrow{E} K \xrightarrow{pr_y} \mathbb{R},$$

gdje su pr_x , odnosno pr_y projekcije na os x (apscisa), odnosno os y (ordinata).

Trigonometrijske funkcije su, dakle, realne funkcije realne varijable (tj. iz \mathbb{R} u \mathbb{R}), ali su uz njih često vezane trigonometrijske funkcije kuta, tj. funkcije definirane na skupu kutova s vrijednostima opet u \mathbb{R} . Kao što znamo, trigonometrijske su funkcije upravo i otkrivene u svezi s praktičnim problemima vezanim za ravninske (mjerjenje zemljišta) i sferne (astronomija) trokute. Da definiramo trigonometrijske funkcije kuta, prisjetimo se ukratko definicije kuta (usp. prvi dio, pogl. III, §1.4) i pogledajmo kako nam upravo eksponencijalno preslikavanje omogućuje jedan način mjerenja kutova.

U pozitivno orijentiranoj ravlini M (pogl. VI), promatramo skup svih uređenih parova (Vp, Vq) polupravaca p i q i sa zajedničkim vrhom V u ravlini M . Na tom skupu definiramo relaciju ekvivalencije \sim , tako da kažemo da je $(Vp, Vq) \sim (V'p', V'q')$ ako i samo ako postoji direktna izometrija $f: M \rightarrow M$ (tj. kompozicija $t \circ r$, gdje je t translacija a r rotacija) za koju je $f(Vp) = V'p'$, $f(Vq) = V'q'$ (i posebno $f(V) = V'$). Klasa ekvivalencije koja sadrži par (Vp, Vq) označava se sa $\sphericalangle pVq$ i zove kut između polupravca Vp i Vq . Ustvari, zbog orijentiranosti ravnine M , ovdje se radi o orijentiranom kutu, što je na sl. 3a označeno strelicom koja sugerira da je p prvi, a q drugi krak nacrtanog kuta, odnosno da se polupravac (ili zraka) q u orijentiranoj ravlini M dobiva rotacijom u pozitivnom smislu (tj. u smjeru suprotnom od gibanja kazaljke na satu) iz polupravca p .

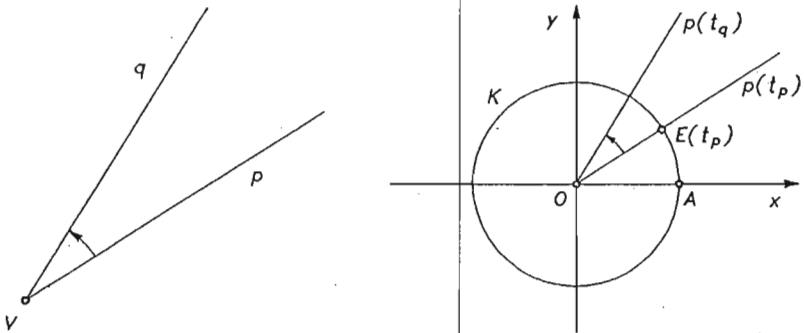


Sl. 3.

Slično se definira i kut među vektorima. Neka su \vec{a} i \vec{b} ne-nul vektori ravnine M , a V, A, B točke iz M , tako da je $\vec{a} = \overrightarrow{VA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{VB}$. Tada je (orijentirani) kut od vektora \vec{a} do vektora \vec{b} (ili između \vec{a} i \vec{b}) kut $\sphericalangle AVB$ (sl. 3b) između polupravaca određenih tim vektorima, tj. točkama V, A i V, B . Katkad se taj

kut označava sa $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. To je, dakle, kut za koji treba zarotirati vektor \vec{a} oko V u smjeru suprotnom gibanju kazaljke na satu, pa da tako dobiveni vektor bude jednako usmjeren kao i vektor \vec{b} .

Neka je sada $\sphericalangle pVq$ neki (orijentirani) kut u (pozitivno orijentiranoj) ravnini M i neka je u M zadan (pozitivni ili desni) koordinatni sustav s ishodištem u O . Ako je $t \in \mathbb{R}$ realni broj, označimo s $P(t)$ polupravac s vrhom O koji prolazi točkom $E(t)$ (sl. 4).



Sl. 4.

Neka su t_p i t_q realni brojevi takvi da se kut $\sphericalangle P(t_p)OP(t_q)$ dobiva translacijom zadanog kuta $\sphericalangle pVq$, i to tako da se V translatira u O , polupravac Vp u $OP(t_p)$, a polupravac Vq u $OP(t_q)$. Tada broj $t_q - t_p$ zovemo mjera kuta $\sphericalangle pVq$, broj $\cos(t_q - t_p)$ zovemo kosinus kuta $\sphericalangle pVq$ i označavamo sa $\cos(\sphericalangle pVq)$, broj $\sin(t_q - t_p)$ zovemo sinus kuta $\sphericalangle pVq$ i označavamo sa $\sin(\sphericalangle pVq)$. Nadalje stavljamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\sphericalangle pVq) &= \frac{\sin(\sphericalangle pVq)}{\cos(\sphericalangle pVq)}, & \text{ako } p \text{ nije okomit na } q, \\ \operatorname{ctg}(\sphericalangle pVq) &= \frac{\cos(\sphericalangle pVq)}{\sin(\sphericalangle pVq)}, & \text{ako } p \text{ i } q \text{ ne leže na istom pravcu.} \end{aligned}$$

Na taj su način definirane realne funkcije sinus i kosinus $\sin, \cos : \mathcal{K}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ na skupu $\mathcal{K}(M)$ svih (orijentiranih) kutova ravnine M , kao i funkcije tangens i kotangens koje su definirane na podskupovima od $\mathcal{K}(M)$.

Kažemo da kut $\sphericalangle pVq$ ima $t = t_q - t_p$ radijana. Jasnije je stoga da je realan broj t mjera kuta $\sphericalangle AOE(t)$, tj. da taj kut ima t radijana. Osim radijanima kutove mjerimo i stupnjevima, pa ako kut ima t radijana (pišemo t rad), onda on ima $s = \frac{360}{2\pi}t$ stupnjeva (pišemo s°), a ako kut ima s stupnjeva, onda on ima $t = \frac{2\pi}{360} \cdot s$ radijana. Posebno je 1 radijan $= \frac{360}{2\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$ ($1^\circ = 60'$, $1' = 60''$, tj. jedan stupanj ima 60 minuta, a jedna minuta ima 60 sekundi), a $1^\circ = \frac{2\pi}{360}$ radijana $\approx 0,017$ rad.

Luk koji na kružnici radijusa r cm pripada kutu od $t \in (0, 2\pi]$ radijana ima duljinu $r \cdot t$ cm, a luk koji na toj kružnici pripada kutu od $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ]$ stupnjeva ima duljinu $\left(r \cdot \frac{2\pi}{360}\alpha\right)$ cm.

Iz gornje definicije trigonometrijskih funkcija kuta nije *a priori* jasno da su to dobre definicije. Neka su, naime, t_p, t_q, u_p, u_q realni brojevi sa svojstvom da se $\angle P(t_p)OP(t_q)$ i $\angle P(u_p)OP(u_q)$ dobivaju najprije translacijom kuta $\angle pVq$. Tada je $P(t_p) = P(u_p)$ i $P(t_q) = P(u_q)$, pa stoga $E(t_p) = E(u_p)$ i $E(t_q) = E(u_q)$. Iz $E(t_p) = E(u_p)$ slijedi da su t_p i u_p u istom vlaknu od E , pa je $t_p - u_p = 2k\pi$, za neko $k \in \mathbb{Z}$ i slično $E(t_q) = E(u_q)$ povlači $t_q - u_q = 2l\pi$, za neko $l \in \mathbb{Z}$. Stoga je

$$u_q - u_p = (t_q - t_p) + 2(l - k)\pi, \quad (*)$$

što pokazuje da se mjere istog kuta $\angle pVq$ razlikuju za cjelobrojni višekratnik broja 2π . No zbog svojstva vlakna funkcije E slijedi da je $E(u_q - u_p) = E(t_q - t_p)$, pa je zato $\cos(u_q - u_p) = \cos(t_q - t_p)$ i $\sin(u_q - u_p) = \sin(t_q - t_p)$, što pokazuje da kosinus i sinus (pa stoga tangens i kotangens) ovise samo o mjeri toga kuta, tj. trigonometrijske funkcije kuta su dobro definirane.

Ako su pak reprezentanti kuta tako odabrani da se jedan dobiva nekom rotacijom drugoga, onda su im i mjere jednake, pa prethodna tvrdnja vrijedi i općenito.

LEMA 1. Svaki realan broj t se može jedinstveno napisati u obliku

$$t = t_0 + 2k\pi,$$

gdje su $k \in \mathbb{Z}$ i $t_0 \in [0, 2\pi)$. Kaže se da je t_0 redukcija od t modulo 2π .

Dokaz. Iz definicije najvećeg cijelog broja imamo

$$\frac{t}{2\pi} = \left[\frac{t}{2\pi} \right] + t' = k + t',$$

gdje je $t' \in [0, 1)$. Napišemo li $t' = \frac{t_0}{2\pi}$, dobivamo $t_0 \in [0, 2\pi)$, tj. traženi prikaz. ■

Neka su sada m, n cijeli brojevi (koji postoje prema Lemi 1), tako da je

$$t_q - t_p = 2m\pi + t_0, \quad u_q - u_p = 2n\pi + u_0, \quad (**)$$

gdje su $t_0, u_0 \in [0, 2\pi)$. Iz (*) i (**) dobivamo $2n\pi + u_0 = 2m\pi + t_0 + 2(l - k)\pi$, tj. $u_0 - t_0 = 2\pi(m - n + l - k)$, što zajedno s $t_0, u_0 \in [0, 2\pi)$ povlači $u_0 = t_0$. Tako uveden broj t_0 zove se glavna mjera kuta $\angle pVq$.

Umjesto da kažemo da je φ glavna mjera nekog kuta $\angle pVq$, jednostavno govorimo o kutu φ . Ako je t_0 glavna mjera kuta $\angle pVq$, onda je mjera tog kuta skup $\{t_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Mjera kuta $\angle pVp$ je skup $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, a glavna mu je mjera 0, a ako su polupravci p, q komplementarni, onda je mjera kuta $\angle pVq$ skup $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ s glavnom mjerom π .

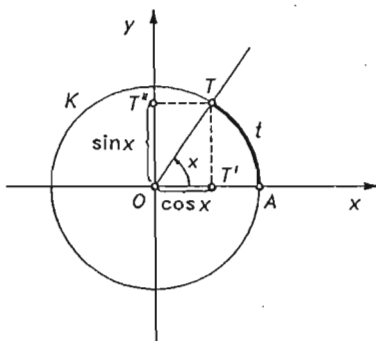
Isto tako, kutove $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ među vektorima koji se razlikuju za $k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) ne razlikujemo.

Nadalje, nije teško provjeriti sljedeća svojstva orijentiranih kutova među vektorima:

- 1) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = -\angle(\vec{b}, \vec{a})$
- 2) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) + \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \angle(\vec{a}, \vec{c})$
- 3) $\angle(-\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{b}) + 180^\circ$.

1.3. Još neke interpretacije trigonometrijskih funkcija

Vidjeli smo da trigonometrijske funkcije kuta ne ovise o položaju kuta. Stoga svaki kut možemo dovesti (odgovarajućom izometrijom) u poziciju da mu je prvi krak pozitivna os apscise Ox koordinatnog sustava ravnine M . Nadalje, uzmimo bijekciju broj $t \mapsto$ duljina luka (računajući od A) i bijekciju koja luku s početkom A pridružuje odgovarajući središnji kut s prvim krakom OA (sl. 5). Stoga možemo



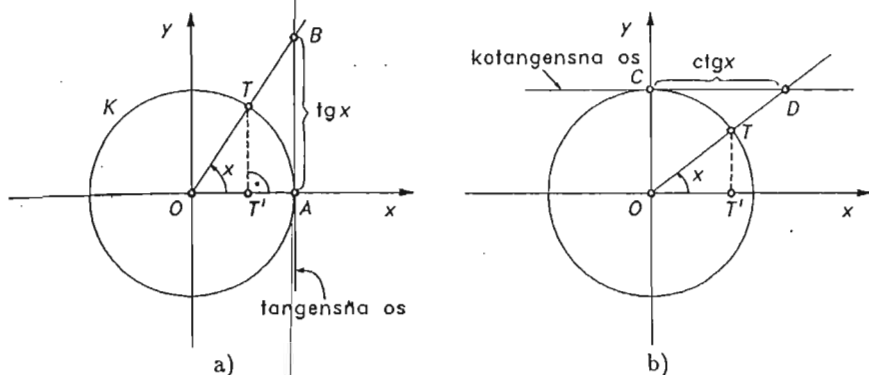
Sl. 5.

trigonometrijske funkcije broja interpretirati kao trigonometrijske funkcije kuta nakon identifikacija pomoću gornjih bijekcija ovako.

Uzmimo bilo koji središnji kut x kojem je prvi krak OA . Neka je T točka u kojoj drugi krak siječe trigonometrijsku kružnicu. Apscisa točke T je kosinus kuta x , tj. $\cos x = |OT'|$, a ordinata točke T je sinus kuta x , tj. $\sin x = |OT''|$ (sl. 5).

Funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ možemo sada ovako interpretirati. U točki $A = (1, 0)$ povucimo tangentu na trigonometrijsku kružnicu (taj se pravac katkada zove i **tangensova os**) i neka drugi krak kuta siječe tangensovu os u točki B . Ordinata te točke B je $\operatorname{tg} x$ (sl. 6a). Ako u točki $C = (0, 1)$ povučemo tangentu (**kotangensova os**), onda je apscisa sjecišta D drugoga kraka kuta i te tangente $\operatorname{ctg} x$ (sl. 6b).

Da se te definicije podudaraju s prijašnjima slijedi iz $\triangle OTT' \sim \triangle OBA$ (sl. 6a) koja povlači $|TT'| : |OT'| = |AB| : |OA|$, tj. $\sin x : \cos x = |AB| : 1$, pa konačno $|AB| = \frac{\sin x}{\cos x}$. (Dakako da smo razmatrali samo dopustive kutove x , tj.

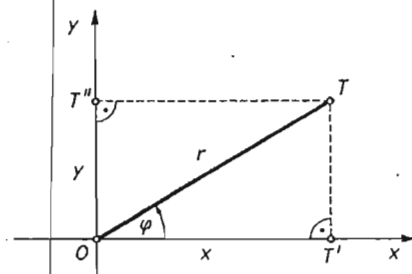


Sl. 6.

$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$). Isto tako (sl. 6b), iz $\triangle OTT' \sim \triangle DOC$ sledi $|OT'| : |TT'| = |CD| : |CO|$, tj. $\cos x : \sin x = |CD| : 1$, pa je $|CD| = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Druga interpretacija trigonometrijskih funkcija kuta je sljedeća. Svaka točka $T = (x, y)$, $T \neq O$, u koordinatnoj ravnini je određena duljinom radijvektora $r = |\vec{OT}|$ i kutom φ između pozitivne osi apscisa i vektora \vec{OT} ; to su tzv. polarne koordinate točke T (usp. pogl. VI). Tada je (sl. 7)

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{x}{y}.$$



Sl. 7.

Korektnost ovih definicija opet lagano sledi iz sličnosti trokuta pa to prepustamo čitatelju.

Uočite da je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, pa stoga

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{x}{y}$$

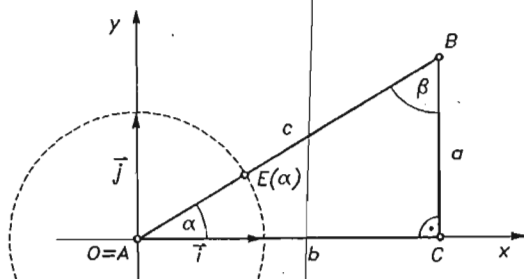
(za dopustive x, y).

Pravokutni trokut

Na kraju pogledajmo interpretaciju trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta. Naime, u mnogim primjenama trigonometrije dovoljno je promatrati te funkcije samo za šiljaste kutove. Svaki šiljasti kut je kut nekog pravokutnog trokuta. Neka je stoga $\triangle ABC$ pravokutni trokut s pravim kutom kod vrha C i kutom α kod vrha A (točnije glavnom mjerom kuta $\sphericalangle BAC$). Smjestimo koordinatni sustav kao na sl. 8. Tada je $\overline{AB} = c\overline{OE(\alpha)}$, gdje je $\overline{OE(\alpha)} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$, što daje $b\vec{i} + a\vec{j} = c(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})$, pa stoga

$$b = c \cos \alpha, \quad a = c \sin \alpha.$$

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta α su stoga (pozitivne su!) dane



Sl. 8.

formulama

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Riječima možemo to izreći ovako ("četiri pjesmice o trigonometrijskim funkcijama šiljastog kuta"):

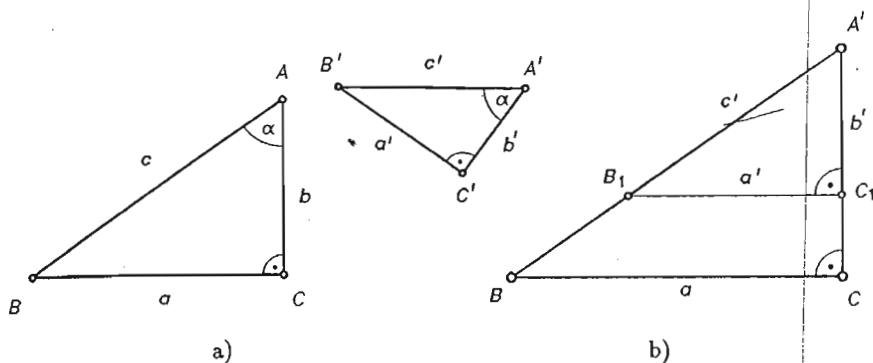
- *Kosinus (šiljastog) kuta u pravokutnom trokutu je omjer (tom kutu) priležeće katete i hipotenuze.*
- *Sinus kuta je omjer nasuprotne katete i hipotenuze.*
- *Tangens kuta je omjer nasuprotne i priležeće katete.*
- *Kotangens kuta je omjer priležeće i nasuprotne katete.*

Ako ovo primijenimo na kut β (sl. 8), dobijemo odmah:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Taj je pristup bio i povijesno prva interpretacija trigonometrijskih funkcija.

Dokažimo da ovako definirane trigonometrijske funkcije šiljastog kuta α ovise samo o mjeri kuta α (a ne o položaju i veličini pravokutnog trokuta). Dokažimo to prvo za kosinus. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dva pravokutna trokuta s kutom α



Sl. 9.

kod vrhova A i A' (sl. 9a). Neka je $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle A'B'C'$ kao na sl. 9b. Tada su BC i B_1C_1 okomiti na pravac AC , pa su paralelni. Iz sličnosti $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ slijedi $b'/c' = b/c$, čime je pokazano da $\cos \alpha$ ne ovisi o trokutu. Za $\sin \alpha$ možemo rezonirati slično, a možemo naprosto koristiti Pitagorin poučak:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

Kako $\cos \alpha$ ovisi samo o mjeri od α , to i $\sin \alpha$ ovisi samo o mjeri od α . Za $\operatorname{tg} \alpha$ imamo po definiciji $\operatorname{tg} \alpha = a/b$, odakle je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, pa odavde slijedi da i $\operatorname{tg} \alpha$ ovisi samo o mjeri od α . Slično je i sa $\operatorname{ctg} \alpha$.

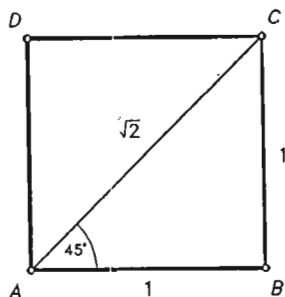
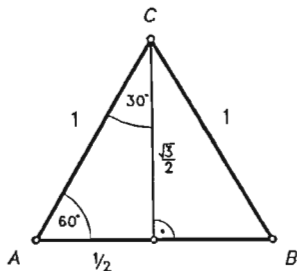
Iz ovoga imamo i veze među trigonometrijskim funkcijama šiljastog kuta:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Zbog nejednakosti trokuta, za šiljasti kut α dobivamo $0 < \cos \alpha < 1, 0 < \sin \alpha < 1$.

Primjer 1. Odredite vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova 30° , 60° i 45° .

Rješenje. Za kutove 30° , 60° koristit ćemo jednakokranični trokut, a za kut od 45° kvadrat stranice 1 kao na sl. 10. Iz pravokutnih trokutova na slici odmah dobivamo



Sl. 10.

$$\begin{array}{llll} \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, & \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, & \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}, \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, & \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, & \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \operatorname{tg} 45^\circ = 1, & \operatorname{ctg} 45^\circ = 1. \quad \blacksquare \end{array}$$

§ 2. Parnost, neparnost, periodičnost i osnovne veze među trigonometrijskim funkcijama

2.1. Parnost i neparnost

Kažemo da je realna funkcija $x \mapsto f(x)$ **parna** ako je za svako x iz domene od f također i $-x$ iz domene i vrijedi $f(-x) = f(x)$. Slično je funkcija $x \mapsto f(x)$ **neparna** ako $x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow -x \in \mathcal{D}(f)$ i ako je $f(-x) = -f(x)$ za svako $x \in \mathcal{D}(f)$.

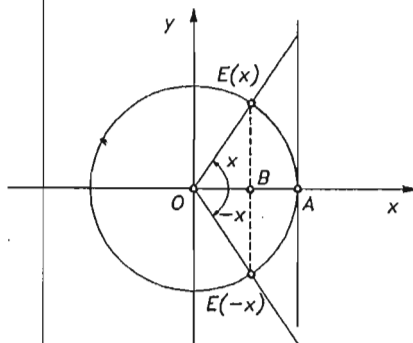
Uočite da je graf parne funkcije $y = f(x)$ simetričan obzirom na os y . Naime, ako je Γ graf od f , onda je zbog parnosti od f , $f(-x) = f(x)$, pa ako je $(x, f(x)) \in \Gamma$, onda je i $(-x, f(x)) \in \Gamma$, a te dvije točke su simetrične obzirom na os y . Graf neparne funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prolazi ishodištem i centralno je simetričan s obzirom na ishodište. Zaista, iz $f(-x) = -f(x)$, za $x = 0$ dobivamo $f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Točke $(x, f(x)) \in \Gamma$ i $(-x, -f(x))$ su centralno simetrične obzirom na ishodište.

PROPOZICIJA 1. Funkcija \cos je parna, a \sin , tg , ctg su neparne funkcije.

Dokaz. Dokažimo da vrijedi

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Za broj $x \in \mathbf{R}$ apscisa točke $E(x)$ je $\cos x$, a ordinata od $E(x)$ je $\sin x$ (sl. 11). Kako je $\triangle OBE(x) \cong \triangle OBE(-x)$ (S-K-S) slijedi da su apscise od $E(x)$ i $E(-x)$



Sl. 11.

jednake, tj. $\cos(-x) = \cos x$, a ordinate su suprotne, tj. $\sin(-x) = -\sin x$. Za tangens imamo

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x,$$

a može se pokazati također slikom. Slično slijedi za kotangens. ■

2.2. Domene i kodomene trigonometrijskih funkcija. Predznaci

Funkcije \sin , \cos su definirane na čitavom skupu \mathbf{R} , pa je domena $\mathcal{D}(\cos) = \mathcal{D}(\sin) = \mathbf{R}$. Isto tako su \sin i \cos , shvaćeni kao funkcije kuta, definirani za sve kutove (pozitivne i negativne i nul-kut). Za funkciju tg područje definicije su svi oni $x \in \mathbf{R}$ za koje $\cos x \neq 0$. Pogledajmo za koje x je $\cos x = 0$. $\cos x$ je apscisa točke na trigonometrijskoj kružnici, pa su to očito one točke za koje $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Dakle,

$$\mathcal{D}(\operatorname{tg}) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid \exists k \in \mathbf{Z}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, \text{ odnosno}$$

$$\mathcal{D}(\operatorname{tg}) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle.$$

Slično je s funkcijom ctg . Njena je domena skup svih $x \in \mathbf{R}$ za koji je $\sin x \neq 0$. Kako je $\sin x$ ordinata točke na trigonometrijskoj kružnici, to mora biti $x \neq k\pi$,

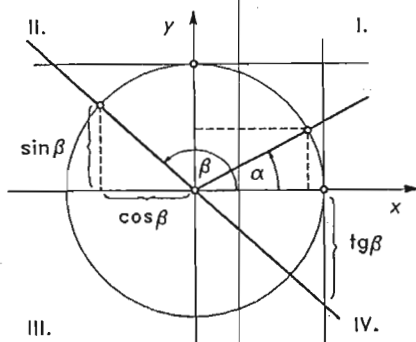
$k \in \mathbf{Z}$. Dakle, domena kotangensa je

$$\mathcal{D}(\text{ctg}) = \mathbf{R} \setminus \{x \in \mathbf{R} \mid \exists k \in \mathbf{Z}, x = k\pi\} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k\pi, (k+1)\pi).$$

Nadalje, budući je E surjektivna i da su uzimanje apscise i ordinate svih točaka kružnice također surjektivne na segment $[-1, 1] \subset \mathbf{R}$, slijedi da su skupovi vrijednosti funkcija \sin i \cos upravo $[-1, 1]$. Prema tome, možemo zapravo pisati $\sin, \cos : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$ i reći da su ovako shvaćene \sin i \cos surjektivne.

Ako na tangensnoj osi uzmemo bilo koju točku T , onda spojnica OT određuje očito s pozitivnom osi apscisa kut x , za koji je $\text{tg } x$ ordinata točke T . Dakle, skup vrijednosti funkcije tg je čitav skup \mathbf{R} . Slično je i s kotangensom.

Često je korisno znati predznake vrijednosti trigonometrijskih funkcija ovisno o tome u kojem je kvadrantu kut odnosno luk (sl. 12). Na primjer, ako je $\alpha \in \langle 0, \pi/2 \rangle$,



Sl. 12.

tj. α kut u prvom kvadrantu I, onda su

$$\cos \alpha > 0, \quad \sin \alpha > 0, \quad \text{tg } \alpha > 0, \quad \text{ctg } \alpha > 0,$$

a ako je β kut drugog kvadranta II, onda je

$$\cos \beta < 0, \quad \sin \beta > 0, \quad \text{tg } \beta < 0, \quad \text{ctg } \beta < 0.$$

Dalje, ako je γ kut trećeg kvadranta III, tj. $\gamma \in \langle \pi, \frac{3\pi}{2} \rangle$, onda je

$$\cos \gamma < 0, \quad \sin \gamma < 0, \quad \text{tg } \gamma > 0, \quad \text{ctg } \gamma > 0,$$

a za kut δ četvrtog kvadranta IV je

$$\cos \delta > 0, \quad \sin \delta < 0, \quad \text{tg } \delta < 0, \quad \text{ctg } \delta < 0.$$

S druge strane, prema Lemi 1 svaki se kut (odnosno luk) može reducirati modulo 2π . Na primjer, ako je kut $\alpha = \frac{1994}{5}\pi$, onda je $\alpha = 199 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{5}$ pa je $\cos \alpha = \cos \frac{4\pi}{5}$, itd. Ili, npr., ako je $\alpha = -2694^\circ$, onda je $\alpha = -8 \cdot 360^\circ + 186^\circ$, pa je $\cos(-2694^\circ) = \cos(-186^\circ)$. No kut -186° pada u III. kvadrant, pa je $\cos \alpha < 0$, $\sin \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{ctg} \alpha > 0$.

2.3. Periodičnost trigonometrijskih funkcija

Kažemo da je realna funkcija realne varijable $x \mapsto f(x)$ periodička s periodom $\tau \neq 0$, ako za svako x vrijedi sljedeće. Ako je funkcija f definirana u jednoj od točaka x , $x \pm \tau$, onda je definirana u svim tim točkama i vrijedi

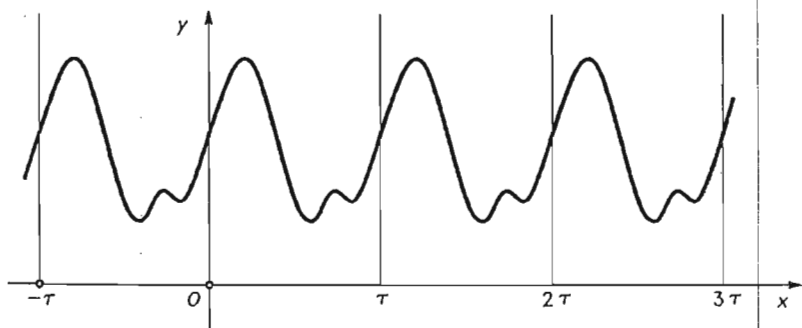
$$f(x) = f(x + \tau) = f(x - \tau).$$

Broj τ se zove period funkcije f . Najmanji pozitivni period funkcije f (ako postoji) zove se temeljni period od f .

Iz ove definicije odmah slijedi da ako je $x \in \mathcal{D}(f)$, onda $x \pm \tau \in \mathcal{D}(f)$, pa stoga i $x \pm 2\tau \in \mathcal{D}(f)$ itd., općenito $x \pm n\tau \in \mathcal{D}(f)$, $n \in \mathbb{Z}$ i vrijedi

$$f(x \pm n\tau) = f(x).$$

Naime, $f(x) = f(x \pm \tau) = f((x \pm \tau) \pm \tau) = f(x \pm 2\tau) = \dots = f(x \pm n\tau)$. Važnost periodičnosti neke funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sastoji se u tome što je dovoljno promatrati tu funkciju na segmentu $[0, \tau]$ (ili na nekom segmentu $[a, a + \tau]$). Tada njen graf dobivamo tako da graf nad $[0, \tau]$ naprosto transliramo (paralelno s osi x) nad svaki drugi segment $[k\tau, (k+1)\tau]$, $k \in \mathbb{Z}$ (sl. 13).



Sl. 13.

Tako je, npr., konstantna funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ periodička. Uočite da npr. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ nije periodička. Zašto? Svaki broj $\tau \neq 0$ je

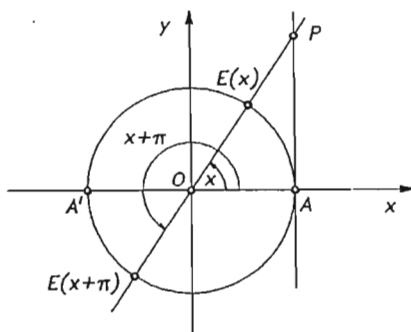
period konstantne funkcije, ali ona nema temeljnog perioda. Nadalje, npr. funkcija $x \mapsto \{x\} = x - [x]$, tzv., "razlomljeni dio od x " je periodička funkcija s temeljnim periodom $\tau = 1$.

TEOREM 1. *Trigonometrijske funkcije su periodičke funkcije. Temeljni period funkcija sinus i kosinus je 2π , a od tangens i kotanges je π .*

Dokaz. Znamo da je $E(t+2k\pi) = E(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Stoga točke $E(t+2k\pi)$ i $E(t)$ imaju iste koordinate. Dakle, ako x pripada domeni neke trigonometrijske funkcije, onda joj pripada i $x + 2k\pi$ i vrijednosti su im u tim točkama jednake. Prema tome, 2π (pa stoga i $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) je period svake od trigonometrijskih funkcija.

Dokažimo da je 2π temeljni period za \cos i \sin . Neka je $\tau > 0$ temeljni period kosinusa, tj. $\cos(x+\tau) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Za $x = 0$ dobivamo $\cos \tau = \cos 0 = 1$. Zbog svojstva vlakna eksponencijalne funkcije slijedi da $\tau \in \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots\}$. Najmanji pozitivan broj ovog skupa je upravo 2π , koji je (prema već dokazanome) period kosinusa, pa je $\tau = 2\pi$ i njegov temeljni period. Za sinus postupamo analogno. $\sin(x + \tau) = \sin x$, pa za $x = \frac{\pi}{2}$ dobivamo $\sin \tau + \frac{\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, odakle je, opet zbog svojstva vlakna $\tau = 2k\pi$, za neko $k \in \mathbb{Z}$. Najmanji pozitivan period je opet $\tau = 2\pi$.

Sada dokažimo da je π temeljni period za tangens. Pretpostavimo da je $\operatorname{tg}(x + \tau) = \operatorname{tg} x$ za sve dopustive x . Prvo, $\tau = \pi$ je period. Naime, točke $E(x)$ i $E(x + \pi)$ su dijametralne (antipodne), pa pravci $OE(x)$ i $OE(x + \pi)$ sijeku tangensovu os u istoj točki P i stoga su ordinate jednake, tj. $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$. Stavimo li u $\operatorname{tg}(x + \tau) = \operatorname{tg} x$, $x = 0$ dobivamo $\operatorname{tg} \tau = 0$ pa dužina \overline{AP} degenerira u točku, tj. P se podudara s A . Stoga su jedina dva moguća položaja točke $E(\tau)$ točke A i A' (sl. 14). No, najmanji pozitivan broj τ za koji $|PA| = 0$ jest $\tau = \pi$. Dokaz za kotangens je analogan. ■



Sl. 14.

Uočimo da ako su $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i ako je f periodička s periodom τ , onda je i kompozicija $g \circ f$ periodička, jer je $(g \circ f)(x + \tau) = g[f(x + \tau)] = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$.

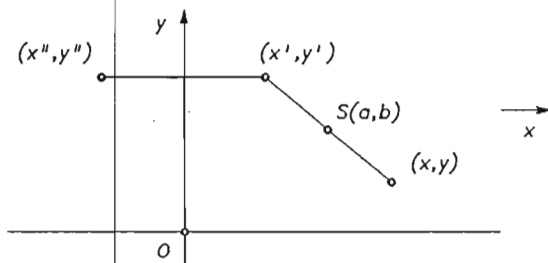
Isto tako, lako se vidi da ako su $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodičke, s istim periodom τ , onda su i $x \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x)$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$, $x \mapsto f(x)/g(x)$, $x \mapsto f(x)^{g(x)}$ periodičke s periodom τ , uz uvjet da su svuda definirane (jer je inače potreban oprez; naime, npr. $\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$). Ukoliko je taj presjek prazan skup \emptyset , onda se funkcija koja nije nigdje definirana također smatra periodičkom s bilo kojim periodom). Tako su, npr., funkcije $\sin x + \operatorname{ctg} x$, $\cos^2 x$, $5^{\cos x} + \sin x + 7$, $(\sin x)^{\cos x}$, $\cos^3 x + 4 \cos x - 5$, $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$, $\log \cos 2x$ periodičke (s periodom 2π).

No određivanje njihovog temeljnog perioda je već složenije pitanje. Tako je, npr., funkcija $f(x) = \sin x \cos x$ periodička, ali joj 2π nije temeljni period. Naime, točke $E(x + \pi)$ i $E(x)$ su antipodne pa imaju suprotne koordinate. Stoga je $f(x + \pi) = \cos(x + \pi) \sin(x + \pi) = (-\cos x)(-\sin x) = f(x)$, pa je π period funkcije $x \mapsto f(x)$.

Jedno od zgodnih svojstava periodičke funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je to da neka paralela s osi x siječe njen graf ili u ni jednoj točki ili u beskonačno mnogo točaka. Stoga, npr., polinomi, racionalne funkcije, eksponencijalna i logaritamska funkcija nisu periodičke funkcije. Isto tako, periodičnost često slijedi iz geometrijskih svojstava grafa funkcije, kao što pokazuje naredni primjer.

Primjer 1. Neka je graf funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ simetričan na os y (tj. f je parna funkcija) i centralno simetričan obzirom na neku točku $S = (a, b)$ ($a \neq 0$). Dokažite da je f periodička funkcija i nađite joj jedan period.

Rješenje. Neka je $(x, y) \in \Gamma(f)$ točka na grafu od f , (x', y') njena centralno simetričan slika obzirom na S , a (x'', y'') zrcalna slika od (x', y') obzirom na os y . Prvo imamo (sl. 15): $\frac{x+x'}{2} = a$, $\frac{y+y'}{2} = b$, tj. $x' = 2a - x$, $y' = 2b - y$, a tada $x'' = -x'$,



Sl. 15.

$y'' = y'$, pa stoga $x'' = x - 2a$, $y'' = 2b - y$. Kako je $y = f(x)$ i $y'' = f(x'')$, dobivamo $f(x - 2a) = 2b - f(x)$, tj. $f(x - 2a) = -f(x) + 2b$. Zamijenimo li ovdje x u $x - 2a$, slijedi $f(x - 4a) = -f(x - 2a) + 2b \Rightarrow f(x - 4a) = f(x) - 2b + 2b$, pa je $f(x - 4a) = f(x)$, odnosno $f(x) = f(x + 4a)$. Stoga je f periodička s periodom $4a$. ■

Sada pokažimo neka svojstva periodičkih funkcija i temeljnog perioda.

PROPOZICIJA 2. Neka je τ temeljni period funkcije f . Tada je svaki period od f oblika $T = n\tau$ za neko $n \in \mathbb{Z}$ (uključujući $0 = 0 \cdot \tau$). Drugim riječima, svaki period je višekratnik temeljnog perioda.

Dokaz. Ako su τ_1 i τ_2 periodi od f , onda se odmah vidi da su $\tau_1 \pm \tau_2$ također periodi od f . Stoga je $T = n\tau$ period od f za sve $n \in \mathbb{Z}$. Neka je sada T bilo koji period od f . Kada T ne bi bilo oblika $n\tau$, onda bi postojao $n \in \mathbb{Z}$, tako da je $n\tau < T < (n+1)\tau$, pa odavde slijedi da je $0 < T - n\tau < \tau$. No broj $\tau' = T - n\tau$ je period od f (kao razlika dvaju perioda T i $n\tau$), i to pozitivan period manji od temeljnog. To je kontradikcija. Dakle, T mora biti oblika $n\tau$, za neko $n \in \mathbb{Z}$. ■

PROPOZICIJA 3. Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodička s temeljnim periodom τ , te neka su ω, A, b, c konstante $\omega, A \neq 0$. Tada je složena funkcija $g(x) = Af(\omega x + b) + c$ periodička funkcija s temeljnim periodom $\tau' = \tau/|\omega|$.

Dokaz. τ' je zaista period g , jer imamo za $\omega > 0$:

$$\begin{aligned} g(x + \tau') &= g\left(x + \frac{\tau}{\omega}\right) = Af\left[\omega\left(x + \frac{\tau}{\omega}\right) + b\right] + c = \\ &= Af[(\omega x + b) + \tau] + c = Af(\omega x + b) + c = g(x). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je τ'' temeljni period od g . Tada je $g(x + \tau'') = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Stoga je $Af[\omega(x + \tau'') + b] + c = Af(\omega x + b) + c \Rightarrow f[(\omega x + b) + \omega\tau''] = f(\omega x + b)$, pa je $\omega\tau''$ period od f i stoga mora biti višekratnik od τ , tj. $\tau''\omega = n\tau$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\tau'' = n \frac{\tau}{\omega}$ temeljni period, slijedi da je $n = 1$, tj. $\tau'' = \tau/\omega$. Slično se postupa za $\omega < 0$. ■

KOROLAR 1. Funkcija (harmonijskog gibanja) $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ ($\omega \neq 0$) je periodička s temeljnim periodom $\tau = \frac{2\pi}{|\omega|}$. Isti taj temeljni period ima i $g(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. ■

Funkcija $f(x) = \cos^2 x$ ima za period 2π , ali joj je π temeljni period. To izlazi iz toga što je $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$, kao što ćemo vidjeti kasnije.

PROPOZICIJA 4. a) Neka su τ_1 i τ_2 temeljni periodi funkcija f_1 i f_2 redom. Ako su τ_1 i τ_2 sumjerljivi, tj. $\tau_2/\tau_1 \in \mathbb{Q}$, onda je suma tih funkcija $f = f_1 + f_2$ periodička funkcija. Isto vrijedi i za produkt $g = f_1 \cdot f_2$.

b) No, ako su $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodičke i neprekidne funkcije i ako su im temeljni periodi nesumjerljivi, onda je njihova suma (i produkt) neperiodička funkcija.

Dokaz. a) Ako uopće postoji neki zajednički period τ od f_1 i f_2 , onda, prema gornjoj propoziciji mora biti $\tau = m\tau_1 = n\tau_2$, gdje su m i n neki cijeli brojevi. No tada je $\tau_2/\tau_1 = m/n \in \mathbb{Q}$. Obratno ako je $\tau_2/\tau_1 \in \mathbb{Q}$, npr. $\tau_2/\tau_1 = m/n$, onda je $m\tau_1 = n\tau_2 = \tau$ neki zajednički period funkcija f_1 i f_2 .

Tvrđnju b) nećemo dokazati, ali ćemo na suštinu dokaza ukazati narednim primjerom. ■

Primjer 2. Dokažite da funkcija $f(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}x$ nije periodička.

Rešenje. Za $x = 0, f(0) = 2$. Pogledajmo kada je $f(x) = 2$, tj. za koje x je $\cos x + \cos \sqrt{2}x = 2$. Ovo je moguće samo u slučaju da je $\cos x = 1$, tj.

$x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ i $\cos \sqrt{2}x = 1$, tj. $x = \frac{2n\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Oba ova niza imaju jedino zajednički element $x = 0$, jer bi inače bilo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dakle, $f(x) = 2$ samo za $x = 0$. No, kada bi f bila periodička, onda bi vrijednost 2 trebala biti postignuta u beskonačno mnogo točaka. ■

Primjer 3. Dokažite da $f(x) = \sin(x^2)$ nije periodička funkcija.

Rješenje I. Uočimo da ako je $x \mapsto f(x)$ periodička i diferencijabilna funkcija, onda je i njezina derivacija $x \mapsto f'(x)$ također periodička s istim periodom τ . Naime, $x \in \mathcal{D}(f') \Rightarrow x \pm \tau \in \mathcal{D}(f')$ i $f'(x + \tau) = f'(x)$. No znamo da je $f'(x) = 2x \cos(x^2)$. Dokažimo da ta funkcija nije periodička.

Koristimo se ovim svojstvom. Ako je f periodička funkcija s periodom τ i ako na nekom segmentu $[a, a + \tau]$ vrijedi $|f(x)| \leq M$, onda i za svako x vrijedi $|f(x)| \leq M$. To svojstvo lako slijedi iz činjenice da je $f(x + n\tau) = f(x)$, za sve $n \in \mathbb{Z}$, pa ista nejednakost vrijedi i nad segmentom $[a + n\tau, a + (n + 1)\tau]$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. No ovi segmenti pokrivaju čitav \mathbb{R} , pa ta nejednakost vrijedi za sve x .

Dakle, kad bi funkcija $x \mapsto 2x \cos(x^2)$ bila periodička s periodom τ , onda za $x \in [0, \tau]$ imamo $|2x \cos(x^2)| \leq 2|x| \leq 2\tau$, pa bi prema ovom svojstvu moralo biti $|2x \cos(x^2)| \leq 2\tau$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Međutim, ova nejednakost ne vrijedi za $x = \sqrt{2k\pi}$, za sve $k \in \mathbb{N}$ za koje je $k > \tau^2/2\pi$. ■

Rješenje II. Kada bi $\sin x^2$ bila periodička s periodom τ , onda bi vrijedilo $\sin(x + \tau)^2 = \sin x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Za $x = 0$ dobivamo odavde $\sin \tau^2 = 0$, pa bi postojao $k \in \mathbb{N}$, za koji je $\tau^2 = k\pi$, tj. $\tau = \sqrt{k\pi}$. Dakle, $\sin(x + \sqrt{k\pi})^2 = \sin x^2$. Koristeći $\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha + 2l\pi$ ili $\beta = \pi - \alpha + 2l\pi$, za neko $l \in \mathbb{Z}$ slijedi da je $x^2 + 2x\sqrt{k\pi} + k\pi = x^2 + 2l\pi$, pa za $x = 1$ dobivamo da je $\pi \in \mathbb{Q}$, što je nemoguće, a u drugom slučaju za $x = \pi$ dobivamo da je π rješenje kvadratne jednadžbe s cijelim koeficijentima, što je također nemoguće. ■

Rješenje III. $\sin(x + \tau)^2 = \sin x^2$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin(y + \frac{\tau}{2})^2 = \sin(y - \frac{\tau}{2})^2$, $\forall y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y\tau = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ili $4y^2 = (4l + 2)\pi - \tau^2$, $l \in \mathbb{Z}$. Za $\tau \neq 0$ samo prebrojivo mnogo y -ova zadovoljava ovaj uvjet. Dakle, $\tau = 0$, pa f nije periodička. ■

Primjer 4. Dokažite da $f(x) = \{x\} + \sin x$ nije periodička funkcija.

Rješenje. Pretpostavimo da je f periodička s periodom τ . Tada je $f(x + \tau) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tj. $\{x + \tau\} + \sin(x + \tau) = \{x\} + \sin x$. Za $x = 0$ dobivamo $\{\tau\} + \sin \tau = 0$, a za $x = -\tau$, $\{-\tau\} - \sin \tau = 0$. Zbrajanjem slijedi $\{\tau\} + \{-\tau\} = 0$. No razlomljeni dio svakog broja je nenegativan, pa mora biti $\{\tau\} = \{-\tau\} = 0$, tj. τ je cijeli broj. S druge strane, $\{\tau\} = 0$ povlači $\sin \tau = 0$, pa je $\tau = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). No među ovim brojevima jedino je $0 \cdot \pi = 0$ cijeli broj, pa je stoga nužno $\tau = 0$. Dakle, ne postoji period ($\neq 0$), pa f nije periodička. ■

Primjer 5. Dokažite da racionalna funkcija (osim konstante) nije periodična.

Rješenje. Neka su P i Q polinomi ($\neq 0$). Pretpostavimo da je

$$\frac{P(x + n\tau)}{Q(x + n\tau)} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

za neko $\tau \neq 0$ i $n \in \mathbb{Z}$. Tada je

$$P(x + n\tau)Q(x) - P(x)Q(x + n\tau) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

No, izraz $P(x + y)Q(x) - P(x)Q(x + y)$ je polinom po y , koji bi imao beskonačno nultočki, što je u suprotnosti s osnovnim teoremom algebre. ■

Primjer 6. Odredite temeljni period funkcije $x \mapsto \sin x \sin 3x$.

Rješenje. Neka je τ period te funkcije. Tada za sve $x \in \mathbb{R}$ mora biti $\sin(x + \tau) \cdot \sin 3(x + \tau) = \sin x \cdot \sin 3x$. Posebno, za $x = 0$ dobivamo $\sin \tau \cdot \sin 3\tau = 0$. Dakle, ako upće τ postoji, njega treba tražiti među brojevima $\tau = k\pi$, $\tau = \frac{l\pi}{3}$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Lako se provjerava da $\tau = \frac{\pi}{3}$ i $\tau = \frac{2\pi}{3}$ nisu periodi. $\tau = \pi$ jest period i to je dakle temeljni period ove funkcije. ■

Neka su $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dvije periodičke funkcije s temeljnim periodima redom τ_1, τ_2 , a $f = f_1 + f_2$ (ili $f = f_1 \cdot f_2$) i neka su τ_1, τ_2 sumjerljivi. Znamo da je tada f periodička funkcija. Da f ne mora imati temeljni period pokazuje primjer $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = -\sin x$. No uzmimo da f ima temeljni period τ . Netko bi mogao pomisliti da se τ može ovako odrediti. Gledaju se svi višekratnici $k\tau_1, l\tau_2$ ($k, l \in \mathbb{N}$), i tada je najmanji zajednički višekratnik τ . Da to nije tako, pokazuje ovaj primjer.

Primjer 7. Neka je $f_1(x) = \sin 2x + \cos 3x$, $f_2(x) = -\sin 2x + \cos \frac{3x}{2}$. Odredite temeljni period od $f = f_1 + f_2$.

Rješenje. $\sin 2x$ ima (pozitivne) periode $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, a $\cos 3x$ periode $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{12\pi}{3}, \dots$. Sada je lako ustanoviti (kao u prethodnom primjeru) da je 2π temeljni period od f_1 . Slično je za $-\sin 2x$ niz perioda $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, a $\cos \frac{3x}{2}$ niz $\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{12\pi}{3}, \dots$ i opet se lako pokaže da je 4π temeljni period od f_2 . $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \cos 3x + \cos \frac{3x}{2}$ ima temeljni period $\frac{4\pi}{3}$, a ne 4π kao najmanji zajednički višekratnik temeljnih perioda od f_1 i f_2 . ■

Napomena 1. Periodička gibanja u fizici su vrlo česta pojava. Od harmonijskog oscilatora, čija je jednadžba gibanja opisana funkcijom $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ (v. § 10), preko raznih pulzirajućih pojava, periodičkih gibanja u svemiru itd. Funkcija kao $f(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}x$, iako nije periodička, pripada u važnu klasu tzv. skoro-periodičkih funkcija. Te se funkcije ovako definiraju. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji "skoro-period" $\tau \neq 0$, tako da je za svako x vrijednost $f(x + \tau)$ jednaka $f(x)$ s točnošću ε , tj. $|f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon$. Grubo govoreći, to se objašnjava time da se iracionalni broj može po volji točno aproksimirati racionalnim brojevima.

U fizici se veličine mjere približno, pa je njihova iracionalnost tako reći nebitna. Skoro-periodički procesi sreću se u prirodi onda kad se radi o periodičkim pojavama čiji omjer perioda nije cijeli broj nego razlomak s velikim nazivnikom.

Kao primjer navedimo sastavljanje kalendara. Pri tom se uzima u obzir vrtnja Zemlje oko Sunca (s periodom 1 astronomska godina) i vrtnja Zemlje oko svoje osi (s periodom 1 dan = 24 sata). Da bude pogodniji, kalendar treba biti periodički i pri tome bismo željeli da njegov period bude zajednički period obiju vrtnji. Omjer astronomske godine prema danu je približno $m = 365,242199$. Kad bismo to smatrali točnom vrijednošću, onda bi zajednički period navedenih procesa bio vrlo velik i iznosio oko milion godina! Stoga je još Julije Cezar uveo "skoro-period" od 4 godine, što odgovara vrijednosti $m \approx 365,25 = 365 \frac{1}{4}$. No rimski papa Grgur XIII. je 1582. god. napravio korekciju i ozakonio "skoro-period" kalendara od 400 godina. Za taj je kalendar $m = 365,2425 = 365 \frac{97}{400}$, i taj je kalendar opće prihvaćen, a zove se gregorijanski kalendar (a samo su još neke crkve zadržale stari, tzv. julijanski kalendar).

2.4. Osnovne veze među trigonometrijskim funkcijama

Osnovna veza između sinusa i kosinusa dana je ovom Propozicijom.

PROPOZICIJA 5. Za svako $t \in \mathbb{R}$ vrijedi $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Dokaz. Kako je točka $E(t)$ na jediničnoj kružnici, iz Pitagorinog poučka odmah slijedi navedena relacija. ■

Ako je točka (x, y) točka na jediničnoj kružnici, onda njene koordinate zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + y^2 = 1$ (pogl. VI). Kako je E surjekcija, postoji $t \in \mathbb{R}$, tako da je $x = \cos t$, $y = \sin t$. Štoviše, postoji jedinstveni $t_0 \in [0, 2\pi)$, tako da je $x = \cos t_0$, $y = \sin t_0$.

Druga osnovna veza među trigonometrijskim funkcijama slijedi iz definicija $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$, odakle množenjem slijedi $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$. Nadalje, podijelimo li $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ sa $\cos^2 t (\neq 0)$, dobivamo $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$ i slično $\operatorname{ctg}^2 t + 1 = \frac{1}{\sin^2 t} = \operatorname{cosec}^2 t$.

Često nam je potrebno izračunati vrijednost trigonometrijskih funkcija ako je zadana jedna od njih. Neka je, npr., zadana vrijednost od $\sin x$. Tada iz osnovnih veza odmah dobivamo

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}, \quad \operatorname{ctg} x = \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}.$$

(Predznak + ili - odabere se prema tome u kojem je kvadrantu x). Slično, ako znamo $\cos x$, dobivamo

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}.$$

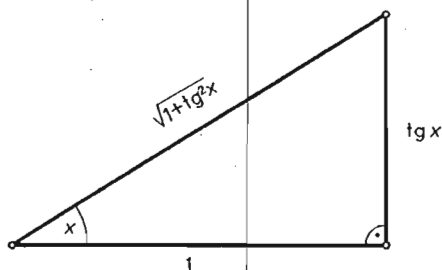
Ako je pak zadan $\operatorname{tg} x$, onda odmah nalazimo

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Jedan pogodan mnemotehnički način da se brzo izvedu ove formule je ovaj: neka je, npr., zadan $\operatorname{tg} x$. Tada se pogleda pravokutni trokut sa (šiljastim) kutom x , nasuprotnom katetom $\operatorname{tg} x$ i priležecom katetom 1 (sl. 16). Tada je hipotenuza jednaka $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, pa je

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

Slično se postupa u ostalim slučajevima.



Sl. 16.

Primjer 8. Pojednostavite izraz

$$A = 2(\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha) - 3(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha).$$

Rješenje. Iz $(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 = 1$ slijedi $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$. Slično, iz $(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^3 = 1$ slijedi $\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha = 1 - 3\cos^4 \alpha \sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha \sin^4 \alpha = 1 - 3\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 1 - 3\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$. Stoga je $A = 2 - 6\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - 3 + 6\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = -1$. ■

Primjer 9. Stavimo $x_1 = \cos \varphi_1$, $x_2 = \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$, $x_3 = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3$, ..., $x_n = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dots \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_n$, $x_{n+1} = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dots \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_n$. Dokažite da za sve $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ vrijedi

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1.$$

(To je jednadžba n -dimenzionalne sfere, a gornje formule su njezina parametrizacija s tzv. Eulerovim kutovima).

Rješenje.

$$x_n^2 + x_{n+1}^2 = \cos^2 \varphi_1 \dots \cos^2 \varphi_{n-1} (\sin^2 \varphi_n + \cos^2 \varphi_n) = \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots \cos^2 \varphi_{n-1}.$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} x_{n-1}^2 + x_n^2 + x_{n+1}^2 &= \\ &= \cos^2 \varphi_1 \dots \cos^2 \varphi_{n-2} \sin^2 \varphi_{n-1} + \cos^2 \varphi_1 \dots \cos^2 \varphi_{n-2} \cos^2 \varphi_{n-1} = \\ &= \cos^2 \varphi_1 \dots \cos^2 \varphi_{n-2} (\sin^2 \varphi_{n-1} + \cos^2 \varphi_{n-1}) = \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots \cos^2 \varphi_{n-2} \end{aligned}$$

itd., sve dok ne dođemo do:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 = 1. \quad \blacksquare$$

Funkcije sin i cos vezane su i još na neke načine, a isto tako tg i ctg. Vrijedi

PROPOZICIJA 6 (formule komplementiranja). Za svako $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

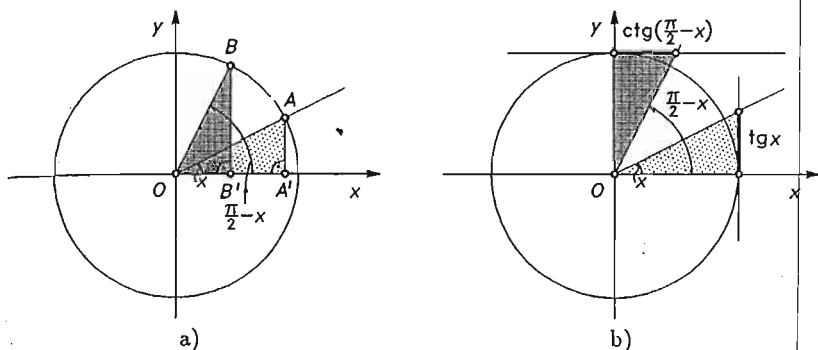
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

Isto tako je

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x \quad \text{i} \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$$

za sve dopustive x .

Dokaz. Ako je x šiljast kut, onda već znamo za te formule iz interpretacije trigonometrijskih funkcija u pravokutnom trokutu. Drugi dokaz možemo provesti kao na sl. 17a). Vidimo da je $|AA'| = \sin x$, $|OA'| = \cos x$, te $|BB'| = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $|OB'| = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. No, $\triangle OAA' \cong \triangle OBB'$ ($S^{\circ}-S-K$), pa je $|AA'| = |OB'|$ i $|OA'| = |BB'|$, odakle slijedi tvrdnja.



Sl. 17.

Isto tako, pomoću kongruencije trokuta pokazuje se druga tvrdnja kao na sl. 17b). Slučajevi kada je x iz II., III. ili IV. kvadranta lako se svode na gornji slučaj, a ostali slučajevi se redukcijom na glavnu mjeru, tj. na redukciju modulo 2π , svode na gornje.

Treći dokaz ovih formula dat ćemo poslije adicijonih teorema u §4. ■

Osim formula komplementiranja, imamo i niz drugih formula sličnog tipa koje zovemo **formule redukcije**. To su formule koje izražavaju trigonometrijske formule argumenata

$$-x, \quad \frac{\pi}{2} \pm x, \quad \pi \pm x, \quad \frac{3\pi}{2} \pm x, \quad 2\pi \pm x$$

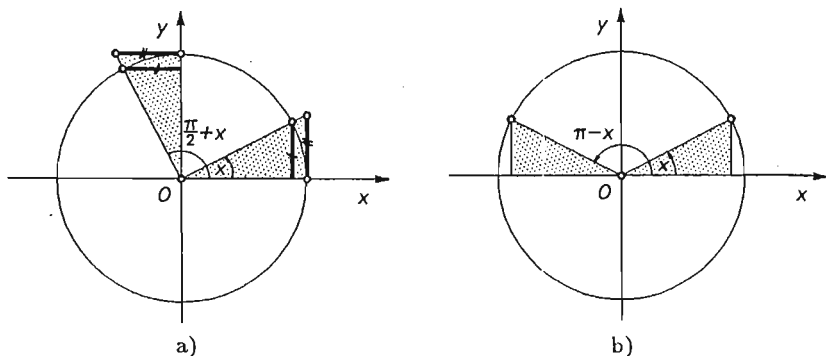
pomoću trigonometrijskih funkcija argumenta x .

Prva serija odnosi se na $-x$: $\cos(-x) = \cos x$ itd., što je parnost, odnosno neparnost. Dalje su već dokazane formule komplementiranja. Nadalje imamo (također komplementiranje)

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x, & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\operatorname{ctg} x, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Naznačimo samo geometrijsku interpretaciju za šiljasti kut x na sl. 18a). Dalje imamo

$$\begin{aligned} \cos(x + \pi) &= -\cos x, & \sin(x + \pi) &= -\sin x, \\ \operatorname{tg}(x + \pi) &= \operatorname{tg} x, & \operatorname{ctg}(x + \pi) &= \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$



Sl. 18.

To slijedi odatle što su točke $E(x)$ i $E(x + \pi)$ dijametralno suprotne (antipodne), pa su im apscisa i ordinata (tj. kosinus i sinus) međusobno jednake po apsolutnoj vrijednosti i suprotne po predznaku. Sljedeće su formule

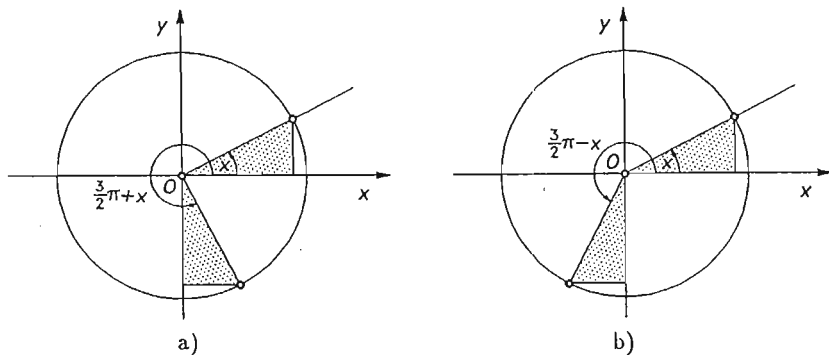
$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos x, & \sin(\pi - x) &= \sin x, \\ \operatorname{tg}(\pi - x) &= -\operatorname{tg} x, & \operatorname{ctg}(\pi - x) &= -\operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

Interpretacija je dana na sl. 18b. Još jedna serija formula redukcija su

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) &= \pm \sin x, & \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) &= -\cos x, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) &= \pm \operatorname{ctg} x, & \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) &= \pm \operatorname{tg} x, \end{aligned}$$

(istovremeno se uzimaju ili gornji ili donji predznaci). Interpretacija je dana na sl. 19. Formule

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \operatorname{tg}(x + 2\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x + 2\pi) = \operatorname{ctg} x$$

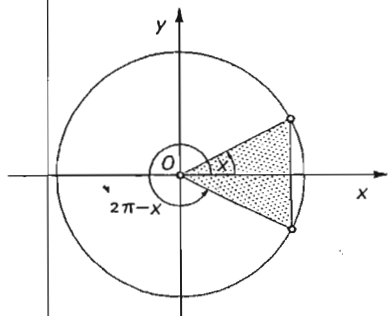


Sl. 19.

govore nam o periodičnosti dok su na sl. 20. interpretacije formula

$$\cos(2\pi - x) = \cos x, \quad \sin(2\pi - x) = -\sin x, \quad \operatorname{tg} = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(2\pi - x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Napomenimo da će sve ove formule slijediti i iz adicijonih formula (§4). ■



Sl. 20.

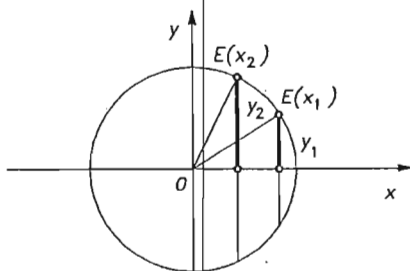
§ 3. Intervali monotonosti, neprekidnost i grafovi trigonometrijskih funkcija

3.1. Intervali monotonosti i neprekidnost trigonometrijskih funkcija

TEOREM 1. Restrikcija funkcije sinus na segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ strogo je monotono rastuća funkcija, a restrikcija \cos na $[0, \pi]$ strogo je monotono padajuća funkcija. Nadalje, tg na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ strogo je monotono rastuća, a ctg na $(0, \pi)$ je strogo monotono padajuća funkcija.

Stoga su $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ i $\operatorname{ctg}|_{(0, \pi)} : (0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$ bijekcije.

Dokaz. Da funkcija $x \mapsto \sin x$ raste na $[0, \frac{\pi}{2}]$ možemo geometrijski pokazati ovako. Na sl. 21 su $2y_1 = 2\sin x_1$ i $2y_2 = 2\sin x_2$ duljine tetiva koje pripadaju lukovima $2x_1$ i $2x_2$. Budući da većem luku pripada veća tetiva, slijedi da za $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ vrijedi $2y_1 = 2\sin x_1 < 2y_2 = 2\sin x_2$, tj. $\sin x_1 < \sin x_2$. Za segment $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ koristimo neparnost sinusa. Naime, iz $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq 0$ slijedi



Sl. 21.

$0 \leq -x_2 < -x_1 \leq \frac{\pi}{2}$, pa dobivamo $\sin(-x_2) < \sin(-x_1)$, tj. $-\sin x_2 < -\sin x_1$, a odavde $\sin x_1 < \sin x_2$.

Dakle, $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ je strogo rastuća funkcija, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, pa sinus na tom segmentu strogo raste od -1 do 1 . Kako je ta funkcija i surjekcija na $[-1, 1]$ (zašto?), slijedi da je ta funkcija bijekcija.

Za funkciju $x \mapsto \cos x$ na $[0, \pi]$ možemo sada ovako postupiti. Na $[0, \frac{\pi}{2}]$ je $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Kako sinus na tom segmentu raste, raste i $\sin^2 x$, pa $1 - \sin^2 x$, a s njime i $x \mapsto \sqrt{1 - \sin^2 x}$, pa dakle funkcija $x \mapsto \cos x$ tu strogo pada. Na $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ koristimo formulu redukcije $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$, pa odatle vidimo da kosinus i tu (strogo) pada. Sada se kao gore zaključuje da je $\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ bijekcija.

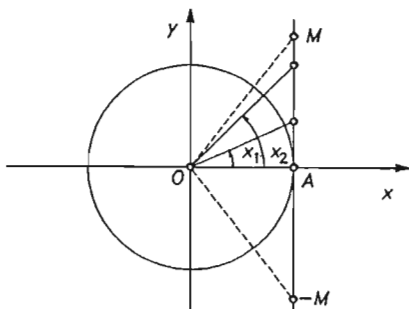
Funkciju tangens na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ promatramo prvo na $[0, \frac{\pi}{2})$. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, pa kako je brojnik pozitivan i rastući, a nazivnik pozitivan i padajući, slijedi da za $0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ imamo $0 \leq \sin x_1 < \sin x_2$ i $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$, odakle je

$$\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}, \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2.$$

Ako je $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 \leq 0$, onda je $0 \leq -x_2 < -x_1 < \frac{\pi}{2}$, pa je $\operatorname{tg}(-x_2) < \operatorname{tg}(-x_1)$, odakle je zbog neparnosti tangensa $-\operatorname{tg} x_2 < -\operatorname{tg} x_1$, tj. $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$.

Napomenimo da se rast funkcije tg može i geometrijski pokazati na $[0, \frac{\pi}{2})$ kao na sl. 22, koristeći činjenicu "većem kutu (ili luku) odgovara veća stranica". Nadalje, za svako $M > 0$, uzmimo na tangensovoj osi točku $T = (1, M)$ i neka je $E(M) = m$. Kako je tangens rastuća funkcija na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, slijedi da je nejednadžba $\operatorname{tg} x > M$ ispunjena na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ za $x \in \langle m, \frac{\pi}{2} \rangle$. Stoga, očito vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \left(x < \frac{\pi}{2}\right).$$



Sl. 22.

U okolini točke $-\frac{\pi}{2}$, za $-\frac{\pi}{2} < x < -m$ vrijedi $\operatorname{tg} x < -M$. Stoga je

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \left(x > -\frac{\pi}{2}\right).$$

Kako je $\operatorname{tg} \left|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right.$ surjektivna, slijedi da je $\operatorname{tg} \left|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right. : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbf{R}$ bijektivna.

Za funkciju $\operatorname{ctg} \left|_{(0, \pi)}\right.$ dokaz je analogan i prepuštamo ga čitatelju. ■

Primjer 1. Dokažite da jednadžba $\sin x = \cos x$ ima jedinstveno rješenje na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rješenje. Za $x = \frac{\pi}{4}$ imamo $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tvrdimo da je to jedino rješenje. Razlika $\sin x - \cos x$ na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ raste, jer sinus raste, a kosinus pada, pa jednadžba $\sin x - \cos x = 0$ može biti ispunjena za samo jednu vrijednost x . ■

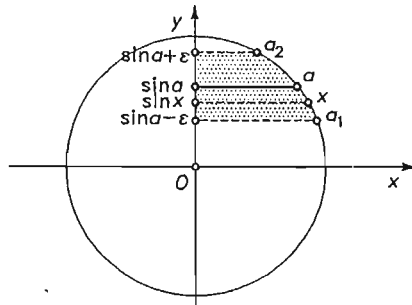
Primjer 2. Odredite domenu funkcije f zadanu sa $f(x) = \sqrt{2} \sin x - 1$.

Rješenje. Mora, očito, biti $\sin x \geq 1/2$. Na desnoj polukružnici jednakost $\sin x = 1/2$ postiže se samo za $x = \pi/6$, a kako je tu sinus rastuća funkcija, imamo za $x > \pi/6$ da je $\sin x > 1/2$, a za $x < \pi/6$ da je $\sin x < 1/2$. Na lijevoj polukružnici, zbog padanja sinusa za $x \leq 5\pi/6$ je $\sin x \geq 1/2$, a za $x > 5\pi/6$ imamo $\sin x < 1/2$. Dakle, u $[0, 2\pi]$ traženi je uvjet ekvivalentan sa svojstvom $\pi/6 \leq x \leq 5\pi/6$. Prema tome, traženo područje definicije je

$$\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right]. \quad \blacksquare$$

Podsjetimo da je funkcija $f : S \rightarrow \mathbf{R}$, $S \subseteq \mathbf{R}$, neprekidna u točki $a \in S$, ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da $x \in S$, $|x - a| < \delta$ povlači $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, a neprekidna na S ako je neprekidna u svakoj točki $a \in S$.

Prvo ćemo dati geometrijski (više intuitivan) dokaz da je sinus neprekidan u bilo kojoj točki a . Uzmimo, određenosti radi, da je $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Za (dovoljno mali) $\varepsilon > 0$, pogledajmo točke a_1 i a_2 na luku brojevnice kružnice u I. kvadrantu koje se projiciraju na os y redom u točke $\sin a - \varepsilon$, $\sin a + \varepsilon$. Neka je δ duljina manjeg od lukova $\widehat{aa_1}$ i $\widehat{aa_2}$. Sada je jasno da za svaku točku x , za koju je $|x - a| < \delta$, ta točka leži na luku $\widehat{a_1a_2}$, pa se stoga projicira na os y u segment $[\sin a - \varepsilon, \sin a + \varepsilon]$. Odatle



Sl. 23.

slijedi neprekidnost funkcije sinus u bilo kojoj točki a , pa je stoga sinus neprekidan svuda.

U stvari, da pojasnimo ovaj dokaz treba reći da je sinus kompozicija eksponencijalnog preslikavanja i projekcije (na os y), tj. $\sin : \mathbf{R} \xrightarrow{E} K \xrightarrow{\text{proj}} \mathbf{R}$. Lako se vidi da je projekcija neprekidno preslikavanje. Preslikavanje E je neprekidno u točki $a \in \mathbf{R}$, jer (očito?!) za svaki ε -luk J oko točke $E(a)$ na K postoji δ -interval I oko a na \mathbf{R} , tako da je $E(I) \subseteq J$. Sada se još koristi činjenica da je kompozicija dviju neprekidnih funkcija opet neprekidna funkcija.

Drugi dokaz slijedi iz ovog teorema iz matematičke analize (v. S. Kurepa, *Matematička analiza II*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1980):

TEOREM 2. *Neka je $I \subseteq \mathbf{R}$ otvoreni interval (konačni ili beskonačni), a $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ monotona funkcija, tako da je slika $I' = f(I) \subseteq \mathbf{R}$ također otvoreni interval. Tada je f neprekidna funkcija.*

Iz prethodnog teorema odmah slijedi da je $\sin|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ neprekidna funkcija, a isto tako $\cos|_{(0, \pi)}$. Odatle i iz formula redukcije lako se zaključi da su $\sin, \cos : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ neprekidne funkcije. Odatle se onda zaključuje da su tangens i kotangens (kao kvocijenti neprekidnih) također neprekidne na svom području definicije.

Zbog neprekidnosti, prema tome, vrijede ove formule

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a, \quad \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, \quad \text{za sve } a \in \mathbf{R},$$

te

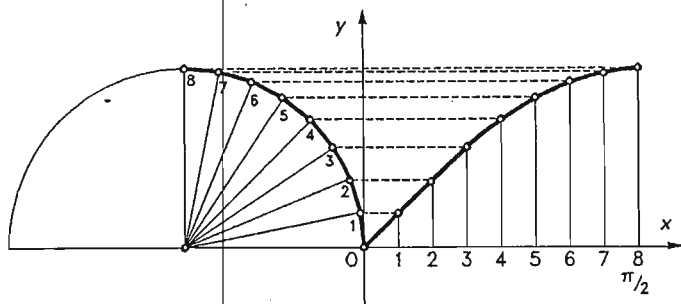
$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \quad \left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right), \quad \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a \quad (a \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}).$$

Napomenimo još da su sinus i kosinus derivabilne i da je $(\sin x)' = \cos x$, a $(\cos x)' = -\sin x$.

3.2. Grafovi trigonometrijskih funkcija

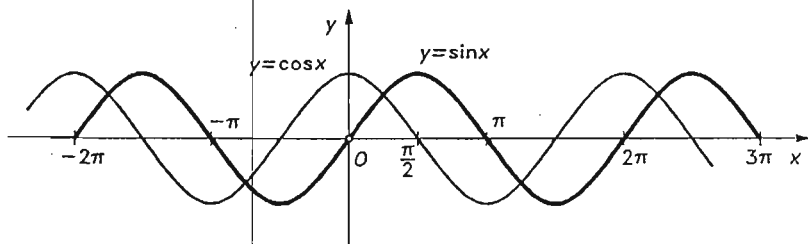
Za konstrukciju grafova trigonometrijskih funkcija dovoljno je konstruirati graf na nekom segmentu duljine temeljnog perioda, a zatim ga periodički produžiti.

Sinusoida (obična) je graf funkcije sinus, tj. graf od $y = \sin x$. Promotrimo \sin na $[0, \frac{\pi}{2}]$. Na $[0, \frac{\pi}{2}]$ sinus raste od 0 do 1. Da se nacрта što točnije prva četvrtina sinusoida, prvu četvrtinu brojevnice kružnice dijelimo na $m = 2^n$ dijelova i kroz diobene točke $1, 2, \dots, m$ vučemo paralele s osi x . Isto tako segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ podijelimo na m jednakih dijelova $1, 2, \dots, m$ i u njima podignemo okomice. Sjecišta okomica i paralela daju odgovarajuće točke grafa, sl. 24 (tu je $m = 8$). Ta sjecišta



Sl. 24.

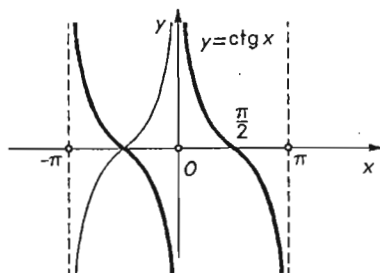
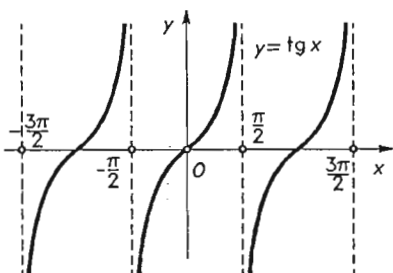
spojimo glatkom krivuljom (razlog za to je neprekidnost i, štoviše derivabilnost sinusa), i tako dobivamo sinusoidu na prvom kvadrantu. Za drugi kvadrant koristimo formulu $\sin(\pi - x) = \sin x$, pa je graf sinusa na $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ simetričan grafu na $[0, \frac{\pi}{2}]$ obzirom na paralelu s osi y u točki $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Iz neparnosti sinusa slijedi da je sinusoida simetrična obzirom na ishodište. Na taj smo način opisali sinusoidu na $[-\pi, \pi]$. Dalje je periodički produžimo.



Sl. 25.

Kosinusoida je graf funkcije kosinus, tj. graf od $y = \cos x$. Zbog formule $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ vidimo da je kosinusoida pomaknuta sinusoida za $\pi/2$ ulijevo duž osi x . Sinusoida i kosinusoida su na sl. 25.

Zbog periodičnosti, monotonosti i neprekidnosti nije se teško uvjeriti da grafovi funkcija tangens i kotangens izgledaju kao na sl. 26. Kod grafa tangensa pravci



Sl. 26.

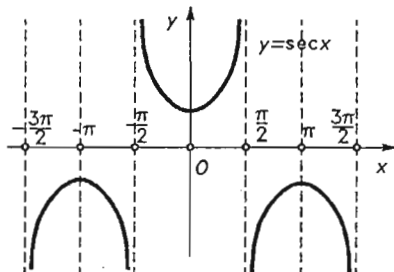
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) su vertikalne asimptote. Tako je, npr., $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$, a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$, što se može lako ilustrirati na tangensovoj osi. Slično je $\lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty$, a $\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{ctg} x = -\infty$.

Primjer 3. Nacrtajte grafove funkcija sekans i kosekans.

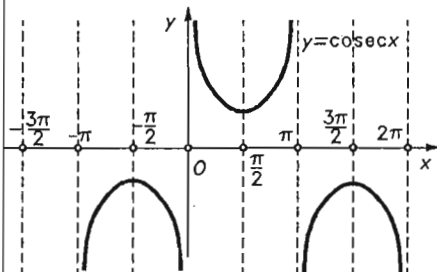
Rješenje. Područje definicije sekansa je

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle,$$

jer je $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. To je periodička funkcija s temeljnim periodom 2π , pa ju je dovoljno nacrtati na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$. Na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ kosinus pada od 1 do 0, pa $\sec x$ raste od 1 do $+\infty$. Na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\sec x$ pada od $+\infty$ do 1, a na $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\cos x$ pada od 0 do -1 , pa zato $\sec x$ raste od $-\infty$ od -1 , i konačno na $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos x$ raste od -1 do 0, pa $\sec x$ pada od



a)



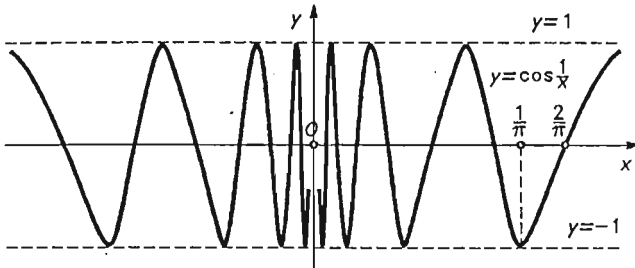
b)

Sl. 27.

$+1$ do $-\infty$. S još nekoliko međuvrijednosti kvalitativan graf $x \mapsto \sec x$ je dan na sl. 27a). Slično se radi za funkciju kosekans $x \mapsto \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ (sl. 27b)). ■

Primjer 4. Nacrtajte graf funkcije $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$.

Rješenje. Područje definicije ove funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkcija je parna, pa ju je dovoljno promatrati na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. Nultočke dobijemo iz uvjeta $\cos \frac{1}{x} = 0$, odakle je $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, tj. $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkcija je omeđena: $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$, pa je čitav graf sadržan unutar pruge omeđene pravcima $y = \pm 1$. Najveća se vrijednost dostiže tamo gdje je $\cos \frac{1}{x} = 1$, odakle je $\frac{1}{x} = 2k\pi$, tj. $x = \frac{1}{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, a najmanja za one x za koje je $\cos \frac{1}{x} = -1$, tj. za $\frac{1}{x} = (2k+1)\pi$, odnosno $x = \frac{1}{(2k+1)\pi}$. Intervali monotonosti se lako odrede. Npr. ako x ide od $\frac{1}{2\pi}$ do $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{x}$ tada pada od 2π do π , a $\cos \frac{1}{x}$ pri tom pada od 1 do -1 itd. Kada x raste od $\frac{1}{\pi}$ do ∞ , $\frac{1}{x}$ pada od π do 0, a $\cos \frac{1}{x}$ raste od -1 do 1. Traženi graf je na sl. 28. ■



Sl. 28.

Da se nacrtaju graf funkcije $x \mapsto f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, $\omega \neq 0$ postupa se ovako. Taj se graf dobiva iz obične sinusoida $y = \sin x$ ovako. Prvo se "zgušne" (ili "produži"), tako da dobijemo graf od $x \mapsto \sin \omega x$ s temeljnim periodom $2\pi/|\omega|$. Tada se ovaj graf "poveća", tako da "titra" između pravaca $y = A$ i $y = -A$, tako da dobijemo graf funkcije $x \mapsto A \sin \omega x$ i konačno zbog pomaka u fazi φ , taj se graf pomakne duž osi x ulijevo za $\varphi/|\omega|$.

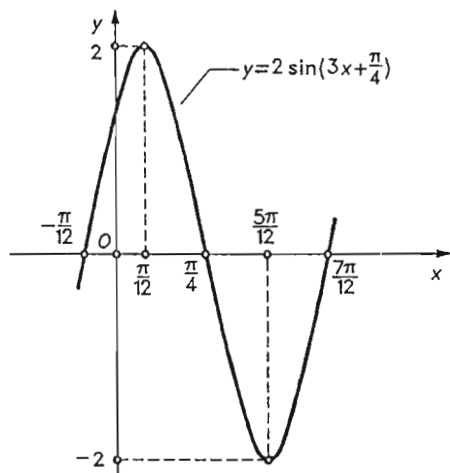
Graf funkcije $x \mapsto y = a \sin \omega x + b \cos \omega x$ se svodi na ovaj graf tako da se uvede faza φ , za koju je $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ i amplituda A , $|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$, čime dobivamo funkciju $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ (vidi §7, Propozicija 1). Ilustrirajmo to primjerima.

Primjer 5. Nacrtajte graf funkcije koja je zadana sa $y = 2 \sin(3x + \frac{\pi}{4})$.

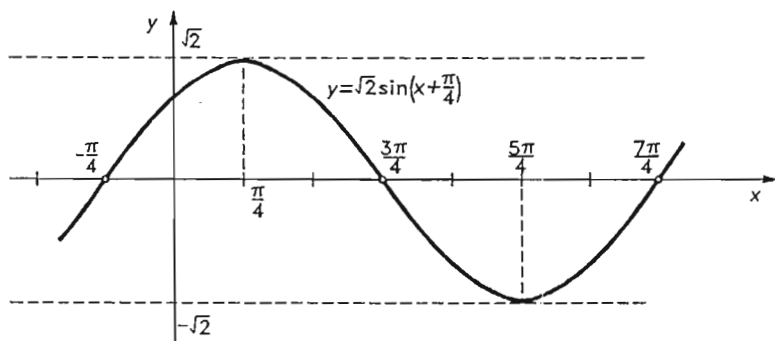
Rješenje. Od obične sinusoida, prvo prijedemo na graf funkcije $y = \sin 3x$, tako da je "zgušnjemo" s temeljnim periodom $2\pi/3$. Zatim tu funkciju "povećamo" 2 puta (duž osi y). Tako dobijemo graf od $y = 2 \sin 3x$ i konačno taj graf transliramo duž osi x za $\pi/12$ ulijevo (sl. 29).

Primjer 6. Nacrtajte graf funkcije zadane sa $y = \sin x + \cos x$.

Rješenje. Opisanom transformacijom dobivamo da je $y = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$. Taj graf dobivamo kao u prethodnom primjeru (sl. 30):



Sl. 29.



Sl. 30.

§ 4. Adicione formule i posljedice

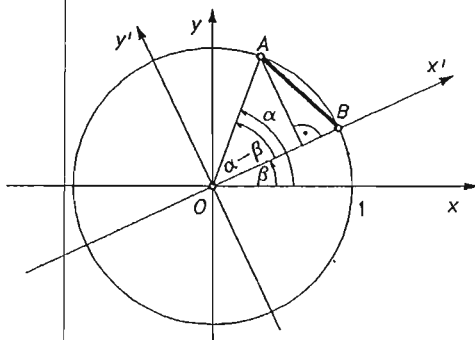
Adicione formule za trigonometrijske funkcije su formule kojima se izražavaju vrijednosti trigonometrijskih funkcija zbroja pomoću vrijednosti tih funkcija na pribrojnicima. Vrijedi ovaj

TEOREM 1 (Adicione formule).

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, & \text{za sve } \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, & \text{za sve } \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, & \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}, \end{aligned}$$

za sve dopustive α, β .

Dokaz. Dokažimo prvo $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$. Uzmimo $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$. Promotrimo točke $A = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $B = (\cos \beta, \sin \beta)$ na trigonometrijskoj kružnici. Računat ćemo $|AB|$ u sustavu Oxy i zarotiranom sustavu $Ox'y'$ (sl. 31). Imamo $|AB|^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 2(1 - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$.



Sl. 31.

S druge strane u sustavu $Ox'y'$ imamo da je $A = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$, $B = (1, 0)$, pa je $|AB|^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + \sin^2(\alpha - \beta) = \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) = 2[1 - \cos(\alpha - \beta)]$. Kako se udaljenost rotacijom ne mijenja, to izjednačavanjem slijedi $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$. Ova formula vrijedi ne samo za $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$, jer uvijek postoje cijeli brojevi k, l , tako da je $2k\pi \leq \alpha < 2\pi(k+1)$, $2l\pi \leq \beta < 2\pi(l+1)$, tj. $0 \leq \alpha - 2k\pi < 2\pi$, $0 \leq \beta - 2l\pi < 2\pi$.

Nadalje,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Ostale formule se mogu slično izvesti, ali one se mogu izvesti odavde iz formula komplementiranja ovako (za drugi dokaz vidi poslije Korolara 2):

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \beta \right] = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Stavimo li ovdje $-\beta$, umjesto β , slijedi formula za $\sin(\alpha - \beta)$. Dalje imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.\end{aligned}$$

Slično se izvode formule za ctg . ■

Kasnije ćemo pokazati (§ 12) da je adicioni teorem toliko važan da gotovo karakterizira funkcije \sin i \cos . Sada navedimo neke jednostavne posljedice (od kojih neke znamo otprije).

KOROLAR 1 (Formule dvostrukog i polovičnog kuta). *Vrijedi*

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.\end{aligned}$$

Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \\ \sin \alpha &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

Dokaz. Formule dvostrukog kuta slijede iz adicijonih formula za $\alpha = \beta$, a formule za polovične kutove neposredno iz njih. ■

KOROLAR 2 (Formule redukcije).

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha, \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha.$$

Dokaz. Stavimo li u adicijonu formulu $\beta = \frac{\pi}{2}$, onda zbog $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ slijedi prva tvrdnja. Zamijenimo li u prvoj formuli α sa $\frac{\pi}{2} + \alpha$, imamo

$$\begin{aligned}\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) &= -\cos \left(\left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= -\cos(\alpha + \pi) = -(\cos \alpha \cos \pi - \sin \alpha \sin \pi) = \cos \alpha. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Možemo kako se iz formula redukcije za kosinus sada izvodi adiciona formula za sinus. U adicionoj formuli za kosinus zamijenimo α sa $\alpha + \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \cos\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \beta\right) &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cos\beta - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \sin\beta = \\ &= -\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta. \end{aligned}$$

Š druge strane,

$$\cos\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \beta\right) = \cos\left((\alpha + \beta) + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha + \beta).$$

Izjednačavanjem tih dvaju izraza za $\cos\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \beta\right)$ slijedi adiciona formula za sinus.

Naravno, i formule komplementiranja sada slijede iz formula redukcije tako da se α zamijeni sa $-\alpha$.

Višestrukom primjenom adicijonih formula mogu se izračunati vrijednosti sume od više pribrojnika. Na primjer,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin[(\alpha + \beta) + \gamma] = \sin(\alpha + \beta) \cos\gamma + \cos(\alpha + \beta) \sin\gamma = \\ &= \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma + \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma - \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma. \end{aligned}$$

Posebno, za $\alpha = \beta = \gamma$ dobivamo kosinusne formule za trostruki kut

$$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha.$$

Primjer 1. Dokažite da je $\cos 20^\circ$ iracionalan broj.

Rješenje. Stavimo $x = \cos 20^\circ$. Iz formule $\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha$ za $\alpha = 20^\circ$, dobivamo, zbog $\cos 60^\circ = 1/2$, jednadžbu u x

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Ova jednadžba nema racionalnih korijena, jer su jedini kandidati za racionalne korijene (prvi dio, pogl. II, § 2.4) $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$, ali ni jedan od njih nije korijen gornje jednadžbe. Zato $x = \cos 20^\circ$ nije racionalan broj. ■

Adicione formule nam omogućuju da produkt kompleksnih brojeva zapisanih u trigonometrijskom obliku opet napišemo u tom obliku. Naime, za brojeve $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i \sin\alpha_1)$, $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i \sin\alpha_2)$ množenjem i korištenjem adicijonih formula dobivamo

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\alpha_1 + i \sin\alpha_1) \cdot r_2(\cos\alpha_2 + i \sin\alpha_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)). \end{aligned}$$

Općenito, indukcijom po n se lako dobiva da za brojeve $z_k = r_k(\cos\alpha_k + i \sin\alpha_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ vrijedi

$$\prod_{k=1}^n z_k = \prod_{k=1}^n r_k (\cos\alpha_k + i \sin\alpha_k) = \prod_{k=1}^n r_k \left[\cos\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\right) + i \sin\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\right) \right].$$

Posebno, za $r_1 = \dots = r_k = r$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \alpha$, dobivamo Moivreovu formulu:

$$[r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Koristeći binomni teorem, izjednačavanjem realnog i imaginarnog dijela odavde se dobivaju formule (§ 5, Primjer 1):

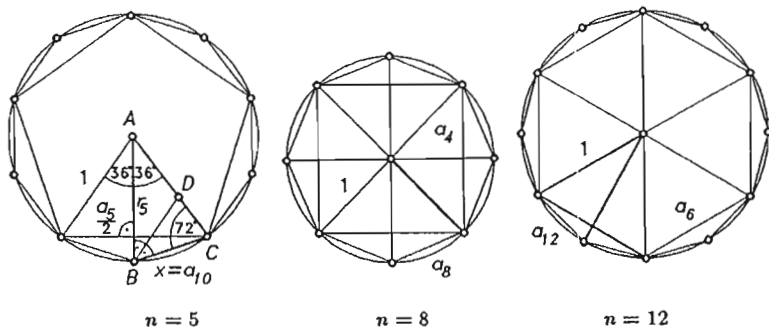
$$\cos n\alpha = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} \alpha \sin^{2k} \alpha,$$

$$\sin n\alpha = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1} \alpha \sin^{2k+1} \alpha.$$

Naredna dva primjera pokazuju kako se raznim dosjerkama iz planimetrije mogu izračunati vrijednosti nekih trigonometrijskih funkcija.

Primjer 2. Izračunajte vrijednost trigonometrijskih funkcija kutova $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{12}$.

Rješenje. Poslužit ćemo se pravilnim n -terokutom upisanim u jediničnu kružnicu. Neka mu je a_n duljina stranice, a r_n radijus upisane kružnice. Kut tzv. karakteristič-



Sl. 32.

nog trokuta pravilnog n -terokuta je očito π/n . Tada je $r_n = \sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$, $\sin \frac{\pi}{n} = \frac{a_n}{2}$, $\cos \frac{\pi}{n} = \sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$. Iz formule $\sin \frac{\pi}{2n} = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi/n}{2}}$ dobivamo, nakon sređivanja,

$$a_{2n} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}}, \quad \text{odnosno } a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}.$$

Neka je prvo $n = 5$. Tada je $a_5 = 2 \sin 36^\circ = 4 \sin 18^\circ \cos 18^\circ$. Izračunajmo $\sin 18^\circ$. Promotrimo jednakokrani $\triangle ABC$ u kojem je $\alpha = 36^\circ$, $\beta = \gamma = 72^\circ$, $|AC| = 1$, $|BC| = x$. Neka je $|BD|$ simetrala kuta β . Tada je $\triangle BCD \sim \triangle ABC$ i $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAD$, pa je $|AD| = |BD| = |BC| = x$ i $|CD| = x^2$. Stoga je $1 = |AC| = |AD| + |DC| \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, pa je $\sin 18^\circ = \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, a odavde $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \frac{1}{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}}$. To

poplači $\sin \frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \frac{2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{10}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-1}}{4}$.

Dakle, dobivamo $a_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Za $n = 8$, zbog $a_4 = \sqrt{2}$, slijedi $a_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $r_8 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, pa je $\sin \frac{\pi}{8} = \sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1$.

Za $n = 10$ dobivamo $a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $r_{10} = \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}$, pa je $\sin \frac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos \frac{\pi}{10} = \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

Za $n = 12$, zbog $a_6 = 1$, slijedi $a_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $r_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{3}}$, pa $\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}$.

Uočite nadalje da zbog $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10} = 54^\circ$ dobivamo odatle $\cos \frac{3\pi}{10} = \cos 54^\circ = \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ i $\sin \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, pa dalje zbog $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5} = 72^\circ$ slijedi $\cos \frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}$, i isto tako zbog $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} = 75^\circ$, $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. ■

Primjer 3. Izračunajte sinus i kosinus od 3° , 6° , 9° , 12° .

Rješenje. $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$, pa koristeći vrijednost sinusa i kosinusa od 18° i 15° iz prethodnog primjera i iz adicijonih formula slijedi

$$\begin{aligned} \sin 3^\circ &= \sin \frac{\pi}{60} = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ = \\ &= \frac{1}{16} \left[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \right] \approx 0,05234 \end{aligned}$$

i slično

$$\cos 3^\circ = \frac{1}{16} \left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \right] \approx 0,99863.$$

Iz $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$ slijedi $\sin 6^\circ = \sin 36^\circ \cos 30^\circ - \cos 36^\circ \sin 30^\circ$, pa opet koristeći prethodni primjer slijedi

$$\sin 6^\circ = \sin \frac{\pi}{30} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{3} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) = \frac{1}{8} \left[\sqrt{6}\sqrt{5-\sqrt{5}} - \sqrt{5}-1 \right] \approx 0,104528$$

i slično

$$\cos 6^\circ = \frac{1}{8} \left[\sqrt{3}(\sqrt{5}+1) + \sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}} \right] \approx 0,99452.$$

$9^\circ = 45^\circ - 36^\circ$, pa slijedi

$$\sin 9^\circ = \sin \frac{\pi}{20} = \frac{1}{8} \left[\sqrt{2}(\sqrt{5}+1) - 2\sqrt{5-\sqrt{5}} \right] \approx 0,15643$$

$$\cos 9^\circ = \frac{1}{8} \left[\sqrt{2}(\sqrt{5}+1) + 2\sqrt{5-\sqrt{5}} \right] \approx 0,98769.$$

$12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$, pa slijedi

$$\sin 12^\circ = \sin \frac{\pi}{15} = \frac{1}{8} \left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1) \right] \approx 0,20791$$

$$\cos 12^\circ = \frac{1}{8} \left[\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{5}-1 \right] \approx 0,97815. \quad \blacksquare$$

Primjer 4. Izračunajte produkt $P = \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \dots \cos 2^n \alpha$.

Rješenje. Izmnožimo sve jednakosti

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha,$$

$$2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha,$$

$$2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha = \sin 8\alpha,$$

...

$$2 \sin 2^n \alpha \cos 2^n \alpha = \sin 2^{n+1} \alpha.$$

Nakon skraćivanja, dobijemo

$$2^{n+1} \sin \alpha \cdot P = \sin 2^{n+1} \alpha, \quad \text{dakle je} \quad P = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}.$$

Posebno, za

$$\alpha = \frac{\pi}{2^{n+1} + 1}, \quad \sin 2^{n+1} \alpha = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{2^{n+1} + 1} \right) = \sin \frac{\pi}{2^{n+1} + 1} = \sin \alpha.$$

Stoga dobivamo identitet

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+1} + 1} \cos \frac{2\pi}{2^{n+1} + 1} \cos \frac{4\pi}{2^{n+1} + 1} \dots \cos \frac{2^n \pi}{2^{n+1} + 1} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Posebno, za $n = 1$ dobivamo $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$, a za $n = 2$ dobijemo $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$, odnosno $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$. ■

Iz formule za polovične kutove imamo $\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha$, a ako tome dodamo $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1$, rješavanjem tog sustava dobivamo

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, & \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \\ \text{a odavde} & & \text{tg } \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}. \end{aligned}$$

Predznaci pred korijenima ovise o tome u kojem je kvadrantu $\frac{\alpha}{2}$. Svakako možemo pisati

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

$\text{tg } \frac{\alpha}{2}$ možemo i ovako izraziti

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

ili

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Kosinus i sinus polovičnog kuta možemo izraziti pomoću $\sin \alpha$ ovako: polazimo od

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha, \quad \text{i} \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1.$$

Zbrajanjem i oduzimanjem slijedi

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 = 1 + \sin \alpha, \quad \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 = 1 - \sin \alpha,$$

odakle je

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \alpha}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin \alpha},$$

pa opet zbrajanjem i oduzimanjem

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \pm \sqrt{1 - \sin \alpha} \right), \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \mp \sqrt{1 - \sin \alpha} \right).$$

Primjer 5. Nađite izraze za $\cos \frac{\pi}{2^n}$ i $\sin \frac{\pi}{2^n}$.

Rješenje.

$$\cos \frac{\pi}{2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{2^3} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{2^3} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Označimo sa $R_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$ (n korijena). Tada je

$$\cos \frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2} R_2, \quad \sin \frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - R_1}.$$

Pretpostavimo induktivno da je

$$\cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2} R_{n-1}, \quad \sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - R_{n-2}}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + R_{n-1}} = \frac{1}{2} R_n, \\ \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \cos \frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - R_{n-1}}, \end{aligned}$$

pa su gornje formule točne za svako $n \geq 3$. ■

Pretvorba produkta u sumu trigonometrijskih funkcija

Napišimo adicione formule za kosinus i zbrojimo ih

$$\left. \begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} + \implies$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}.$$

Isto tako

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} + \Rightarrow$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

i slično oduzimanjem izraza za $\cos(\alpha + \beta)$ i $\cos(\alpha - \beta)$ dobiva se

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

Višestruke produkte oblika $\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_m \sin \beta_1 \sin \beta_2 \dots \sin \beta_m$ možemo višestrukim primjenama gornjih formula prikazati u obliku sume sinusa i kosinusa.

Primjer 6. Izrazite $\sin^3 \alpha \cos^4 \alpha$ kao sumu funkcija višestrukih kutova.

Rješenje.

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha \cos^5 \alpha &= (\sin \alpha \cos \alpha)^3 \cos^2 \alpha = \frac{1}{16} \sin^3 2\alpha (1 + \cos 2\alpha) = \\ &= \frac{1}{16} \sin^2 2\alpha (\sin 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\alpha) = \frac{1}{32} (1 - \cos 4\alpha) \left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right) = \\ &= \frac{1}{32} \left[\sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 4\alpha - \cos 4\alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \cos 4\alpha \sin 4\alpha \right] = \\ &= \frac{1}{32} \left[\sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 4\alpha - \frac{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 8\alpha \right] = \\ &= \frac{3}{64} \sin 2\alpha + \frac{1}{64} \sin 4\alpha - \frac{1}{64} \sin 6\alpha - \frac{1}{128} \sin 8\alpha. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Pretvorba sume u produkt trigonometrijskih funkcija

PROPOZICIJA 1. Za sve α, β vrijedi

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, & \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \end{aligned}$$

Za sve $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) vrijedi ($\alpha, \beta \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$)

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad \text{i analogno} \quad \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Dokaz. Uvedimo oznake φ i ψ , tako da je $\varphi + \psi = \alpha$, $\varphi - \psi = \beta$. Tada je $\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\psi = \frac{\alpha - \beta}{2}$, pa imamo

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi) = 2 \cos \varphi \cos \psi = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Analogno se dokazuju i ostale tri formule. Formule za tangens slijede formalnim transformacijama

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \blacksquare$$

Neke posljedice ovih formula jesu:

$$1. \cos \alpha + \sin \beta = \cos \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

Posebno za $\alpha = \beta$ dobivamo $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$.

$$2. \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

3. Analogno dobivamo

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}, \quad \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

4. $1 + \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \alpha = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$, a zbog $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$ slijedi $1 + \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$. Analogno je

$$1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right).$$

5. Stavimo li u formulu za sumu tangensa $\beta = \frac{\pi}{4}$, dobivamo

$$1 \pm \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha \right)}{\cos \alpha}.$$

Primjer 7. Napišite u obliku produkta $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta &= (\sin \alpha + \sin \beta)(\sin \alpha - \sin \beta) = \left(2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \\ &\left(2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \left(2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \left(2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \\ &= \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta). \blacksquare \end{aligned}$$

Primjer 8. Pretvorite u produkt (još se kaže "priprijetite za logaritmiranje") izraz $A = \cos 11\alpha + 3 \cos 9\alpha + 3 \cos 7\alpha + \cos 5\alpha$.

Rješenje. Koristit ćemo $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$. Imamo

$$A = 2 \cos 8\alpha \cos 3\alpha + 6 \cos 8\alpha \cos \alpha = 2 \cos 8\alpha (\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha) = 8 \cos 8\alpha \cos^3 \alpha. \blacksquare$$

Primjer 9. Pretvorite u produkt izraz

$$S = (\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha)^3 - \sin^3 \alpha - \sin^3 2\alpha - \sin^3 3\alpha.$$

Rješenje. Primijenit ćemo formulu za rastav na faktore

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x).$$

Stoga je

$$\begin{aligned} S &= 3(\sin \alpha + \sin 2\alpha)(\sin 2\alpha + \sin 3\alpha)(\sin 3\alpha + \sin \alpha) = \\ &= 3 \cdot 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{5\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin 2\alpha \cos \alpha = \\ &= 24 \sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{5\alpha}{2} \sin 2\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Primjer 10. Nađite vezu među argumentima α , β , γ , ako za njih vrijedi

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1. \quad (*)$$

Posebno razmotrite slučaj šiljastih kutova.

Rješenje. Transformirajmo izraz

$$S = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1$$

u produkt. Imamo

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1 &= \frac{1}{2}(2 \cos^2 \beta - 1 + 2 \cos^2 \gamma - 1) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2\beta + \cos 2\gamma) = \cos(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma), \\ \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \cos^2 \alpha + \cos \alpha [\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)], \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} S &= \cos(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) + \cos^2 \alpha + \cos \alpha [\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)] = \\ &= [\cos \alpha + \cos(\beta + \gamma)][\cos \alpha + \cos(\beta - \gamma)] = \\ &= 4 \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cos \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, uvjet (*) je ekvivalentan uvjetu $S = 0$, a to znači da je bar jedan faktor jednak nuli. Da je prvi faktor nula, tj. $\cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 0$, ekvivalentno je sa $\alpha + \beta + \gamma = (2k_1 + 1)\pi$, za neko $k_1 \in \mathbb{Z}$. Analogno dobivamo $-\alpha + \beta + \gamma = (2k_2 + 1)\pi$, $\alpha - \beta + \gamma = (2k_3 + 1)\pi$, $\alpha + \beta - \gamma = (2k_4 + 1)\pi$. Prema tome (*) je ekvivalentna egzistenciji brojeva $k_i \in \mathbb{Z}$, za koje vrijedi bar jedna od gornjih jednakosti.

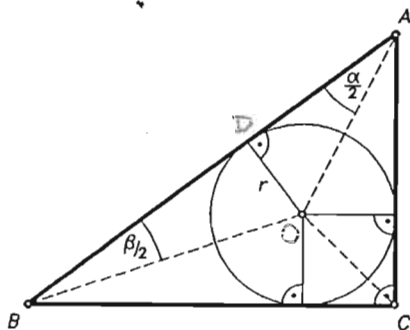
Neka su sada α, β, γ šiljasti, tj. $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$. U tom slučaju nijedna od posljednjih triju jednakosti ne može vrijediti niti za jedno k_1, k_2, k_3, k_4 . Naime, tada je $-\frac{\pi}{2} < -\alpha + \beta + \gamma < \pi$, pa ne postoji $k_2 \in \mathbb{Z}$, tako da je $-\alpha + \beta + \gamma = (2k_2 + 1)\pi$.

Analogno se vidi da ne postoje $k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$. Nadalje, iz $0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3\pi}{2}$ slijedi da je za šiljaste kutove α, β, γ prva jednakost ispunjena samo za $k_1 = 1$, tj. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Prema tome, za šiljaste kutove α, β, γ , uvjet (*) je ekvivalentan tome da je suma $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, tj. α, β, γ čine kutove trokuta. ■

Primjer 11. Odredite duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta ako su zadani radijus upisane kružnice r i kut α .

Rješenje. Neka je O centar upisane kružnice pravokutnog trokuta ABC , a D njeno diralište s hipotenuzom. Tada iz pravokutnih trokuta $\triangle AOD$ i $\triangle BOD$ imamo $c = |AD| +$



Sl. 33.

$+ |BD| = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$, pa zbog $\beta = 90^\circ - \alpha$ dobivamo

$$c = r \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \right).$$

No to možemo dalje zapisati pomoću formule za sumu i produkt kao

$$c = \frac{r\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}. \quad \blacksquare$$

Evo jedne primjene trigonometrije u "svakodnevnom životu".

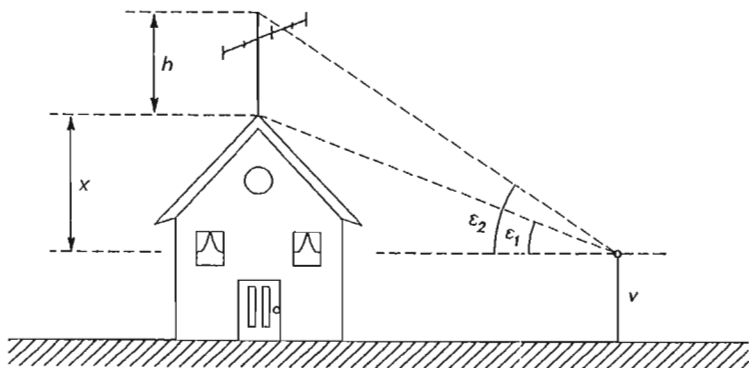
Primjer 12. Na krovu kuće je antena visoka $h = 1,8$ m (sl. 34). Teodolitom se izmjeri kut elevacije $\epsilon_1 = 40^\circ 35'$ položaja antene i kut elevacije $\epsilon_2 = 41^\circ 40'$ do njenog vrha. Ako je visina osovine vrtnje teodolita $v = 1,6$ m, kolika je visina kuće?

Rješenje. Apstrahirajući nebitno, sa slike 34. se vidi da je tražena visina kuće $v + x$. Iz pravokutnih trokuta dobivamo da je $h + x = d \operatorname{tg} \epsilon_2$ i $x = d \operatorname{tg} \epsilon_1$. Eliminacijom d iz ove dvije jednakosti slijedi da je

$$x = \frac{h \operatorname{tg} \epsilon_1}{\operatorname{tg} \epsilon_2 - \operatorname{tg} \epsilon_1}.$$

Stoga je tražena visina jednaka

$$v + \frac{h \operatorname{tg} \epsilon_1}{\operatorname{tg} \epsilon_2 - \operatorname{tg} \epsilon_1}.$$



Sl. 34.

Napomenimo da se ovaj rezultat može zapisati kao

$$v + h \frac{\sin \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2}{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \approx 43,045 \text{ m.} \blacksquare$$

Trigonometrijski polinomi

Funkcija $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (*)$$

zove se **trigonometrijski polinom**. Realni brojevi $a_0, a_1, \dots, b_1, \dots, b_n$ zovu se **koeficijenti polinoma** P . Red trigonometrijskog polinoma $(*)$ je jednak n , ako je bar jedan od brojeva $a_n, b_n \neq 0$.

Očito je trigonometrijski polinom periodička funkcija perioda 2π . Linearna kombinacija trigonometrijskih polinoma je opet očito trigonometrijski polinom.

PROPOZICIJA 2. *Produkt trigonometrijskih polinoma P i Q opet je trigonometrijski polinom i red $(P \cdot Q) = \text{red } P + \text{red } Q$.*

Dokaz. Za prirodni broj m i trigonometrijski polinom $(*)$ imamo

$$\begin{aligned} P(x) \cdot \cos mx &= a_0 \cos mx + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx \cos mx + b_k \sin kx \sin mx) = \\ &= a_0 \cos mx + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} a_k (\cos(k+m)x + \cos(k-m)x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} b_k (\sin(k+m)x + \sin(k-m)x) \right]. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da je $x \mapsto P(x) \cos mx$ trigonometrijski polinom reda $m + \text{red } P$. Na isti način se vidi da je i $x \mapsto P(x) \sin mx$ trigonometrijski polinom reda $m + \text{red } P$. Ako je sada Q bilo koji trigonometrijski polinom, onda je

$$P(x)Q(x) = a_0Q(x) + \sum_{k=1}^n (a_k Q(x) \cos kx + b_k Q(x) \sin kx)$$

kao zbroj trigonometrijskih polinoma opet trigonometrijski polinom i $\text{red}(P \cdot Q) = \text{red } P + \text{red } Q$. ■

Trigonometrijski polinomi su vrlo važni u teoriji aproksimacija. U toj teoriji razvijaju se razne metode aproksimacije na segmentu $[0, 2\pi]$ dane funkcije pomoću trigonometrijskih polinoma.

Spomenimo i tzv. Fourierove ili trigonometrijske redove oblika

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

a razvojem funkcija u Fourierov red bavi se tzv. harmonijska analiza.

Napomena 1. Ako je $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbf{R}$ zadana funkcija, onda se često traži trigonometrijski polinom P zadanog reda koji ima minimalni tzv. kvadratni otklon od f , tj. za kojeg je

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - P(x)]^2 dx$$

minimalno. Ako je taj trigonometrijski polinom $(*)$, onda se njegovi koeficijenti računaju po formulama

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Ti se koeficijenti zovu Fourierovi koeficijenti funkcije f .

§ 5. Kompleksni brojevi i trigonometrijske sume i produkti

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja i Moivreove formule (§ 4.4) omogućuju da se odrede razne trigonometrijske sume i produkti. Pokažimo to na primjerima.

Primjer 1. Izrazite $\cos n\varphi$ te $\sin n\varphi$, $n \in \mathbb{N}$, pomoću potencija sinusa i kosinusa.

Rješenje. Pođimo od Moivreove formule za potenciranje kompleksnog broja $\cos \varphi + i \sin \varphi$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Odavde, pomoću Newtonove binomne formule, slijedi

$$\begin{aligned} \cos n\varphi + i \sin n\varphi &= \cos^n \varphi + \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \cdot i \sin \varphi + \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \cdot i^2 \sin^2 \varphi + \\ &+ \dots + \binom{n}{2} \cos^2 \varphi \cdot i^{n-2} \sin^{n-2} \varphi + \binom{n}{1} \cos \varphi \cdot i^{n-1} \sin^{n-1} \varphi + i^n \sin^n \varphi. \end{aligned}$$

Uvrstimo li $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ te periodički dalje i izjednačimo li realne i imaginarne dijelove u prethodnom izrazu, dobit ćemo

$$\begin{aligned} \cos n\varphi &= \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots, \\ \sin n\varphi &= n \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots \end{aligned}$$

Posebno za $n = 2, 3$ odavde se dobivaju poznate formule

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, & \sin 2\varphi &= 2 \sin \varphi \cos \varphi, \\ \cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi, \\ \sin 3\varphi &= 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Primjer 2. Za $n \in \mathbb{N}$ odredite sume $\sum_{k=1}^n \cos kx$ i $\sum_{k=1}^n \sin kx$.

Rješenje. Pođimo od jednakosti

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

koja vrijedi za sve kompleksne brojeve $z \neq 1$. Za $z = \cos x + i \sin x$ odavde prema Moivreovoj formuli slijedi

$$\sum_{k=0}^n (\cos kx + i \sin kx) = \frac{1 - (\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x)}{1 - (\cos x + i \sin x)},$$

tj.

$$1 + \sum_{k=1}^n \cos kx + i \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{1 - \cos(n+1)x - i \sin(n+1)x}{1 - \cos x - i \sin x}. \quad (*)$$

Kako je $1 = \cos(n+1)x = 2 \sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}$, $\sin(n+1)x = 2 \sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}$, to se desna strana od (*) može napisati u obliku

$$\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} - i \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right).$$

Uvrstimo li to u (*) i izjednačimo realne i imaginarne dijelove, dobit ćemo

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$1 + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Oдавде lako slijedi

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Vrijede i malo općenitije formule

$$A = \sum_{k=0}^n \cos(\varphi + kx) = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cos \left(\varphi + \frac{nx}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$B = \sum_{k=0}^n \sin(\varphi + kx) = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \left(\varphi + \frac{nx}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}}.$$

To slijedi slično tako da se stavi $z = \cos x + i \sin x$, $c = \cos \varphi + i \sin \varphi$, pa u $A + iB = c + cz + \dots + cz^n = c \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ izjednačimo realne i imaginarne dijelove. ■

Primjer 3. Dokažite da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos k\varphi = 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \cos \frac{n\varphi}{2},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin k\varphi = 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \sin \frac{n\varphi}{2}.$$

Rješenje. Označimo redom te sume sa S_1 i S_2 i nađimo $S_1 + iS_2$. Imamo redom, koristeći Moivreovu formulu

$$S_1 + iS_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k.$$

Prema Newtonovoj binomnoj formuli dalje je

$$S_1 + iS_2 = (1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^n =$$

$$= 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)^n = 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{n\varphi}{2} + i \sin \frac{n\varphi}{2} \right).$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova slijedi

$$S_1 = 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \cos \frac{n\varphi}{2}, \quad S_2 = 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \sin \frac{n\varphi}{2}. \quad \blacksquare$$

Primjer 4. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right).$$

Rješenje. Stavimo u binomnu formulu

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

redom $x = 1, \varepsilon, \varepsilon^2$, gdje je $\varepsilon = \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ korijen jednadžbe $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. Dobivamo

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad (1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k, \quad (1+\varepsilon^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^{2k}.$$

Ako $3|k$, onda zbog $\varepsilon^2 = -1 - \varepsilon = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{\varepsilon}$ i $\varepsilon^3 = 1$ slijedi da je $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 0$, a ako $3 \nmid k$, onda je $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 3$, pa iz prethodnih jednakosti slijedi

$$2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 3 \sum_{\substack{k=0 \\ 3|k}}^n \binom{n}{k}. \quad (*)$$

Kako je $1 + \varepsilon = -\varepsilon^2 = -\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, $1 + \varepsilon^2 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$, iz Moivreove formule i (*), tada odmah slijedi tvrdnja. \blacksquare

Primjer 5. Izrazite $\sin^n \varphi$, $\cos^n \varphi$, $n \in \mathbb{N}$, pomoću sinusa i kosinusa višestrukih varijabli.

Rješenje. Pokazat ćemo da vrijedi

$$\begin{aligned} \cos^{2n} \varphi &= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \binom{2n}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} 2 \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)\varphi \right\}, \\ \sin^{2n} \varphi &= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \binom{2n}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k} 2 \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)\varphi \right\}, \\ \cos^{2n+1} \varphi &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} \cos(2n-2k+1)\varphi, \\ \sin^{2n+1} \varphi &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} \sin(2n-2k+1)\varphi. \end{aligned}$$

Dokažimo prvu jednakost. U tu svrhu stavimo $\cos \varphi = \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon^{-1})$, gdje je $\epsilon = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Tada je

$$\cos^{2n} \varphi = \frac{1}{2^{2n}} (\epsilon + \epsilon^{-1})^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \epsilon^{-k} \cdot \epsilon^{2n-k} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \epsilon^{2(n-k)},$$

tj.

$$\cos^{2n} \varphi = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \epsilon^{2(n-k)} + \binom{2n}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} \epsilon^{2(n-k)} \right\}.$$

Lako se vidi da je

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} \epsilon^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \epsilon^{-2(n-k)},$$

pa je

$$\cos^{2n} \varphi = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \binom{2n}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} (\epsilon^{2(n-k)} + \epsilon^{-2(n-k)}) \right\}.$$

Kako je $\epsilon^{2(n-k)} + \epsilon^{-2(n-k)} = 2 \cos 2(n-k)\varphi$, to je

$$\cos^{2n} \varphi = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \binom{2n}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} 2 \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)\varphi \right\}.$$

Druga se jednakost dobije tako da se u prvu umjesto φ stavi $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Treća i četvrta jednakost dokazuju se analogno. ■

Primjer 6. Dokažite da za $n \in \mathbb{N}$ vrijede identiteti

$$a) \quad x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right),$$

$$b) \quad x^{2n+1} - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1 \right),$$

$$c) \quad x^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1 \right),$$

$$d) \quad x^{2n+1} + 1 = (x + 1) \prod_{k=1}^n \left(x^2 + 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1 \right) = \\ = (x + 1) \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1 \right).$$

Rješenje.

a) Neka su $\epsilon_k = \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, 2n-1$ svi $2n$ -ti korijeni iz jedinice. Tada je $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_n = -1$, pa imamo

$$x^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (x - \epsilon_k) = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (x - \epsilon_k) \prod_{k=n+1}^{2n-1} (x - \epsilon_k).$$

Nadalje, očito je $\epsilon_{2n-k} = \bar{\epsilon}_k$, pa odavde dobivamo

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (x - \epsilon_k)(x - \bar{\epsilon}_k) = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (x^2 - (\epsilon_k + \bar{\epsilon}_k)x + \epsilon_k \bar{\epsilon}_k).$$

Kako je $\epsilon_k + \bar{\epsilon}_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n}$, $\epsilon_k \cdot \bar{\epsilon}_k = 1$, dobivamo dalje

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right).$$

c) Analogno kao u a) imamo rastav

$$x^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \epsilon_k)(x - \bar{\epsilon}_k),$$

gdje je $\epsilon_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Formule b) i d) dokazuju se analogno, s tim da se za posljednju jednakost u d) koristi

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} = -\cos \left(\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} \right) = -\cos \frac{2(n-k)\pi}{2n+1}.$$

Ostale detalje prepuštamo čitatelju. ■

Primjer 7. Dokažite

$$\text{a) } \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$$

$$\text{b) } \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n},$$

$$\text{c) } \prod_{k=1}^n \sin \frac{(2k-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n},$$

$$\text{d) } \prod_{k=1}^n \cos \frac{(2k-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n},$$

$$\text{e) } \prod_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{2n+1} = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}}, & n = 2m + 1 \\ \frac{(-1)^m}{2^{2m}}, & n = 2m \end{cases}$$

Rješenje.

a) Iz identiteta a) prethodnog primjera imamo

$$x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + x^2 + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right).$$

Odavde za $x = 1$ slijedi

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(4 \sin^2 \frac{k\pi}{n} \right) = 2^{2(n-1)} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n},$$

pa odatle dobivamo tvrdnju a).

- b) Nakon dijeljenja s $x - 1$ u formuli b) prethodnog primjera za $x = 1$ slijedi tvrdnja.
 c) Stavimo $x = 1$ u formulu c) prethodnog primjera.
 d) Stavimo $x = -1$ u formulu c) prethodnog primjera.
 e) Stavimo $x = i$ u formulu d) prethodnog primjera. ■

Primjer 8. Dokažite da je

$$A = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} - 4 \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

Rješenje. Stavimo $z = \sin \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} = e^{2\pi i/7}$. Tada zbog $\bar{z} = \frac{1}{z}$ slijedi

$$\sin \frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i} \frac{z^2 - 1}{z}, \quad \cos \frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \frac{z^2 + 1}{z},$$

pa odavde

$$\sin \frac{4\pi}{7} = \frac{1}{2i} \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right) = \frac{1}{2i} \frac{z^4 - 1}{z^2}, \quad \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{z^4 + 1}{z^2}.$$

Dalje je

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{4\pi}{7} = -\frac{\sin \frac{4\pi}{7}}{\cos \frac{4\pi}{7}} = -\frac{1}{i} \frac{z^4 - 1}{z^4 + 1}.$$

Kako je $z^7 = 1$, to je $z^4 = \frac{1}{z^3}$, pa je

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{i} \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1}.$$

Nadalje,

$$\sin \frac{\pi}{7} = \sin \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2i}(z^3 - \bar{z}^3) = \frac{1}{2i} \left(z^3 - \frac{1}{z^3} \right) = \frac{1}{2i} \frac{z^6 - 1}{z^3}.$$

Dakle je (koristimo opet $z^7 = 1$, tj. $z^9 = z^2$):

$$A = \frac{1}{i} \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1} - \frac{2}{i} \frac{z^6 - 1}{z^3} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-z^6 + z^3 - 2z^2 + 2}{z^3(z^3 + 1)}.$$

Kvadrat brojnika ovog izraza (koristeći da je $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$) je

$$(-z^6 + z^3 - 2z^2 + 2)^2 = -7z^6(z^3 + 1)^2.$$

Odavde izlazi $A^2 = 7$, pa zbog $A > 0$, $A = \sqrt{7}$. Tvrdnja se može dokazati i koristeći se formulom b) prethodnog primjera. ■

§ 6. Arkus funkcije

6.1. Definicija arkus funkcija. Osnovne relacije

Arkus funkcijama ili ciklometrijskim funkcijama zovemo inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija.

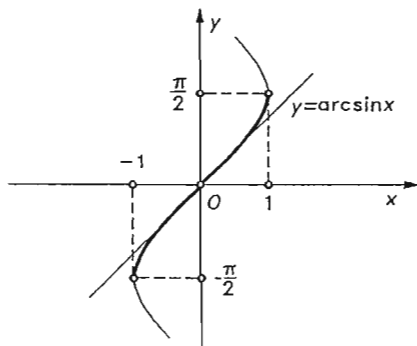
Za funkciju $y = \sin x$ inverzna se funkcija ne može definirati, jer sinus istu vrijednost iz svoje kodomene $[-1, 1]$ poprima za beskonačno mnogo vrijednosti iz domene \mathbb{R} , tj. ta funkcija nije bijekcija sa \mathbb{R} na $[-1, 1]$. Inverznu funkciju od $y = \sin x$ moguće je definirati samo na onim intervalima na kojima je ta funkcija monotona. To su intervali $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Na prvim od tih intervala sinus monotono raste od -1 do 1 , a na drugima monotono pada od 1 do -1 . Dakako da je unija tih segmenata čitav skup \mathbb{R} . Kako je funkcija $y = \sin x$ bijekcija sa svakog od tih intervala na skup $[-1, 1]$ to za restrikciju funkcije $y = \sin x$ na svaki od tih intervala postoji inverzna funkcija.

Promotrimo najprije restrikciju funkcije $y = \sin x$ na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Inverznu funkciju te restrikcije označavamo sa $y = \arcsin x$ i zovemo funkcijom arkus sinus.

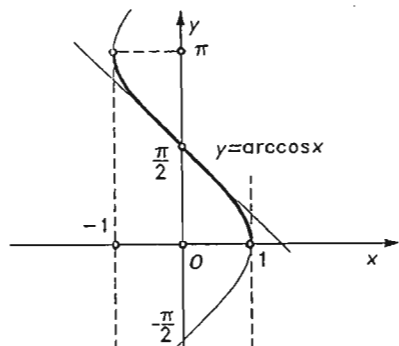
Drugim riječima, funkcija arkus sinus definirana je sa

$$\arcsin = \left(\sin \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}.$$

Graf te funkcije skiciran je na sl. 35. On se dobije tako da se graf funkcije $y = \sin x$ zrcali na pravcu $y = x$ (grafovi od f i f^{-1} simetrični su obzirom na pravac $y = x$) i uzme onaj njegov dio koji je zrcalna slika od $y = \sin x|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$. Na slici 35. on je deblje izvučen. Dakle, domena funkcije $y = \arcsin x$ je skup $[-1, 1]$, a kodomena $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ili, kraće, $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$, $\text{Im}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Naziv



Sl. 35.



Sl. 36.

je ta funkcija dobila od latinske riječi arcus, što znači luk, jer zapis $y = \arcsin x$ zapravo znači da je y luk kojemu je sinus jednak x . Uočite da je zapis $y = \arcsin x$ ekvivalentan sa zapisom $x = \sin y$. Tako je, na primjer, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ (jer je

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}), \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \arcsin 0 = 0, \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \text{ i } \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Iz definicije odmah slijedi da je funkcija $y = \arcsin x$ neparna, tj. vrijedi $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ (jer je $\sin(-x) = -\sin x$). Nadalje, ta je funkcija i neprekidna na segmentu $[-1, 1]$, jer je takva i funkcija $y = \sin x$.

Kako za funkcije f i f^{-1} vrijedi $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathcal{D}(f^{-1})}$, to je

$$\sin(\arcsin x) = x. \quad (1)$$

Formula (1) mogla bi dovesti da nedoumice; naime, moglo bi se pomisliti da je graf funkcije $y = \sin(\arcsin x)$ pravac $y = x$. Međutim, ta je kompozicija definirana samo na segmentu $[-1, 1]$, pa je graf restrikcija tog pravca na taj segment. Uočite da je $\sin(\arcsin x) \neq \arcsin(\sin x)$ i to zato jer je $\mathcal{D}(\arcsin(\sin)) = \mathbb{R}$. Kako izgleda graf ove funkcije, vidjet ćemo kasnije.

Definirajmo sada i funkciju $y = \arccos x$. Funkcija $y = \cos x$ na segmentu $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ monotono raste od -1 do 1 , a na segmentima $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, monotono pada od 1 do -1 . Unija tih segmenata je čitav skup \mathbb{R} . Restrikcija funkcije $y = \cos x$ na svaki od tih segmenata ima inverznu funkciju.

Funkcijom arkus kosinus zovemo funkciju definiranu sa

$$\arccos = (\cos|_{[0, \pi]})^{-1}.$$

Kao i prije, zapis $y = \arccos x$ ekvivalentan je sa zapisom $x = \cos y$. Iz tog je razloga, na primjer, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ (jer je $\cos \frac{\pi}{2} = 0$), $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ itd.

Graf funkcije $y = \arccos x$ prikazan je na sl. 36. i deblje je izvučen.

Iz definicije funkcije $y = \arccos x$ odmah slijedi da je $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$, $\text{Im}(\arccos) = [0, \pi]$. Nadalje, na segmentu $[-1, 1]$ ta je funkcija monotono padajuća. Kao i kod funkcije arcsin vidi se da je

$$\cos(\arccos x) = x. \quad (2)$$

Graf funkcije $y = \cos(\arccos x)$ je restrikcija pravca $y = x$ na segment $[0, \pi]$.

Nadalje vrijedi

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \quad (3)$$

To se vidi ovako. Prema (2) je

$$\cos(\arccos(-x)) = -x$$

i

$$\cos(\pi - \arccos(-x)) = -\cos(\arccos x) = -x,$$

dakle je

$$\cos(\arccos(-x)) = \cos(\pi - \arccos(-x)).$$

Kako je $\arccos(-x) \in [0, \pi]$, to je i $\pi - \arccos(-x) \in [0, \pi]$, a iz jednakosti kosinusa na segmentu $[0, \pi]$ slijedi jednakost argumenata, tj. vrijedi (3).

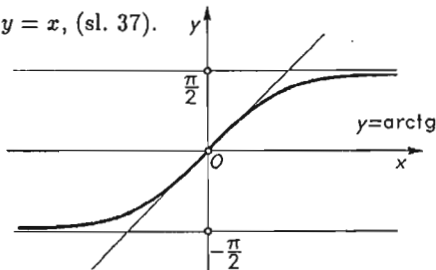
Dakle, funkcija $y = \arccos x$ nije ni parna ni neparna funkcija.

Slično se definira i funkcija $y = \operatorname{arctg} x$. Polazi se od funkcije $y = \operatorname{tg} x$. Točke $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ dijele skup \mathbf{R} na uzastopne intervale u kojima funkcija tangens monotono raste od $-\infty$ do $+\infty$. Restrikcija od $y = \operatorname{tg} x$ na svaki od intervala $\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle$ je monotono rastuća funkcija, pa je za svaku od tih restrikcija definirana njoj inverzna funkcija. Funkcijom arkus tangens zovemo funkciju

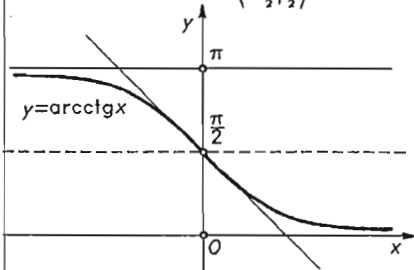
$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg} \Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle} \right)^{-1}.$$

Iz svojstava inverzne funkcije i funkcije $y = \operatorname{tg} x$ slijedi da je funkcija $y = \operatorname{arctg} x$ definirana i monotono rastuća na čitavom skupu \mathbf{R} i da je interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ njezina kodomena, dakle $\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbf{R}$, $\operatorname{Im}(\operatorname{arctg}) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Graf te funkcije dobije se zrcaljenjem grafa funkcije $y = \operatorname{tg} x \Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$ na pravcu $y = x$, (sl. 37).



Sl. 37.



Sl. 38.

Kako su $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$ asimptote funkcije $y = \operatorname{tg} x$, to su pravci $y = -\frac{\pi}{2}$ i $y = \frac{\pi}{2}$ asimptote funkcije $y = \operatorname{arctg} x$. Točnije rečeno, vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Kako je $y = \operatorname{tg} x \Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$ neprekidna funkcija koja monotono preslikava interval na \mathbf{R} , to je i njoj inverzna funkcija $y = \operatorname{arctg} x$ neprekidna na \mathbf{R} .

Kako su zapisi $y = \operatorname{arctg} x$ i $x = \operatorname{tg} y$ ekvivalentni, to je npr. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ (jer je $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$), $\operatorname{arctg} 0 = 0$ itd.

Funkcija $y = \operatorname{arctg} x$ je neparna funkcija, tj. vrijedi

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,$$

a to je posljedica činjenice da je $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} x$.

Nadalje vrijedi

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x. \quad (4)$$

Ovdje valja napomenuti da se graf funkcije $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ podudara s grafom funkcije $y = x$ i da je $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \neq \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, o čemu će kasnije biti riječi.

Analogno se definira i funkcija **arcus kotangens** sa

$$\operatorname{arcctg} = (\operatorname{ctg} |_{(0, \pi)})^{-1}.$$

Njen graf se dobiva zrcaljenjem funkcije $y = \operatorname{ctg} x |_{(0, \pi)}$ na pravcu $y = x$ (sl. 38). Iz definicije slijedi da je $\mathcal{D}(\operatorname{arcctg}) = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}(\operatorname{arcctg}) = (0, \pi)$.

Kako su pravci $x = 0$ i $x = \pi$ asimptote funkcije $y = \operatorname{ctg} |_{(0, \pi)}$, to su pravci $y = 0$ i $y = \pi$ asimptote funkcije $y = \operatorname{arcctg} x$, točnije vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

Nadalje, $y = \operatorname{arcctg} x$ je neprekidna funkcija, i to monotono padajuća na čitavom skupu \mathbb{R} .

Zapisi $y = \operatorname{arcctg} x$ i $x = \operatorname{ctg} y$ su ekvivalentni, pa je stoga npr. $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$ (jer je $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$), $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ itd.

Slično kao i kod funkcije $y = \operatorname{arccos} x$ dokazuje se da vrijedi

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \quad (5)$$

pa stoga $y = \operatorname{arcctg} x$ nije ni parna ni neparna funkcija.

Iz definicije te funkcije slijedi da je

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad (6)$$

ali je $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) \neq x$.

Iz (6) slijedi da je graf funkcije $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$ čitav pravac $y = x$.

Napomena 1. Ako je x realan broj, $-1 \leq x \leq 1$, onda se skup svih $y \in \mathbb{R}$ za koje je $x = \sin y$ označava sa $\operatorname{Arcsin} x$, dakle $\operatorname{Arcsin} x = \{y \mid x = \sin y, -1 \leq x \leq 1\}$. Tako se dobije višeznačna (zapravo beskonačnoznačna) funkcija $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$, koja se označuje sa $y = \operatorname{Arcsin} x$. Vrijednost $y_0 = \operatorname{arcsin} x$ zove se glavna vrijednost funkcije $y = \operatorname{Arcsin} x$ za vrijednost argumenta x . Prema tome je $\operatorname{Arcsin} x = \{(-1)^k \operatorname{arcsin} x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Analogno se definiraju višeznačne funkcije

$$y = \operatorname{Arccos} x, \quad y = \operatorname{Arctg} x, \quad y = \operatorname{Arcctg} x.$$

Napomena 2. Katkada je zgodno koristiti i izvedene funkcije $y = \operatorname{arcsec} x$ i $y = \operatorname{arccosec} x$. Promotrimo npr. funkciju $y = \operatorname{arccosec} x$. Kako je $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, to se promatrana funkcija $y = \frac{1}{\sin} |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ i njoj inverzna funkcija definira kao $\operatorname{arccosec}$.

Primjer 1. Dokažite da funkcija

$$f(x) = x - [x] + \operatorname{arctg} x$$

nije periodička.

Rješenje. Dovoljno je pokazati da postoje dvije različite vrijednosti varijable x , recimo $x = a$, $x = b$, $a \neq b$ takve da jednadžbe

$$f(a+p) = f(a),$$

$$f(b+p) = f(b),$$

nemaju zajednički korijen, osim $p = 0$.

Uzmimo da je $a = 0$ i $b = -p$. Tada jednadžbe glase

$$p + [p] + \operatorname{arctg} p = 0,$$

$$-p + [-p] + \operatorname{arctg}(-p) = 0.$$

Kako je $\operatorname{arctg}(-p) = -\operatorname{arctg} p$, to iz ovih jednadžbi slijedi

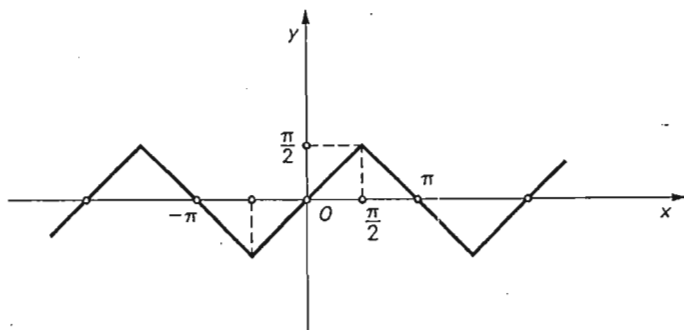
$$[p] + [-p] = 0.$$

Oдавde slijedi $p = k$, $k \in \mathbb{Z}$, no u tom je slučaju $[p] = p$, pa iz prve od navedenih jednadžbi dobivamo $\operatorname{arctg} p = 0$, pa je $p = 0$ i tvrdnja je dokazana. ■

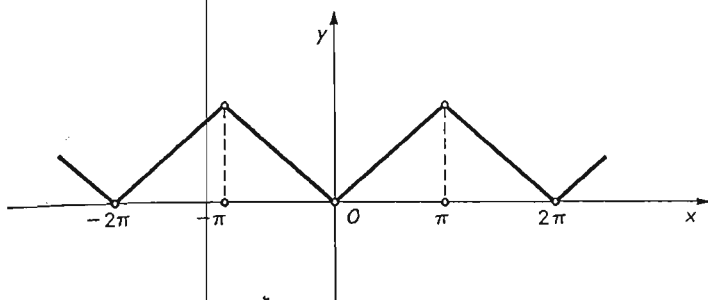
Kako su \arcsin i \sin inverzne funkcije, to bismo očekivali da je $\arcsin(\sin x) = x$. Međutim, nije tako. Kako je \sin periodička funkcija s periodom 2π , to je takva i funkcija $y = \arcsin(\sin x)$. Stoga je dovoljno ispitati tok te funkcije na segmentu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ako je $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, onda je očito $y = x$.

Za $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ je $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pa je $y = \pi - x$. Za $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ je $y = x - 2\pi$. Za $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$ je $y = -\pi - x$, a za $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right]$ je $y = x + 2\pi$.



Sl. 39.



Sl. 40.

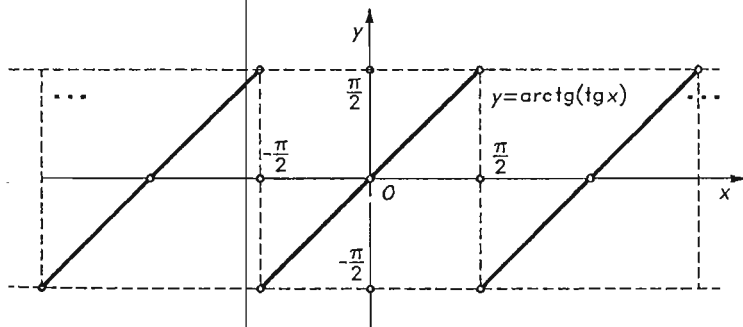
Dakle je

$$y = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2k\pi, & x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \\ (\pi - x) + 2k\pi, & x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]. \end{cases}$$

Graf te funkcije nacrtan je na sl. 39.

Na isti se način zaključuje da se graf funkcije $y = \arccos(\cos x)$ na segmentu $[0, \pi]$ podudara s grafom pravca $y = x$, na segmentu $[\pi, 2\pi]$ s grafom pravca $y = 2\pi - x$, na segmentu $[2\pi, 3\pi]$ s grafom od $y = x - 2\pi$ itd. Graf te funkcije prikazan je na sl. 40.

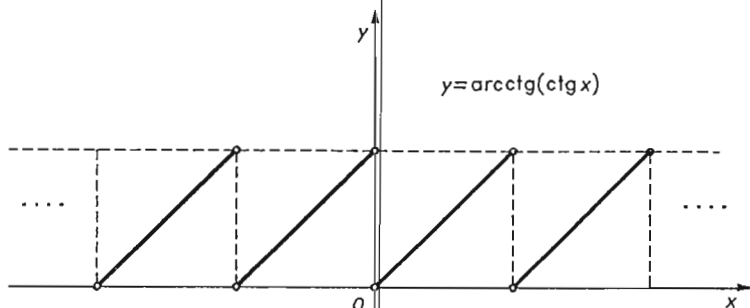
Slično se za funkciju $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ pokazuje da se ona na segmentu $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ podudara s grafom pravca $y = x - k\pi$ (dokažite to!) pa njezin graf izgleda kao na sl. 41.



Sl. 41.

Funkcija $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ ima u točkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$ prekide. U tim točkama postoje lijevi i desni limesi, ali se oni ne podudaraju, naime očito je

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x = \frac{\pi}{2}$$



Sl. 42.

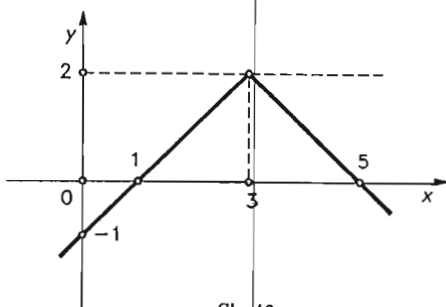
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \arctg(\operatorname{tg} x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (x - \pi) = -\frac{\pi}{2}.$$

Pokažite sami da graf funkcije $y = \arctg(\operatorname{ctg} x)$ izgleda kao na sl. 42.

Sada nije teško odrediti i ostale kompozicije trigonometrijskih i arkus funkcija. Pokažimo to na primjerima.

Primjer 2. Odredite neku parnu funkciju, koja se na segmentu $[2, 5; 4, 5]$ podudara s funkcijom $y = 2 - |x - 3|$.

Rješenje. Nacrtajmo najprije graf funkcije $y = 2 - |x - 3|$ (sl. 43) i promotrimo



Sl. 43.

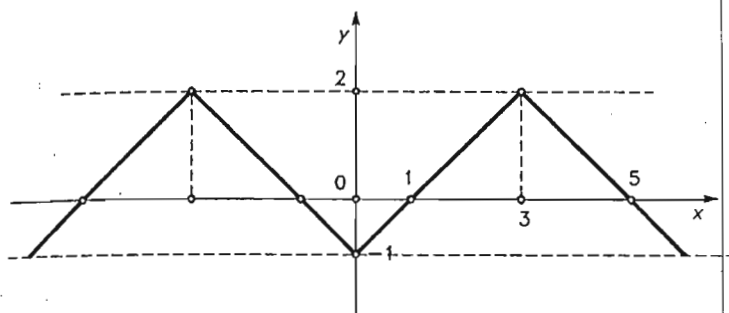
parnu funkciju nacrtanu na sl. 44. Te se dvije funkcije očito podudaraju na segmentu $[2, 5; 4, 5]$. Graf te funkcije podsjeća nas na graf funkcije $y = \arccos(\cos x)$. Lako se vidi da se funkcija nacrtana na sl. 44. dobije tako da se $y = \arccos(\cos x)$ pomnoži sa $\frac{3}{\pi}$ i zatim translirira u negativnom smjeru osi y za 1. Dakle, funkcija

$$y = \frac{3}{\pi}(\arccos(\cos x)) - 1$$

je parna i podudara se s funkcijom $y = 2 - |x - 3|$ na segmentu $[2, 5; 4, 5]$. ■

Primjer 3. Dokažite da vrijedi

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$



Sl. 44.

Rješenje. Pođimo od identiteta

$$\cos t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

i stavimo $t = \arcsin x$. Tada dobivamo

$$\cos(\arcsin x) = \pm \sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2},$$

odatle, zbog $\sin(\arcsin x) = x$, slijedi

$$\cos(\arcsin x) = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Kako je kodomena funkcije $y = \arcsin x$ segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a na tom segmentu je funkcija $y = \cos x$ pozitivna, to u prethodnoj jednakosti treba uzeti predznak + i tvrdnja je dokazana. ■

Primjer 4. Dokažite da vrijedi

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Rješenje. Najprije je

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}.$$

Kako je $\sin(\arcsin x) = x$, a prema prethodnom primjeru $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, to odmah slijedi tvrdnja. ■

Primjer 5. Dokažite da je

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Rješenje. Stavimo li u

$$\sin t = \pm \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}$$

$t = \operatorname{arctg} x$, dobit ćemo

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \pm \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2}}.$$

Odatve, slično kao u prethodnim primjerima, slijedi tvrdnja. ■

6.2. Adicioni teoremi za arkus funkcije

Adicioni teoremi izražavaju zbroj (ili razliku) dviju (ili nekoliko) arkus funkcija pomoću jedne arkus funkcije.

Objasnimo ih na primjerima.

Primjer 6. Neka se zbroj $\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4}$ izrazi pomoću arkussinusa.

Rješenje. Stavimo

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4}$$

i $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$, $\beta = \arcsin \frac{1}{4}$. Očito je $\alpha < \frac{\pi}{4}$ (jer je $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$). Slično je i $\beta < \frac{\pi}{4}$, pa je stoga $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Nadalje je

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} \right) = \\ &= \sin \left(\arcsin \frac{1}{3} \right) \cos \left(\arcsin \frac{1}{4} \right) + \cos \left(\arcsin \frac{1}{3} \right) \sin \left(\arcsin \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Zbog formule $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ slijedi

$$\sin \varphi = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15} + 2\sqrt{2}}{12},$$

pa iz ove jednakosti zbog $\varphi < \frac{\pi}{2}$ slijedi

$$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{15} + 2\sqrt{2}}{12},$$

dakle je konačno

$$\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15} + 2\sqrt{2}}{12}. \quad \blacksquare$$

Primjer 7. Neka se zbroj $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 3$ izrazi pomoću jednog arkustangensa.

Rješenje. Stavimo opet $\varphi = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 3$. Tada je

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 3) = \frac{1+3}{1-3} = -2.$$

Kako je $-2 \in \left\langle -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right\rangle$, a u tom intervalu je $\operatorname{arctg} x = x + \pi$, to je $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi) = \pi - \operatorname{arctg} 2$. Dakle je

$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 3 = \pi - \operatorname{arctg} 2. \quad \blacksquare$$

Dokažimo sada i adicioni teorem za funkciju arkussinus:

TEOREM 1. *Vrijedi*

$$\arcsin x + \arcsin y =$$

$$= \begin{cases} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & xy \leq 0 \text{ ili } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & x > 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & x < 0, y < 0, x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Dokaz: Da to dokažemo, stavimo $\varphi = \arcsin x + \arcsin y$. Po definiciji arkus-sinusa je

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2},$$

pa odavde je

$$-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \pi.$$

Sada razlikujemo tri slučaja:

$$\text{a) } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{b) } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi, \quad \text{c) } -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}.$$

a) Ako su x i y različitih predznaka ili ako je bar jedan od njih jednak nuli, onda smo u slučaju a). To slijedi iz činjenice da $0 \leq x \leq 1$ i $-1 \leq y \leq 0$ povlači

$$0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq 0,$$

pa je odavde $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Znači, ako su x i y različitih predznaka, tj. ako je $xy \leq 0$, onda smo u slučaju a). Pogledajmo sada što je ako je $x > 0$ i $y > 0$. U tom je slučaju ili

$$0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ili} \quad \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi.$$

Drugu nejednakost ne moramo razmatrati jer je to slučaj b). Sada prva od tih nejednakosti povlači $\cos \varphi \geq 0$, tj. imamo da je (koristeći adicioni teorem)

$$\cos \varphi = \cos(\arcsin x + \arcsin y) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy \geq 0,$$

ili

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \geq xy,$$

tj. $x^2 + y^2 \leq 1$.

Ako je pak $x < 0$ i $y < 0$, tada u slučaju a) vrijedi

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y < 0,$$

pa je $(-x)^2 + (-y)^2 \leq 1$, dakle opet $x^2 + y^2 \leq 1$.

Dakle, slučaj a) nastupa kada je ili $xy \leq 0$ ili $x^2 + y^2 \leq 1$.

Kako je u slučaju a) $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, to je

$$\sin \varphi = \sin(\arcsin x + \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}, \quad (*)$$

pa je

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}),$$

za $xy \leq 0$ ili $x^2 + y^2 \leq 1$.

b) U ovom je slučaju $x > 0, y > 0$, tj. vrijedi $\cos \varphi < 0$, a to, slično kao i slučaju a), povlači $x^2 + y^2 > 1$. U ovom slučaju zbog $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ iz (*) slijedi

$$\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right).$$

c) Ovaj slučaj nastupa za $x < 0, y < 0$, i tada je

$$-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2},$$

pa je

$$\pi \geq \arcsin(-x) + \arcsin(-y) > \frac{\pi}{2},$$

pa slijedi da je i $x^2 + y^2 > 1$.

Zbog $\varphi \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ iz (*) slijedi da za $x > 0, y > 0$ i $x^2 + y^2 > 1$ vrijedi

$$\arcsin x + \arcsin y = -\pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right),$$

Ovim je adicioni teorem za funkciju arkussinus dokazan. ■

KOROLAR 1. *Vrijedi*

$$\begin{aligned} \arcsin x - \arcsin y &= \\ &= \begin{cases} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), & xy \geq 0 \text{ ili } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), & x > 0, y < 0, x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), & x < 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dokaz. Dokaz slijedi iz Teorema 1. zamjenom y sa $-y$. ■

Analogno se dokazuju ovi teoremi.

TEOREM 2. *Vrijedi*

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos \left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right), & x + y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right), & x + y < 0. \end{cases}$$

KOROLAR 2. *Vrijedi*

$$\arccos x - \arccos y = \begin{cases} -\arccos \left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right), & x \geq y \\ \arccos \left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right), & x < y. \end{cases}$$

Dokaz. Zamijeni se y sa $-y$ u teoremu i koristi

$$\arccos \left(-xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right) = \pi - \arccos \left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right). \quad \blacksquare$$

TEOREM 3. Vrijedi

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & xy < 1 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & x > 0, xy > 1 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & x < 0, xy > 1. \end{cases}$$

KOROLAR 3. Vrijedi

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & xy > -1 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & x > 0, xy < -1 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & x < 0, xy < -1. \end{cases}$$

Pokažimo sada kako se primjenjuju adicioni teoremi.

Primjer 8. Dokažite da je

$$\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Rješenje. Kako je $\sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$, to prema drugoj formuli u Korolaru 2 imamo

$$\begin{aligned} \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} &= \\ = \arccos \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} + \sqrt{1-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\right)^2} \right) &= 2\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11\pi}{6}. \end{aligned}$$

Primjer 9. Odredite zbroj

$$S_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}.$$

Rješenje. Imamo redom prema prvoj formuli Teorema 3:

$$S_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 2^2} = \operatorname{arctg} \frac{2}{3},$$

$$S_3 = S_2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 2^3} = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 2^3} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

Odavde naslućujemo da je

$$S_k = \operatorname{arctg} \frac{k}{k+1}.$$

Dokažimo to indukcijom. Za $k = 1$ to je istina. Dalje je

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \operatorname{arctg} \frac{k}{k+1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2(k+1)^2} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)^2}}{1 - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{2(k+1)^2}} = \operatorname{arctg} \frac{k+1}{k+2}, \end{aligned}$$

pa je zaista

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}. \quad \blacksquare$$

Primjer 10. Skicirajte graf funkcije

$$y = \arccos x + \arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}.$$

Rješenje. Prema Korolaru 2. vrijedi

$$\arccos x - \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos x - \frac{\pi}{4} = \begin{cases} -\arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}, & x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}, & x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

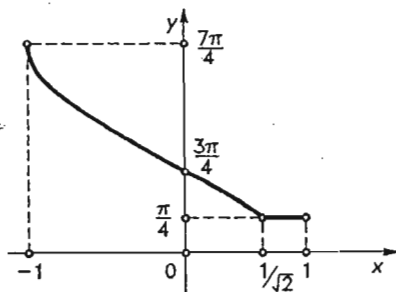
Oдавde je

$$\arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \begin{cases} -\arccos x + \frac{\pi}{4}, & x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \arccos x - \frac{\pi}{4}, & x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

pa je

$$y = \begin{cases} 2 \arccos x - \frac{\pi}{4}, & x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\pi}{4}, & x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Područje definicije zadane funkcije je $[-1, 1]$.



Sl. 45.

Iz dobivenog rezultata slijedi da se ta funkcija na segmentu $\left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ podudara s grafom funkcije $y = 2 \arccos x - \frac{\pi}{4}$, a na segmentu $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ s grafom funkcije $y = \frac{\pi}{4}$. Maksimum funkcija ima za $x = -1$, i on je jednak $\frac{7\pi}{4}$. Graf te funkcije je skiciran na sl. 45.

6.3. Čebiševljevi polinomi

Čebiševljevi polinomi¹ definirani su formulom

$$T_n(x) = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4}(1-x^2)^2 - \dots, n \in 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Pokazat ćemo sada da se na intervalu $[-1, 1]$ oni podudaraju s funkcijom $\cos(n \arccos x)$. Ta činjenica omogućuje da se nađu neka njihova svojstva.

U tu svrhu pođimo od jednakosti (§ 5, Primjer 1):

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots$$

i uvrstimo u nju $\alpha = \arccos x$. Dobivamo

$$\begin{aligned} \cos(n \arccos x) &= \cos^n(\arccos x) - \binom{n}{2} \cos^{n-2}(\arccos x) \sin^2(\arccos x) + \\ &+ \binom{n}{4} \cos^{n-4}(\arccos x) \sin^4(\arccos x) - \dots \end{aligned}$$

Kako je $\cos(\arccos x) = x$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, to iz prethodne jednakosti slijedi

$$\cos(n \arccos x) = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4}(1-x^2)^2 - \dots,$$

pa je zaista

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \quad (10)$$

TEOREM 4. Za Čebiševljeve polinome vrijedi rekurzivna formula

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Dokaz. U identitet

$$\cos(n+1)\alpha = 2 \cos n\alpha \cos \alpha - \cos(n-1)\alpha$$

¹Katkad se još zovu i Čebiševljevi polinomi prve vrste. Pafnutij L. Čebišev (1821 - 1894), ruski matematičar.

stavimo $\alpha = \arccos x$. Dobivamo

$$\cos((n+1)\arccos x) = 2\cos(n\arccos x)\cos(\arccos x) - \cos((n-1)\arccos x),$$

pa slijedi da na segmentu $[-1, 1]$ vrijedi (11). ■

Koristeći se rekurzivnom formulom (11) možemo vrlo brzo odrediti te polinome. Najprije je

$$T_0(x) = \cos(0 \cdot \arccos x) = 1, \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

Koristeći (11) redom nalazimo

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 2xT_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \end{aligned}$$

itd.

TEOREM 5. Polinom $T_n(x)$ ima točno n različitih realnih nultočaka i sve su nultočke sadržane u intervalu $(-1, 1)$.

Dokaz. Iz (10) slijedi da $T_n(x) = 0$ povlači

$$n \arccos x = \frac{2k-1}{2}\pi,$$

a odavde je

$$x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

Uvrštavajući redom $k = 1, 2, \dots, n$, dobivamo n različitih nultočaka

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi.$$

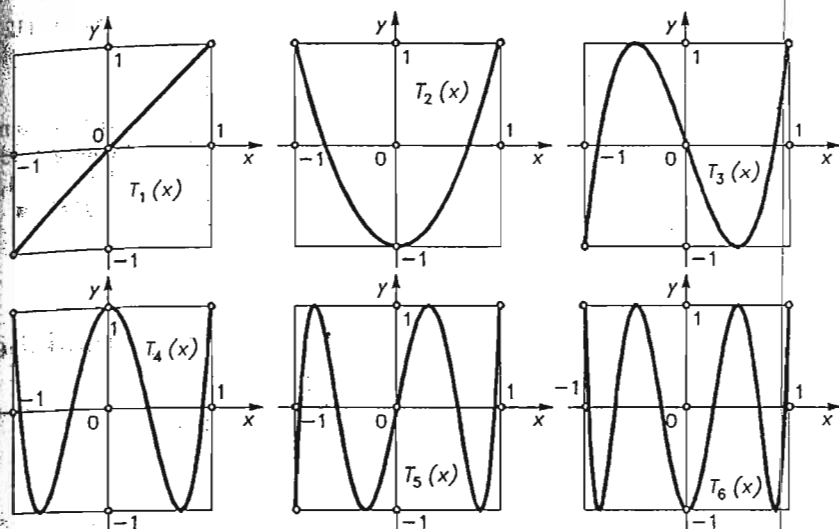
Polinom ne može imati još nultočaka osim onih koje su ovdje navedene jer je $T_n(x)$ polinom n -tog stupnja. Kako je kodomena funkcije kosinus segment $[-1, 1]$, to su svi x_k u intervalu $(-1, 1)$. ■

Na sl. 46. skicirani su grafovi prvih šest Čebiševljevih polinoma. Čebišev je postavio i riješio sljedeći problem: od svih polinoma

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

naći onaj koji na zadanom segmentu ima najmanji otklon od nule, tj. onaj za kojeg je apsolutna vrijednost polinoma najmanja. Polinomi tog svojstva imaju važnu ulogu u analizi i njezinim primjenama.

Čebiševljevi polinomi rješavaju taj problem za segment $[-1, 1]$, tj. vrijedi



Sl. 46.

TEOREM 6. *Od svih normiranih polinoma n -tog stupnja najmanji otklon od nule na segmentu $[-1, 1]$ ima polinom*

$$\bar{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Dokaz. Iz (9) razabiremo da je vodeći koeficijent polinoma $T_n(x)$ jednak

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1},$$

pa je vodeći koeficijent od $\bar{T}_n(x)$ jednak 1. Kako je kodomena od $T_n(x) = \cos(\arccos x)$ segment $[-1, 1]$, to je otklon polinoma $\bar{T}_n(x)$ na tom segmentu jednak $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Tvrđnju teorema dokazujemo kontradikcijom. Pretpostavimo da postoji normirani polinom $f(x)$ stupnja n kojemu je otklon na segmentu $[-1, 1]$ manji od $\frac{1}{2^{n-1}}$. Prema pretpostavci je

$$-\frac{1}{2^{n-1}} < f(x) < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (12)$$

Uzmimo točke $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$. U tim je točkama

$$\bar{T}_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}. \quad (13)$$

Promotrimo polinom $g(x) = \bar{T}_n(x) - f(x)$. Očito je $\text{st } g \leq n - 1$. Prema (12) i (13) je

$$g(x_0) > 0, g(x_1) < 0, g(x_2) > 0, \dots$$

Segment $[-1, 1]$ je točkama x_k rastavljen na n uzastopnih segmenata. Uzmimo jedan od njih, npr. $[x_{i+1}, x_i]$. Kako je $g(x_i) = -g(x_{i+1})$, to polinom g u tom segmentu ima bar jednu nultočku, pa g ima više od n nultočaka, a $\text{st } g \leq n - 1$, a to je nemoguće. Dakle, g mora biti nulpolinom, pa mora biti $\bar{T}_n(x) = f(x)$. ■

§ 7. Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe. Sustavi trigonometrijskih jednadžbi

7.1. Trigonometrijske jednadžbe

Trigonometrijskim jednadžbama zovemo jednadžbe oblika $f(\sin x, \cos x) = 0$, gdje je f bilo koja realna funkcija dviju varijabli. Primjeri takvih jednadžbi jesu $\text{tg } x = 3$, $\sin x - \cos x = 1$, $\text{tg } x + \text{ctg } x = 2$ itd. Prvoj od tih jednadžbi odgovarajuća funkcija f ima oblik $f(u, v) = \frac{u}{v} - 3$, za drugu jednadžbu je $f(u, v) = u - v - 1$, a za treću $f(u, v) = \frac{(u - v)^2}{uv}$.

Na primjer, jednadžbe $x + \cos x = 1$, $2^{\sin x} + 3^{\text{tg } x} = 1$ su također trigonometrijske. Jednadžbe ovoga tipa zovemo transcendentnim i one općenito nisu rješive elementarnim metodama.

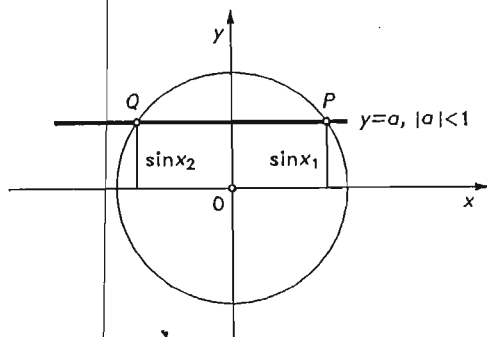
Rješavanje trigonometrijskih jednadžbi svodi se na jednadžbe oblika

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \text{tg } x = a, \quad \text{ctg } x = a, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Riješimo prvu od tih jednadžbi. Kako je $\text{Im}(\sin) = [-1, 1]$, to ona ima rješenje ako i samo ako je $|a| \leq 1$. Za $|a| > 1$ prva jednadžba nema rješenja. Uzmimo trigonometrijsku kružnicu i presijecimo je pravcem $y = a$, $|a| < 1$. Taj pravac siječe kružnicu u dvije točke P, Q (sl. 47) kojima su na njoj pomoću funkcije namatanja E pridruženi realni brojevi x_1 i $x_2 = \pi - x_1$ za koje je $\sin x_1 = a$ i $\sin x_2 = a$. Kako je sinus periodička funkcija, to sva rješenja jednadžbe $\sin x = a$ možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} x_1 &= \arcsin a + 2k\pi, & k &\in \mathbb{Z} \\ x_2 &= \pi - \arcsin a + 2k\pi, & k &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Na sl. 47. nacrtan je slučaj $0 < a < 1$. Ako je $-1 < a < 0$, to zbog neparnosti funkcije arkussinus slijedi da i u tom slučaju navedene formule predstavljaju rješenja promatrane jednadžbe. U slučaju $a = \pm 1$ je $x_1 = x_2$.



Sl. 47.

Uobičajeno je ove dvije formule zapisati jedinstvenom formulom

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Na isti se način nalaze sva rješenja jednadžbi $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ i $\operatorname{ctg} x = a$.
Dobivene rezultate možemo sažeti u tablicu.

Jednadžba	Sva rješenja
$\sin x = a$	$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, k \in \mathbf{Z}, a \leq 1$ nema rješenja za $ a > 1$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, a \leq 1$ nema rješenja za $ a > 1$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbf{Z}, a \in \mathbf{R}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbf{Z}, a \in \mathbf{R}$

Provjerite navode u tablici!

Primjer 1. Riješite jednadžbu

$$\sin(3x - 1) = -\frac{1}{2}.$$

Rješenje. Stavimo li $t = 3x - 1$, dobivamo

$$\sin t = -\frac{1}{2},$$

pa je

$$t = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi,$$

odnosno

$$t = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Dalje iz

$$3x - 1 = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi$$

slijedi da su sva rješenja zadane jednadžbe dana sa

$$x = \frac{1}{3} \left((-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi + 1 \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Primjer 2. Riješite jednadžbu

$$\cos 3^x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rješenje. Stavimo li $3^x = t$, dobivamo

$$\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

pa je

$$t = \pm \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

dakle

$$t = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

odnosno

$$3^x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Kako je uvijek $3^x > 0$, to će ova jednadžba imati rješenje samo ako je $k \in \mathbb{N}$ i jedno rješenje za $k = 0$. Stoga dobivamo

$$x = \log_3 \left(\pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{N}, \text{ te } x = \log_3 \frac{\pi}{6}. \quad \blacksquare$$

Primjer 3. Riješite jednadžbu

$$\operatorname{tg}(\sin x) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rješenje. Iz ove jednadžbe slijedi

$$\sin x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Ova jednadžba ima rješenje samo ako je

$$\left| \frac{\pi}{6} + k\pi \right| \leq 1,$$

tj. samo ako je $k = 0$. Dakle je

$$\sin x = \frac{\pi}{6}, \quad \sin x = -\frac{5\pi}{6}.$$

Konačno dobivamo

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{\pi}{6} + k\pi,$$

odnosno

$$x = (-1)^k \cdot 0,55107 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Jedna od najdjelotvornijih metoda rješavanja trigonometrijskih jednadžbi jest da se one raznim trigonometrijskim transformacijama svedu na jednadžbe oblika

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_r(x) = 0$$

gdje su $f_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, r$ trigonometrijske jednadžbe tipa (1). Skup svih rješenja jednadžbi $f_i(x) = 0$ ujedno je i skup svih rješenja zadane jednadžbe.

Ilustrirajmo to na primjerima.

Primjer 4. Riješite jednadžbu

$$\sin x + \sin 2x = 0.$$

Rješenje. Zbog $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ovu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\sin x(1 + 2 \cos x) = 0.$$

Odavde je $\sin x = 0$ ili $1 + 2 \cos x = 0$. Rješenje prve jednadžbe je $x_1 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a druge $x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, i to su sva rješenja zadane jednadžbe. Dakle, skup svih rješenja

$$\text{je } \left\{ k\pi, \pm \frac{2\pi}{3} + 2l\pi \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}. \blacksquare$$

Primjer 5. Riješite jednadžbu

$$\cos x + \cos 4x + \cos 7x = 0.$$

Rješenje. Kako je, prema formuli za zbroj kosinusa,

$$\cos x + \cos 7x = 2 \cos 4x \cdot \cos 3x,$$

to zadanu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\cos 4x \cdot (1 + 2 \cos 3x) = 0,$$

pa slijedi

$$\cos 4x = 0, \quad 1 + 2 \cos 3x = 0.$$

Rješenje prve jednadžbe je

$$x_1 = \frac{(2k+1)\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ a druge } x_2 = \frac{(6l \pm 1)\pi}{9}, \quad l \in \mathbb{Z},$$

i to su sva rješenja zadane jednadžbe. \blacksquare

Primjer 6. Riješite jednadžbu

$$\sin 2x = \cos 3x.$$

Rješenje. Napišimo jednadžbu u obliku

$$\sin 2x - \sin \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) = 0.$$

Primjenom formule za razliku sinusa dobivamo

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

tj.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Rješenja ovih jednadžbi su

$$x_1 = \frac{(4k-1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = \frac{(4l+1)\pi}{10}, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Kod rješavanja trigonometrijskih jednadžbi (slično kao i kod iracionalnih) često se događa da se pojave tzv. "sporedni" korijeni. Zato uvijek treba provjeriti jesmo li upotrijebljenim transformacijama zaista dobili jednadžbu ekvivalentnu sa zadanom. Pokažimo to na primjerima.

Primjer 7. Riješite jednadžbu

$$\frac{\cos 3\pi x}{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \pi x} = 0.$$

Rješenje. Iz ove jednadžbe slijedi $\cos 3\pi x = 0$, tj. $3\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, tj. $x = \frac{1+2k}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$. Međutim, funkcije $f_1(x) = \cos 3\pi x$ i $f_2(x) = \frac{\cos 3\pi x}{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \pi x}$ nemaju iste domene.

Funkcija $x \mapsto \operatorname{tg} \pi x$ nije definirana u točkama za koje je $\pi x = \frac{\pi}{2} + l\pi$, tj. $x = \frac{2l+1}{2}$, $l \in \mathbb{Z}$, pa u tim točkama nije definirana ni funkcija f_2 . Nadalje, funkcija f_2 nije definirana ni u točkama za koje je $1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \pi x = 0$, dakle za $x = \frac{6l-1}{6}$, $l \in \mathbb{Z}$.

Dakle, zadana jednadžba nije ekvivalentna s jednadžbom $\cos 3\pi x = 0$, pa zato iz skupa $x = \frac{1+2k}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$ svih rješenja treba izdvojiti rješenja $x = \frac{2l+1}{2}$ i $x = \frac{6l-1}{2}$, $l \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Iz} \quad \frac{1+2k}{6} = \frac{2l+1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{1+2k}{6} = \frac{6l-1}{2}$$

slijedi $k = 3l + 1$ i $k = 3l - 1$. Dakle, rješenja polazne jednadžbe su samo ona rješenja jednadžbe $\cos 3\pi x = 0$ za koje je $k = 3l$. Prema tome, skup svih rješenja je

$$x = \frac{1+6l}{6}, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Primjer 8. Riješite jednadžbu

$$\sin x \cdot \sin 3x = \sin 5x \cdot \sin 7x.$$

Rješenje. Ovdje je zgodno primijeniti formulu koja produkt sinusa izražava u obliku razlike kosinusa. Dakle,

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \sin 3x &= \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x), \\ \sin 5x \cdot \sin 7x &= \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 12x), \end{aligned}$$

pa se zadana jednadžba može napisati u obliku

$$\cos 4x - \cos 12x = 0.$$

Primijenimo li sada formulu za razliku kosinusa, slijedi

$$\sin 8x \cdot \sin 4x = 0,$$

pa mora biti

$$\sin 8x = 0, \quad \sin 4x = 0.$$

Rješenje prve jednadžbe je $x_1 = \frac{k\pi}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$, a druge $x_2 = \frac{l\pi}{4}$. Stavimo li $l = 2k$, razabiremo da su sva rješenja druge jednadžbe sadržana u skupu rješenja prve, pa su sa $x = \frac{k\pi}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$ dana sva rješenja zadane jednadžbe. ■

Prímjér 9. Riješite jednadžbu

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Rješenje. Na lijevu stranu jednadžbe primijenimo adicioni teorem, a desnu stranu faktoriziramo (suma kubova) i dobijemo

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x),$$

odnosno

$$(\sin x + \cos x) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sin x \cos x \right) = 0,$$

tj.

$$\sin x + \cos x = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{2} \sin 2x = 0.$$

Iz prve jednadžbe je $\operatorname{tg} x = -1$, pa je $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a iz druge slijedi

$$x_2 = \frac{(-1)^l}{2} \arcsin(2 - \sqrt{2}) + \frac{1}{2}l\pi, \quad l \in \mathbb{Z},$$

to su sva rješenja zadane jednadžbe. ■

Druga metoda rješavanja trigonometrijskih jednadžbi je metoda supstitucije kojom se jednadžba transformira u algebarsku jednadžbu. Tu, prije svega, treba spomenuti tzv. univerzalnu supstituciju, koja je dana sa

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Kako je

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

dobivamo

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (3)$$

Dakle, uz supstituciju (2) vidimo da se $\sin x$ i $\cos x$ izražavaju kao racionalne funkcije u varijabli t , pa se onda i sve preostale trigonometrijske funkcije izražavaju tako, tj. iz (3) slijedi

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}, \quad \operatorname{sec} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1+t^2}{2t}. \quad (4)$$

Dakle, supstitucija (2) svaku trigonometrijsku jednadžbu prevodi u algebarsku.

Pokažimo kako se to radi na primjerima.

Primjer 10. Riješite jednadžbu

$$\sin x + 2 \cos x + 2 = 0.$$

Rješenje. Kod univerzalne supstitucije zapravo umjesto zadane jednadžbe rješavamo jednadžbu

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{2(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 2 = 0.$$

Kako funkcija $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ nije definirana za $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to ova jednadžba ne mora biti ekvivalentna polaznoj. Zato prilikom primjene univerzalne supstitucije treba provjeriti je li $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ rješenje polazne jednadžbe. Radi (2) prethodna se jednadžba može napisati u obliku

$$2t + 2(1 - t^2) + 2(1 + t^2) = 0,$$

tj. $2t + 4 = 0$. Dakle, $t = -2$, tj. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2$. Odavde je

$$x_1 = -2 \operatorname{arctg} 2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Međutim,

$$x_2 = \pi + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}$$

zadovoljava polaznu jednadžbu, pa ona ima dvije serije rješenja. ■

Jednadžba navedena u prethodnom primjeru je poseban slučaj tzv. projekcije jednadžbe, tj. jednadžbe oblika

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad a \neq 0, b \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Ako su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta i α kut tog trokuta nasuprot a , onda vrijedi

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = c,$$

tj. ta jednadžba izražava činjenicu da je zbroj ortogonalnih projekcija kateta na hipotenuzu jednak hipotenuzi, pa odatle i naziv projekciona jednadžba. Dakle, ako su slučajno a , b duljine kateta i c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, onda su rješenja projekcione jednadžbe rješenja jednadžbe $\sin x = \frac{a}{c}$.

Dakako da projekcionu jednadžbu uvijek možemo riješiti i univerzalnom supstitucijom (2).

Postoji, međutim, još jedna metoda rješavanja projekcione jednadžbe koja se zove metoda pomoćnog kuta. Ta se metoda zasniva na sljedećoj činjenici.

PROPOZICIJA 1. Za svaka dva realna broja a i b , $a^2 + b^2 \neq 0$ postoji realan broj φ takav da za sve realne x vrijedi

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi). \quad (5)$$

Pri tome se φ može odabrati takav da bude

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (6)$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (7)$$

Dokaz. Najprije pokažimo da postoji $\varphi \in \mathbb{R}$ takav da istodobno vrijede (6) i (7). U tu svrhu definirajmo φ formulom

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & \text{za } b &\geq 0 \\ \varphi &= -\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & \text{za } b < 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Kako je $\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$, to je φ dobro definiran. Iz (8) slijedi

$$\cos \varphi = \cos \left(\pm \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

to je (6). Nadalje, iz prethodne jednakosti slijedi

$$\sin^2 \varphi = 1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2},$$

dakle

$$\sin \varphi = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ako su sada a i b istog predznaka, recimo $a > 0$, $b > 0$, onda zbog $a > 0$ slijedi da je φ iz prvog ili četvrtog kvadranta, pa ćemo odabrati φ iz prvog kvadranta, pa je

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

to je (7). Analogno se dokazuje tvrdnja u slučaju drugih predznaka.

Preostaje da se provjeri da uz takav izbor od φ vrijedi (5). Imamo redom

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x) \end{aligned}$$

i konačno

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi). \blacksquare$$

Primjer 11. Riješite jednadžbu iz prethodnog primjera metodom pomoćnog kuta. Rješenje. Imamo redom

$$\sin x + 2 \cos x = -2.$$

Podijelimo lijevu i desnu stranu te jednadžbe sa $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Dobivamo

$$\sin(x + \varphi) = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

gdje je $\varphi = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$, pa je

$$x + \varphi = (-1)^l \arcsin \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) + l\pi,$$

odnosno

$$x = -\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + (-1)^{l+1} \arcsin \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) + l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Provjerimo da tom metodom nismo "izgubili" nijedno rješenje zadane jednadžbe, kao što je to bilo u nekim prethodnim primjerima. Iz dobivenog rezultata slijedi da za parne l , tj. $l = 2k$, dobivamo

$$x_1 = -2 \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

a za $l = 2t + 1$

$$x_2 = \pi + 2t\pi, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Kako je $\arctg x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, to je $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} = \arctg 2$, pa smo zaista dobili rješenja kao i u primjeru 10. \blacksquare

U pojedinim se slučajevima trigonometrijske jednadžbe mogu transformirati na oblik polinoma ili racionalne algebarske funkcije u varijabli $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sin 2x$ ili slično. U takvim se slučajevima one rješavaju odgovarajućim supstitucijama $\sin x = t$, $\cos x = t$, itd.

Ilustrirajmo to na primjerima.

Primjer 12. Riješite jednadžbu

$$\sin 3x + \cos 2x = 1.$$

Rješenje. Kako je $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ i $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, to zadanu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$4 \sin^3 x + 2 \sin^2 x - 3 \sin x = 0.$$

Supstitucija $\sin x = t$ daje $4t^3 + 2t^2 - 3t = 0$. Korijeni te jednadžbe jesu $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{13} - 1)$, $t_3 = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{13})$. Dakle

$$\sin x = 0, \quad \sin x = \frac{1}{4}(\sqrt{13} - 1), \quad \sin x = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{13}).$$

Rješenje prve jednadžbe je $x_1 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, druge $x_2 = (-1)^l \arcsin \frac{\sqrt{13}-1}{4} + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$,

treća jednadžba nema rješenja jer je $\left| -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{13}) \right| > 1$. ■

Primjer 13. Riješite jednadžbu

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = 1.$$

Rješenje. Kako je

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x},$$

to se zadana jednadžba može napisati u obliku

$$\operatorname{tg} x + \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1.$$

Supstitucija $\operatorname{tg} x = t$, daje

$$t + \frac{1+t}{1-t} = 1,$$

odnosno $t^2 - 3t = 0$. Njeni korijeni su $t_1 = 0$ i $t_2 = 3$, pa slijedi $\operatorname{tg} x = 0$ i $\operatorname{tg} x = 3$. Dakle, sva rješenja su dana sa

$$x_1 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = \operatorname{arctg} 3 + l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Primjer 14. Riješite jednadžbu

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{2} \sin x \cos x.$$

Rješenje. Lijevu stranu transformirajmo ovako:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x,$$

a desna je strana jednaka $\frac{7}{4} \sin 2x$. Dakle, jednadžba je ekvivalentna sa

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{7}{4} \sin 2x.$$

Supstitucija $\sin 2x = t$ daje

$$1 - \frac{1}{2} t^2 = \frac{7}{4} t,$$

odnosno

$$2t^2 + 7t - 4 = 0.$$

Odavde je $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -4$. Dakle, $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x = -4$. Rješenje prve jednadžbe je

$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, a druga jednadžba nema rješenja. ■

Ako je $f(u, v) = 0$ homogeni algebarski polinom, onda se jednadžba $f(\sin x, \cos x) = 0$ svodi na algebarsku jednadžbu supstitucijom $\operatorname{tg} x = t$.

Primjer 15. Riješite jednadžbu

$$2 \sin^3 x - \sin^2 x \cos x + 2 \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0.$$

Rješenje. Uz pretpostavku $\cos x \neq 0$, dakle $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, podijelimo jednadžbu sa $\cos^3 x$, pa uz supstituciju $\operatorname{tg} x = t$ dobivamo

$$2t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Racionalni korijen ove jednadžbe je $t = \frac{1}{2}$, pa se ona može faktorizirati ovako

$$(t^2 + 1)(2t - 1) = 0.$$

Dakle, $t = \frac{1}{2}$ je jedini realni korijen te jednadžbe, pa $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ daje $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ kao jedina rješenja te jednadžbe. ■

Primjer 16. Riješite jednadžbu

$$6 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 2.$$

Rješenje. Uzmemo li u obzir da je $2 = 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$, dobivamo homogenu jednadžbu

$$4 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 0,$$

koja supstitucijom $\operatorname{tg} x = t$ prelazi u

$$4t^2 + 3t - 7 = 0.$$

Korijeni ove jednadžbe su $t_1 = -\frac{7}{4}$, $t_2 = 1$, pa iz $\operatorname{tg} x = 1$ i $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{4}$ slijedi

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x_2 = -\operatorname{arctg} \frac{7}{4} + l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Katkada je neke trigonometrijske jednadžbe moguće riješiti tako da se iskoriste svojstva omeđenosti funkcija sinus i kosinus.

Primjer 17. Riješite jednadžbu

$$\sin x \cdot \sin 5x = 1.$$

Rješenje. Kako je $\sin t \in [-1, 1]$, to zadanu jednadžbu zadovoljavaju samo oni realni brojevi x , za koje je istodobno $\sin x = 1$ i $\sin 5x = 1$ ili pak istodobno $\sin x = -1$ i $\sin 5x = -1$. U prvom slučaju je $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $5x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$, odnosno $x = \frac{4k+1}{2} \pi$, $x = \frac{4l+1}{10} \pi$. Zajednička rješenja nalazimo iz $\frac{4k+1}{2} = \frac{4l+1}{10}$. Odavde je $l = 5k+1$, pa je $x = \frac{4(5k+1)+1}{10} \pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. U drugom je slučaju $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $5x = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi$, pa slično nalazimo da je $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle, sva su rješenja dane jednadžbe $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, odnosno $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Primjer 18. Riješite jednadžbu

$$\cos 4x + \sin 9x = 2.$$

Rješenje. Kao i u prethodnom primjeru zaključujemo da su rješenja jednadžbe zadanog sustava jednaka rješenja sustava jednadžbi

$$\cos 4x = 1, \quad \sin 9x = 1.$$

Rješenje prve od tih jednadžbi je $x_1 = \frac{k\pi}{2}$, a druge $x_2 = \frac{(4l+1)\pi}{18}$. Kao i prije mora biti $\frac{k\pi}{2} = \frac{(4l+1)\pi}{18}$, odnosno $4l = 9k - 1$, pa je $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, skup svih rješenja zadane jednadžbe. ■

7.2. Sustavi trigonometrijskih jednadžbi

Sustavom trigonometrijskih jednadžbi zovemo sustav jednadžbi u kojem je bar jedna jednadžba trigonometrijska.

Sustavi od dvije trigonometrijske jednadžbe s dvije nepoznanice rješavaju se tako da se pogodnim transformacijama svedu na sustave algebarskih jednadžbi. Ilustrirajmo to na primjerima.

Primjer 19. Nađite sva rješenja sustava

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}, \quad x - y = \frac{4\pi}{3}.$$

Rješenje. Izrazimo u prvoj jednadžbi $\sin^2 x$ i $\sin^2 y$ pomoću funkcije dvostrukog kuta. Dobivamo

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2y) = \frac{1}{2},$$

$$\cos 2x + \cos 2y = 1.$$

Prema formuli za zbroj kosinusa, odavde slijedi

$$\cos(x+y) \cos(x-y) = \frac{1}{2}.$$

Dakle, zadani je sustav ekvivalentan sa sustavom

$$\cos(x+y) \cos(x-y) = \frac{1}{2}, \quad x - y = \frac{4\pi}{3}.$$

Uvrstimo li u prvu jednadžbu $x - y = \frac{4\pi}{3}$, dobit ćemo $\cos(x+y) = -1$ ili $x+y = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle, taj je sustav ekvivalentan sa sustavom

$$\begin{aligned} x + y &= (2k+1)\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x - y &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Odavde neposredno slijedi

$$x = \frac{7\pi}{6} + k\pi, \quad y = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

dakle, skup svih rješenja je skup uređenih parova $\left(\frac{7\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Primjer 20. Riješite sustav

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= \sqrt{2}, \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Rješenje. Prva se jednadžba očito može napisati u obliku

$$\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a lijevu stranu druge jednadžbe transformirajmo ovako

$$\begin{aligned}\cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) := \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x+y}{2} + 2 \cos^2 \frac{x-y}{2} - 1 \right) = \\ &= \cos^2 \frac{x-y}{2} - \sin^2 \frac{x+y}{2}.\end{aligned}$$

Stoga je zadani sustav ekvivalentan sa sustavom

$$\begin{aligned}\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos^2 \frac{x-y}{2} - \sin^2 \frac{x+y}{2} &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Supstitucijom $u = \sin \frac{x+y}{2}$, $v = \cos \frac{x-y}{2}$, dobivamo

$$uv = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad v^2 - u^2 = \frac{1}{2}.$$

Rješenja ovog sustava su $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $v_1 = 1$ i $u_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $v_2 = -1$. Dakle, svako rješenje zadanog sustava je rješenje jednog od sustava

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos \frac{x-y}{2} = 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{x+y}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos \frac{x-y}{2} = -1. \end{array} \right.$$

Prvi od tih sustava ekvivalentan je sa

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{2} &= (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x-y}{2} &= 2l\pi, & l \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Oдавde je

$$x_1 = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + (k+2l)\pi, \quad y_1 = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + (k-2l)\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Drugi od sustava je ekvivalentan sa sustavom

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{2} &= (-1)^{m+1} \frac{\pi}{4} + m\pi, & m \in \mathbb{Z} \\ \frac{x-y}{2} &= (2n+1)\pi, & n \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

točkovo rješenje je

$$x_1 = (-1)^m \frac{\pi}{4} + (m + 2n + 1)\pi, \quad y_1 = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{4} + (m - 2n - 1)\pi, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Dakle je (x_1, y_1) i (x_2, y_2) skup svih rješenja zadanog sustava. ■

Primjer 21. Riješite sustav

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 1, \\ \cos x - \cos y &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Rješenje. Taj je sustav, očito, ekvivalentan sa

$$\begin{aligned} \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} &= \frac{1}{2}, \\ \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Stavimo li $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$, dobit ćemo

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}, \quad \sin u \sin v = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Podijelimo li drugu od ovih jednadžbi s prvom, dobit ćemo $\operatorname{tg} v = -\sqrt{3}$, pa je $v = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Uvrstimo li to u jednadžbe ovog sustava, dobit ćemo sustav

$$\sin u = (-1)^k, \quad \sin u = (-1)^k.$$

Odatavde je $u = (-1)^k \frac{\pi}{2} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. Dakle, polazni je sustav ekvivalentan sa sustavom

$$\frac{x+y}{2} = (-1)^l \frac{\pi}{2} + 2l\pi, \quad \frac{x-y}{2} = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Odatavde je

$$x = (-1)^l \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + (2k + l)\pi, \quad y = (-1)^l \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + (2k - l)\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

7.3. Neke transcendentne jednadžbe

Mnoge se transcendentne jednadžbe svode pogodnim transformacijama na algebarske jednadžbe. Ilustrirajmo to na primjerima.

Primjer 22. Riješite jednadžbu

$$2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6.$$

Rješenje. Stavimo $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Dobivamo

$$2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{1-\sin^2 x} = 6,$$

odnosno

$$2^{2\sin^2 x} - 6 \cdot 2^{\sin^2 x} + 8 = 0.$$

Supstitucija

$$2^{\sin^2 x} = t$$

daje

$$t^2 - 6t + 8 = 0.$$

Odavde je $t_1 = 2$ i $t_2 = 4$, tj. $2^{\sin^2 x} = 2$ i $2^{\sin^2 x} = 4$. Iz prve od tih jednadžbi slijedi $\sin^2 x = 1$, a iz druge $\sin^2 x = 2$. Rješenje prve jednadžbe je $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, i to je jedino rješenje zadane jednadžbe, jer jednadžba $\sin^2 x = 2$ nema rješenja. ■

Primjer 23. Riješite jednadžbu

$$\log_{\cos x} 4 \cdot \log_{\cos^2 x} 2 = 1.$$

Rješenje. Jednadžba ima smisla samo ako je $\cos x > 0$ i $\cos x \neq 1$. U tom je slučaju ona ekvivalentna sa

$$\frac{\log 4}{\log \cos x} \cdot \frac{\log 2}{\log \cos^2 x} = 1,$$

odnosno sa

$$\log^2 \cos x = \log^2 2.$$

Odavde je $\log \cos x = \pm \log 2$, tj. $\cos x = 2$ i $\cos x = \frac{1}{2}$. Prva od tih jednadžbi nema rješenja. Rješenje druge jednadžbe je $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, i to su sva rješenja zadane jednadžbe. ■

Primjer 24. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 9^{2 \lg x + \cos y} &= 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{\lg x} &= 2. \end{aligned}$$

Rješenje. Supstitucija $9^{2 \lg x} = u$, $9^{\cos y} = v$, daje sustav

$$uv = 3, \quad v - u = 2.$$

Rješenja ovog sustava jesu $(1, 3)$ i $(-3, -1)$, pa je polazni sustav ekvivalentan sa sustavima

$$\begin{cases} 9^{2 \lg x} = 1, \\ 9^{\cos y} = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 9^{2 \lg x} = -3, \\ 9^{\cos y} = -1. \end{cases}$$

Iz prvog sustava slijedi $\lg x = 0$, $\cos y = \frac{1}{2}$, tj. $x = k\pi$, $y = \pm \frac{\pi}{3} + 2l\pi$. Drugi od ovih sustava očito nema rješenje. Dakle, skup svih rješenja polaznog sustava je dan sa $\left\{ \left(k\pi, \frac{\pi}{3}(6l \pm 1) \right), k, l \in \mathbb{Z} \right\}$. ■

7.4. Ciklometrijske jednadžbe

Jednadžbe u kojima se pojavljuju ciklometrijske funkcije zovemo ciklometrijskim jednadžbama. One se obično rješavaju tako da se funkcije na lijevoj i desnoj strani jednadžbe komponiraju sa zgodno odabranom trigonometrijskom

funkcijom. Pri tome se može dogoditi da se dobije jednadžba koja nije ekvivalentna s polaznom jednadžbom. Stoga valja uvijek provjeriti zadovoljavaju li sva dobivena rješenja polaznu jednadžbu. Pokažimo na primjerima kako se rješavaju trigonometrijske jednadžbe.

Primjer 25. Riješite jednadžbu

$$\arcsin x + \arccos 2x = \frac{\pi}{6}.$$

Rješenje. Iz zadane jednadžbe slijedi (komponiramo lijevu i desnu stranu s funkcijom $x \mapsto \sin x$)

$$\sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arccos 2x) + \cos(\arcsin x) \cdot \sin(\arccos 2x) = \frac{1}{2}.$$

Odatle je

$$2x^2 + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-4x^2} = \frac{1}{2},$$

tj.

$$2\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-4x^2} = 1 - 4x^2.$$

Kvadriranjem dobivamo

$$1 - 4x^2 = 0,$$

pa je

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}.$$

Lako se vidi da polaznu jednadžbu zadovoljava samo $x = \frac{1}{2}$, pa je to jedino rješenje polazne jednadžbe. ■

Primjer 26. Riješite jednadžbu

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Rješenje. Iz

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1} \right) = 1$$

slijedi

$$\frac{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{2x+1}}{1 - \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{2x+1}} = 1,$$

odnosno

$$\frac{2x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 2x + 1} = 1,$$

a ova je jednadžba istinita za sve $x \in \mathbb{R}$. Međutim, realni brojevi -1 i $-\frac{1}{2}$ nisu u domeni funkcija $x \mapsto \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$ i $x \mapsto \operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1}$, pa oni nisu rješenja polazne jednadžbe.

Dakle skup svih rješenja zadane jednadžbe je skup $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, -1 \right\}$. ■

Primjer 27. Riješite sustav

$$\arcsin x \cdot \arcsin y = \frac{\pi^2}{12}, \quad \arccos x \cdot \arccos y = \frac{\pi^2}{24}.$$

Rješenje. Kako je $\arccos t = \frac{\pi}{2} - \arcsin t$, to drugu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right) = \frac{\pi^2}{24}.$$

Sada prva jednadžba zadanog sustava i ova jednadžba čine sustav jednadžbi za nepoznane $\arcsin x$ i $\arcsin y$. Supstitucija $u = \arcsin x$, $v = \arccos x$ daje

$$uv = \frac{\pi^2}{12}, \quad uv - (u+v)\frac{\pi}{2} + \frac{5}{24}\pi^2 = 0.$$

Prema Viéteovim formulama u i v su korijeni kvadratne jednadžbe

$$12t^2 - 7\pi t + \pi^2 = 0,$$

odavde je $t_1 = \frac{\pi}{3}$, $t_2 = \frac{\pi}{4}$, pa je

$$u_1 = \frac{\pi}{3}, \quad v_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{i} \quad u_2 = \frac{\pi}{4}, \quad v_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Dakle, zadani je sustav ekvivalentan sa sustavom

$$\begin{cases} \arcsin x = \frac{\pi}{3}, \\ \arcsin y = \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} \arcsin x = \frac{\pi}{4}, \\ \arcsin y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

pa zadani sustav ima dva rješenja $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ■

Primjer 28. Riješite jednadžbu

$$\sin(\pi \operatorname{arctg} x) = \cos(\pi \operatorname{arctg} x).$$

Rješenje. Stavimo $t = \pi \operatorname{arctg} x$, pa je $\sin t = \cos t$, dakle, $t = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, odnosno

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{4} + k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Kako je $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ kodomena funkcije $x \mapsto \operatorname{arctg} x$, to je

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{4} + k < \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Te nejednakosti zadovoljavaju samo $k = -1, 0, 1$, pa zadana jednadžba ima samo tri rješenja

$$x_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{4}, \quad x_2 = -\operatorname{tg} \frac{3}{4}, \quad x_3 = \operatorname{tg} \frac{5}{4}. \quad \blacksquare$$

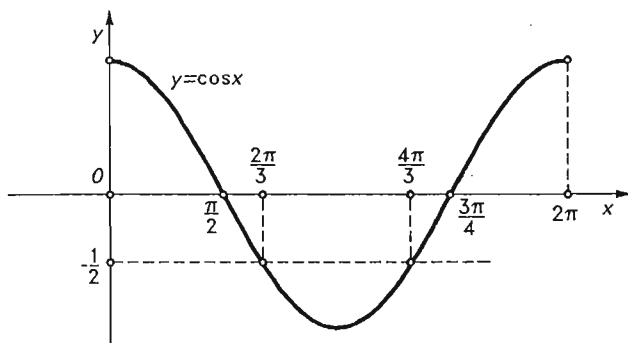
7.5. Trigonometrijske nejednadžbe

Pri rješavanju trigonometrijskih nejednadžbi bitno se koristi periodičnost trigonometrijskih funkcija, kao i njihova monotonost i neprekidnost u odgovarajućim intervalima. Najjednostavnije trigonometrijske nejednadžbe $\sin x \geq a$, $\cos x \leq a$ i sl., kao i one koje se svode na njih, najlakše je riješiti pomoću grafova tih funkcija ili pomoću trigonometrijske kružnice.

Primjer 29. Riješite nejednadžbu

$$\cos x \geq -\frac{1}{2}.$$

Rješenje. Skicira se graf funkcije $x \mapsto \cos x$ u intervalu jednog perioda, recimo $[0, 2\pi]$. U tom intervalu funkcija $x \mapsto \cos x$ poprima vrijednost $-\frac{1}{2}$ za $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ i $x_2 = \frac{4\pi}{3}$, a iz



Sl. 48.

sl. 48. razabiremo da su njezine vrijednosti veće ili jednake od $-\frac{1}{2}$ u intervalima $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ i $\left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$, pa je skup svih rješenja zadane nejednadžbe skup

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, 2(k+1)\pi\right] \right). \blacksquare$$

Primjer 30. Riješite nejednadžbu

$$1 + \sin x + \cos x < 0.$$

Rješenje. Napišimo nejednadžbu u obliku $\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < -1$, odnosno $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < -1$, tj. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Stavimo li $t = x - \frac{\pi}{4}$, dobivamo nejednadžbu $\cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Na način opisan u prethodnom primjeru zaključujemo da je

$\frac{3\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{4}$, dakle $\frac{3\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$. Odavde je $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, pa je skup svih rješenja dan s

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle (2k+1)\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle. \blacksquare$$

U nekim slučajevima se trigonometrijske nejednažbe racionalizirajućim supstitucijama svode na algebarske nejednažbe.

Primjer 31. Riješite nejednažbu

$$\cos x > \sin^2 x.$$

Rješenje. Napišimo zadanu nejednažbu u obliku $\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$. Supstitucija $t = \cos x$ daje $t^2 + t - 1 > 0$. Rješenje ove nejednažbe je

$$\left\langle -\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right\rangle.$$

Iz $t = \cos x$ slijedi da mora biti $t \in [-1, 1]$. Presjek tih skupova je $\left\langle \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right\rangle$. Dakle,

zadana je nejednažba ekvivalentna s nejednažbom $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \cos x$. Odavde nalazimo da su sva rješenja dana s

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi, \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi \right\rangle. \blacksquare$$

Primjer 32. Riješite nejednažbu

$$4^{\sin^2 \pi x} + 3 \cdot 4^{\cos^2 \pi x} \leq 8.$$

Rješenje. Stavimo $t = 4^{\sin^2 \pi x}$, pa nejednažba prima oblik $t^2 - 8t + 12 \leq 0$, $t > 0$. Odavde je $2 \leq t \leq 6$. Zbog $\sin^2 \pi x \leq 1$ je $t \leq 4$, pa imamo $2 \leq 4^{\sin^2 \pi x} \leq 4 \iff \frac{1}{2} \leq \sin^2 \pi x \leq 1 \iff \sin \pi x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ili $\sin \pi x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{1}{4} + k < x < \frac{3}{4} + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle, skup svih rješenja je

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{4k+1}{4}, \frac{4k+3}{4} \right\rangle. \blacksquare$$

Katkad se trigonometrijske nejednažbe mogu jednostavno riješiti koristeći svojstva trigonometrijskih funkcija.

Primjer 33. Dokažite da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\cos(\cos x) > 0$.

Rješenje. Kako je kodomena funkcije $x \mapsto \cos x$ segment $[-1, 1]$ i kako je taj segment domena funkcije $x \mapsto \cos(\cos x)$ i na njemu je funkcija $x \mapsto \cos x$ pozitivna to zaista za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\cos(\cos x) > 0$. \blacksquare

Primjer 34. Dokažite da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$0 < \sin^6 x + \cos^6 x \leq 1.$$

Rješenje. Iz $\sin^2 x \leq 1$ i $\cos^2 x \leq 1$ slijedi da je $\sin^6 x \leq \sin^2 x$ i $\cos^6 x \leq \cos^2 x$. Zbrajanjem ovih nejednakosti dobijemo $\sin^6 x + \cos^6 x \leq 1$. Kako je pak $\sin^6 x \geq 0$ i

$\cos^{18} x \geq 0$, to je i $\sin^6 x + \cos^{18} x \geq 0$, a kako $\cos x$ i $\sin x$ ne mogu biti istovremeno jednaki nuli, to je uvijek $\sin^6 x + \cos^{18} x > 0$. ■

U nekim je slučajevima pogodno koristiti tzv. **metodu intervala**. Ona se sastoji u sljedećem. Nejednadžba se svede na ekvivalentni oblik $f(x) > 0$, odredi se temeljni period l funkcije $x \mapsto f(x)$ i nađu sve nultočke i točke prekida te funkcije na intervalu $[0, l]$. Neka su to točke $x_1 < \dots < x_k$. Zatim se u svakom od intervala $[0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_k, l]$ odredi predznak funkcije. Ako je on pozitivan, onda je $f(x) > 0$ u čitavom tom intervalu (neprekidnost). Na taj se način nejednadžba riješi u intervalu $[0, l]$, pa onda i u čitavom skupu \mathbb{R} .

Primjer 35. Riješite nejednadžbu

$$\sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{3}} \leq \operatorname{tg} x.$$

Rješenje. Napišimo nejednadžbu u obliku $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{x}{3} > 0$ i stavimo $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{x}{3}$.

Temeljni period funkcije f je 3π . U intervalu $[0, 3\pi]$ nultočke od f jesu $0, \frac{3\pi}{2}, 3\pi$, a točke prekida $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, pa je

$$\mathcal{D}(f) \cap [0, 3\pi] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right].$$

U prvom od tih intervala funkcija f je pozitivna, u drugom negativna, u trećem pozitivna, a u četvrtom opet negativna. Dakle, skup svih rješenja je

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[3k\pi, \frac{\pi}{2} + 3k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 3k\pi, \frac{5\pi}{2} + 3k\pi\right). \quad \blacksquare$$

Slično trigonometrijskim nejednadžbama rješavaju se i ciklometrijske nejednadžbe.

Primjer 36. Riješite nejednadžbu

$$\arcsin x > \arccos x.$$

Rješenje. Za $x < 0$ je $\arcsin x < 0$, a $\arccos x > 0$, stoga je dovoljno riješiti nejednadžbu na segmentu $[0, 1]$. U tom segmentu iz nejednadžbe slijedi (zbog monotonosti sinusa)

$$\sin(\arcsin x) > \sin(\arccos x),$$

tj.

$$x > \sqrt{1 - x^2}.$$

Odavde je $2x^2 > 1 \implies \frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1$, dakle skup svih rješenja je $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. ■

Navedimo još neke važnije nejednakosti za trigonometrijske funkcije.

PROPOZICIJA 2. Za $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ vrijede nejednakosti

$$\cos x \sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x \quad \text{i} \quad \sin x \leq x.$$

Dokaz. Dat ćemo geometrijski dokaz. Na trigonometrijskoj kružnici uzimimo luk duljine x kao na sl. 49a. Tada je točka $A = (\cos x, \sin x)$ u prvom kvadrantu i usporedimo površine trokuta $\triangle OAA'$, $\triangle OBE$ i kružnog isječka OAE . Očito je

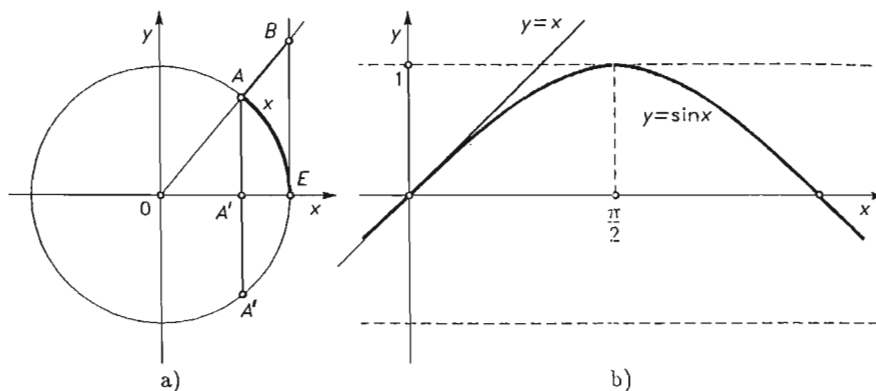
$$P(\triangle OAA') \leq P(OAE) \leq P(\triangle OBE).$$

Stoga je

$$\frac{1}{2}|OA'|\cdot|AA'| \leq \frac{1}{2}|OA|^2 \cdot x \leq \frac{1}{2}|OE|\cdot|BE|,$$

pa je $\frac{1}{2} \sin x \cos x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, odakle slijedi prva tvrdnja.

Druga tvrdnja slijedi iz činjenice da je dužina $\overline{AA''}$ najkraća spojnica dviju točaka, pa je manja i od luka $|\widehat{AA''}|$, tj. $|AA''| \leq |\widehat{AA''}|$. Odatle je $2 \sin x \leq 2x$. To povlači drugu tvrdnju. ■



Sl. 49.

KOROLAR 1. Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $|\sin x| \leq |x|$.

Dokaz. Za $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ to vrijedi zbog propozicije. Za $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$ gledamo varijablu $y = -x$. Tada je $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$, pa je $0 \leq \sin y \leq y$, odakle je $0 \leq \sin(-x) \leq -x$, tj. $0 \leq -\sin x \leq -x$, pa tvrdnja slijedi jer je $x \leq 0$. Za $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ tvrdnja je očita, jer je $|\sin x| \leq 1$. ■

Napomenimo da u dokazu propozicije i ovog korolara vrijedi stroga nejednakost osim za $x = 0$. To se vidi i iz grafova funkcija $y = \sin x$ i $y = x$ (sl. 49b).

KOROLAR 2. Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}, \quad \text{tj.} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x.$$

Dokaz. Koristeći Propoziciju imamo

$$0 \leq 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

Napomenimo opet da jednakost vrijedi samo za $x = 0$. ■

KOROLAR 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dokaz. Možemo prvo pretpostaviti da je $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tada je $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Podijelimo to sa $\sin x$. Dobivamo $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, odnosno $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, odakle je, zbog prethodnog korolara, $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$.

Sada za dano $\varepsilon > 0$ nađimo $\delta > 0$, tako da $0 < x < \delta \implies 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon$. Uzmimo δ tako da je $\frac{x^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} < \varepsilon$, tj. $\delta < \sqrt{2\varepsilon}$. Slično se dokazuje u slučaju $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. ■

KOROLAR 4. Za sve $x \in (0, \pi)$ vrijedi

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x, \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

Dokaz. $\sin x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$, pa zbog $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ i $\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$ slijedi $\sin x > x \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = x - \frac{x^3}{4}$. Nadalje,

$$\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} - (1 - \cos x) = \frac{x^2}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \left(\frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) \left(\frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right).$$

Koristeći dokazanu nejednakost, slijedi

$$\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < 2 \cdot \frac{x^3}{32} \cdot \frac{2x}{2} = \frac{x^4}{16},$$

odakle dobivamo i drugu nejednakost. ■

Iz svih tih nejednakosti dobivamo

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x, \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

Još bolje ocjene dobit ćemo pomoću redova (usp. § 12).

§ 8. Skalarni produkt vektora

8.1. Geometrijska definicija skalarnog produkta

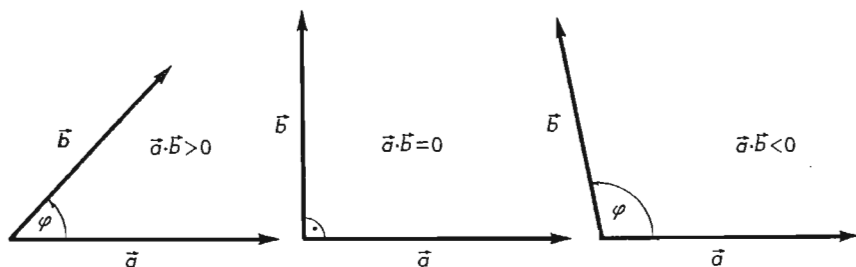
Skalarni produkt vektora zadire duboko u osnove geometrije. On omogućuje izračunavanje kuta između dvaju vektora, kuta između dvaju pravaca, duljine projekcije vektora na pravac ili ravninu, kao i izračunavanje same duljine vektora. Zapravo, u terminima zbrajanja vektora, množenja brojem i skalarnog produkta može se izgraditi čitava euklidska geometrija sasvim formalno, bez pozivanja na zor. Naravno, u znanstvenom i formalnom smislu to je vrlo korisno, ali u edukativnom – prava katastrofa, što su razni eksperimentalni školski programi 1970-1990. pokazali diljem svijeta.

Skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ vektora \vec{a} i \vec{b} je realan broj (skalar)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (*)$$

gdje su $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ redom duljine vektora \vec{a} i \vec{b} , a $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ kut od vektora $\vec{a} \neq \vec{0}$ do vektora $\vec{b} \neq \vec{0}$ (§ 1.2). Budući da je tada $-\varphi$ kut od \vec{b} do \vec{a} i da je $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, to u (*) za φ možemo uzeti bilo kut od \vec{a} do \vec{b} , bilo kut od \vec{b} do \vec{a} . S tim u svezi kažemo da je φ **kut između vektora \vec{a} i \vec{b}** .

Ako je bar jedan od vektora nul-vektor, definiramo $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. No tada je desna strana od (*) jednaka nuli za svaki realni broj φ . Ako je $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, onda je $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, ako je $\varphi = \pi/2$, tj. ako su \vec{a} i \vec{b} okomiti ($\vec{a} \perp \vec{b}$), onda je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, a ako je $\varphi \in \langle \pi/2, \pi \rangle$ (tup kut), onda je $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ (sl. 50).



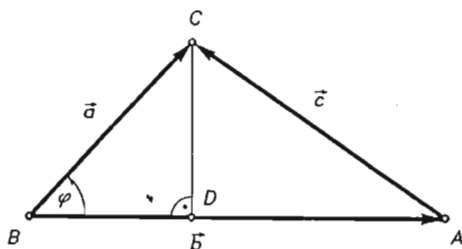
Sl. 50.

LEMA 1. Neka su \vec{a} i \vec{b} bilo koja dva vektora u ravnini, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ i $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$, $c = |\vec{c}|$. Tada je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2). \quad (1)$$

Dokaz. Ako je jedan od vektora \vec{a} , \vec{b} nul-vektor, npr. $\vec{a} = \vec{0}$, onda su obje strane u (1) jednake 0. Ako su \vec{a} , $\vec{b} \neq \vec{0}$ kolinearni vektori, onda je $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, za neko

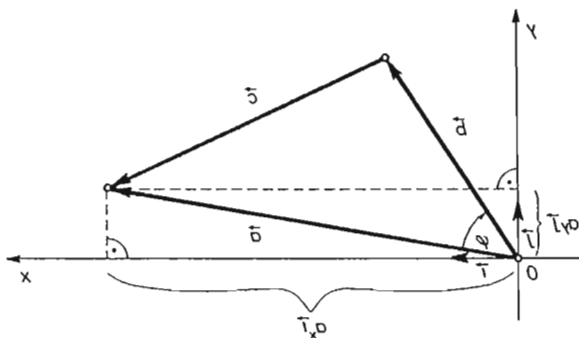
$\lambda \neq 0$. Ako je $\lambda > 0$, onda je kut $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, a za $\lambda < 0$ je $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$, pa je u oba slučaja $|\lambda| \cos \varphi = \lambda$, i stoga $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\lambda \vec{a}| \cos \varphi = a^2 |\lambda| \cos \varphi = \lambda a^2$. Desna strana od (1) je zbog $\vec{c} = (\lambda - 1)\vec{a}$ također jednaka λa^2 .



Sl. 51.

Neka su \vec{BC} , \vec{BA} i \vec{AC} redom reprezentanti vektora \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} , D ortogonalna projekcija točke C na pravac AB i a , b , c njihovi moduli (sl. 51). Iz pravokutnog trokuta $\triangle BDC$ je $|BD| = |\vec{a}| \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$. Prema Pitagorinom poučku je $a^2 - |BD|^2 = c^2 - (b - |BD|)^2$. Iz ovih jednakosti slijedi (1). ■

Ova lema nam omogućuje da skalarnom produktu dademo za primjenu pogodan oblik u koordinatnom sustavu (vidi pogl. VI).



Sl. 52.

Neka je Oxy pravokutni koordinatni sustav u ravnini M , te neka su \vec{i} , \vec{j} jedinični vektori na koordinatnim osima. Tada svaki vektor \vec{a} možemo jedinstveno zapisati pomoću koordinata kao $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$. Iz Pitagorinog poučka slijedi da je kvadrat njegove duljine $a^2 = a_x^2 + a_y^2$. Ako su \vec{a} , \vec{b} dva vektora u toj ravnini, onda imamo

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}, \quad a^2 = a_x^2 + a_y^2,$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}, \quad b^2 = b_x^2 + b_y^2,$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x) \vec{i} + (a_y - b_y) \vec{j}.$$

Tada je

$$c^2 = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = (a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) - 2(a_x b_x + a_y b_y) =$$

$$= a^2 + b^2 - 2(a_x b_x + a_y b_y).$$

Odavde i iz (1) dobivamo formulu

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y, \quad (2)$$

kojom je skalarni produkt dvaju vektora izražen pomoću njihovih koordinata u koordinatnom sustavu. Iz (2) odmah slijedi da je $\vec{a} \cdot \vec{i} = a_x \cdot 1 + a_y \cdot 0 = a_x$, $\vec{a} \cdot \vec{j} = a_y$, odakle dobivamo formulu

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{j}) \vec{j} \quad (3)$$

za razvoj proizvoljnog vektora \vec{a} po jediničnim vektorima \vec{i} , \vec{j} pravokutnog koordinatnog sustava.

Osnovna algebarska svojstva skalarnog produkta sadržana su u ovom teoremu.

TEOREM 1. Za sve vektore \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} i brojeve $\lambda \in \mathbf{R}$ vrijedi:

- (SP1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (simetričnost)
- (SP2) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (homogenost)
- (SP3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (distributivnost)
- (SP4) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$ (pozitivna definitnost).

Dokaz. Sva ta svojstva izlaze lako iz definicije ili koristeći formulu (2). Dokažimo (SP3). Neka su

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}, \quad \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j}.$$

Tada je $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j}$, pa (2) i distributivnost množenja prema zbrajanju u \mathbf{R} povlače

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_x + b_x) c_x + (a_y + b_y) c_y = (a_x c_x + a_y c_y) + (b_x c_x + b_y c_y) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Za dokaz (SP4) uzmimo $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$. Tada je $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 \geq 0$ i nadalje, $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 = 0 \iff a_x = a_y = 0$, tj. $\vec{a} = \vec{0}$. ■

8.2. Skalarni produkt na vektorskim prostorima

Osnovna svojstva (SP1)-(SP4) često služe da se skalarni produkt apstraktno definiira aksiomatski. Naime, ako je X vektorski prostor nad poljem \mathbf{R} (tj. X je realni vektorski prostor), onda je **skalarni produkt** preslikavanje $(,) : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ koje svakom uređenom paru vektora x i y iz X pridružuje broj $(x, y) \in \mathbf{R}$, tako da vrijedi (SP1)-(SP4). (Ponekad se još piše $(x|y)$, ali mi ćemo ostati kod oznake $(,)$.)

Uređen par $(X, (,))$ tada se zove **unitarni prostor** sa skalarnim produktom $(,)$. Posebno, ako je X 2-dimenzionalni, odnosno 3-dimenzionalni realni vektorski prostor na kojemu imamo skalarni produkt, onda se on zove **euklidska ravnina**, odnosno **euklidski prostor**. U njima je skalarni produkt $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

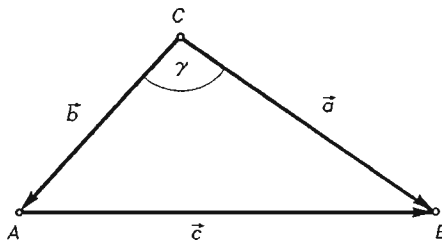
Skalarni produkt se može definirati na vektorskim prostorima nad bilo kojim poljem K , kao što ćemo vidjeti u nekim primjerima.

Pomoću skalarnog produkta definiraju se **duljina vektora** (modul ili **norma vektora**) i kut među (ne-nul) vektorima u bilo kojem unitarnom prostoru $(X, (,))$ ovako. Duljina vektora $x \in X$ je po definiciji $|x| = \sqrt{(x, x)}$, a kut među vektorima $x, y \in X$ ($x, y \neq 0$) je kut φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$ za kojeg je

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}.$$

Vektori x, y su **okomiti** ili **ortogonalni** ako je kut $\varphi = \pi/2$, tj. ako je skalarni produkt $(x, y) = 0$. Posebno, u slučaju euklidske ravnine skalarni produkt s usmjerenim dužinama je $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$, pa je tu duljina vektora $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. Često pišemo $\vec{a} = |\vec{a}|$.

Primjer 1. Dokažite pomoću skalarnog produkta kosinusov teorem za trokut, tj. da je (uz standardne oznake) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.



Sl. 53.

Rješenje. Vektorizirajmo stranice trokuta kao na sl. 53. Tada je $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, pa koristeći (SP1), (SP2), (SP3) i definiciju (*), imamo:

$$c^2 = |\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\vec{b}) + (-\vec{b}) \cdot \vec{a} + (-\vec{b}) \cdot (-\vec{b}) = a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2.$$

Dakle

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \blacksquare$$

Primjer 2. Neka su $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ i $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ dva ne-nul vektora u koordinatnoj ravnini. Odredite kosinus kuta φ među njima.

Rješenje. Iz $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi$ slijedi $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b}$, pa zbog $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, $b = |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$ slijedi iz (2) da je

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}. \quad \blacksquare \quad (3)$$

Formulu (3) možemo poopćiti na bilo koju dimenziju. Naime, neka je $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, n\}$ vektorski prostor n -torki realnih brojeva. Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom definira se po komponentama, tj. za

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n \quad \text{i} \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

definiramo

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Tada se lako provjeri da je to zaista vektorski prostor (nad \mathbf{R}) i da je dimenzije n (jer mu bazu čine vektori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, gdje je $\vec{e}_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ na i -tom mjestu je 1, $i = 1, \dots, n$). Skalarni produkt u tom prostoru definira se formulom

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (4)$$

Da je to zaista skalarni produkt, tj. da zadovoljava (SP1)-(SP4), također nije teško provjeriti i to prepuštamo čitatelju. Za $n = 2$ to se podudara s formulom (2), pa se radi o euklidskoj ravnini, a općenito o n -dimenzionalnom euklidskom prostoru. Uočite da je u tom prostoru duljina ili norma vektora $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ dana formulom (najčešće je tu oznaka $\|x\|$):

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (5)$$

a kut φ među ne-nul vektorima formulom

$$\cos \varphi = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}. \quad (6)$$

TEOREM 2 (Nejednakost Cauchy-Schwartz-Bunjakowskog). Za bilo koje dvije n -torke realnih brojeva $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ vrijedi nejednakost

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako postoji broj $\lambda \in \mathbf{R}$ ($\lambda \neq 0$) tako a je $y_i = \lambda x_i$, $i = 1, \dots, n$.

Dokaz. Ako je jedan od vektora x, y nul-vektor, onda su obje strane nejednakosti jednake nuli pa nejednakost vrijedi. Za $x, y \neq 0$ definira se kut $\varphi \in [0, \pi]$ između x i y formulom (6), pa iz činjenice da je $|\cos \varphi| \leq 1$, odnosno $\cos^2 \varphi \leq 1$, iz (4) i (5), odmah slijedi nejednakost.

Glede jednakosti, očito će ona nastupiti ako i samo ako je $|\cos \varphi| = 1$, tj. $\varphi = 0$ ili $\varphi = \pi$, tj. ako i samo ako su vektori x i y kolinearni, tj. $y = \lambda x$ za neko $\lambda \neq 0$. (Za drugi dokaz vidi 1. dio, str. 173.) ■

Pokažimo sada da i u svakom prostoru sa skalarnim produktom vrijedi opća nejednakost Cauchy-Schwartz-Bunjakowskog.

TEOREM 3. Neka je $(X, (,))$ unitarni prostor sa skalarnim produktom $(,)$, a $x, y \in X$ bilo koji vektori. Tada vrijedi

$$|(x, y)| \leq |x||y|.$$

Dokaz. Neka je $\lambda \in \mathbf{R}$ bilo koji broj i promotrimo vektor $x - \lambda y$. Prema aksiomu (SP4) je skalarni produkt $(x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0$. Koristeći ostale aksiome odatle dobivamo da za svako $\lambda \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$\lambda^2(y, y) - 2\lambda(x, y) + (x, x) \geq 0.$$

Dakle, ovaj kvadratni polinom u varijabli λ je nenegativan za svako $\lambda \in \mathbf{R}$. To je moguće samo tako da mu je diskriminanta ≤ 0 , tj.

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y),$$

odakle slijedi tvrdnja. ■

Primjer 3. Neka je $\mathcal{P}_n[a, b]$ skup svih polinoma nad segmentom $[a, b]$ stupnja $\leq n$. Dokažite da za svako $P, Q \in \mathcal{P}_n[a, b]$ vrijedi

$$\left(\int_a^b P(x)Q(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b P^2(x) dx \cdot \int_a^b Q^2(x) dx.$$

(Podsjetimo da je integral polinoma $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ na $[a, b]$ jednak $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} \Big|_a^b = F(b) - F(a)$, gdje je $F(x) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}$.)

Rješenje. Skup $\mathcal{P}_n[a, b]$ uz uobičajeno zbrajanje funkcija i množenja funkcija sa skalarom čini vektorski prostor (provjerite to sami). Na tom vektorskom prostoru definiramo skalarni produkt

$$(P, Q) = \int_a^b P(x)Q(x) dx.$$

Nije teško provjeriti da je ovim stvarno definiran skalarni produkt, tj. da vrijede aksiomi (SP1)-(SP4). Iz opće nejednakosti Cauchy-Schwartz-Bunjakowskog tada odmah slijedi tvrdnja. ■

Primjer 4. Neka je $\mathcal{T}_n[0, 2\pi]$ skup svih trigonometrijskih polinoma reda $\leq n$ na $[0, 2\pi]$ (§ 4). Dokažite da za $P, Q \in \mathcal{T}_n[0, 2\pi]$ vrijedi

$$\left(\int_0^{2\pi} P(x)Q(x) dx \right)^2 \leq \int_0^{2\pi} P^2(x) dx \cdot \int_0^{2\pi} Q^2(x) dx.$$

(Pri tome se integral trigonometrijskog polinoma računa tako da se integrira član po član i $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$).

Rješenje. Lako se vidi da je $\mathcal{T}_n[0, 2\pi]$ vektorski prostor (dimenzije $2n+1$, jer bazu čini $1, \cos t, \dots, \cos nt, \sin t, \dots, \sin nt$). Na tom prostoru se također definira skalarni produkt

$$(P, Q) = \int_0^{2\pi} P(x)Q(x) dx.$$

Tvrdnja tada, kao i u prethodnom primjeru, slijedi iz nejednakosti Cauchy-Schwartz-Bunjakowskoga.

Napomenimo da su vektori baze međusobno ortogonalni, jer je skalarni produkt svaka dva člana jednak nula, tj. vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx dx = \int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx dx = \begin{cases} \pi, & \text{za } k = l > 0 \\ 0, & \text{za } k \neq l \end{cases},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx dx = 0.$$

Slični rezultati kao u ova dva primjera vrijede ne samo za polinome i trigonometrijske polinome, nego i za neprekidne funkcije u nekom segmentu. ■

TEOREM 4 (Pitagorin poučak). *Ako su x i y okomiti vektori (u bilo kojem prostoru sa skalarnim produktom), onda je*

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

Dokaz. Po definiciji imamo

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y).$$

Iz svojstva (SP3) slijedi

$$(x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y).$$

Zbog ortogonalnosti vektora x i y je $(x, y) = (y, x) = 0$, pa dobivamo

$$|x + y|^2 = (x, x) + (y, y) = |x|^2 + |y|^2. \quad \blacksquare$$

TEOREM 5 (Nejednakost trokuta). *Za svaka dva vektora x, y (u bilo kojem prostoru sa skalarnim produktom) vrijedi*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Dokaz. Iz (SP1) i (SP3) slijedi

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y).$$

Zbog nejednakosti Cauchy-Schwartz-Bunjakowskoga je $2(x, y) \leq 2|x||y|$, pa imamo

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) \leq (x, x) + 2|x||y| + (y, y) = (|x| + |y|)^2,$$

odakle slijedi $|x + y| \leq |x| + |y|$. ■

Primjer 5. Za bilo koje n -torke realnih brojeva $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$ vrijedi

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Rješenje. Ova nejednakost je posljedica nejednakosti trokuta u prostoru \mathbf{R}^n sa skalarnim produktom (4) (i normom (5)). ■

U svezi s normom vektora, napomenimo da se udaljenost dvaju vektora x i y u unitarnom prostoru definira uobičajeno kao i u geometriji kao duljina vektora $x - y$ (tj. kao udaljenost krajeva tih vektora, jer istim slovom obilježavamo vektor i njegovu krajnju točku, smatrajući da svi vektori imaju početak u ishodištu), dakle (pišemo i $d = d(x, y)$):

$$d = |x - y|.$$

Nejednakost trokuta možemo stoga napisati i u obliku

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

za svaka tri vektora x, y, z iz unitarnog prostora. Naime,

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

TEOREM 6 (Jednakost paralelograma). *U realnom unitarnom prostoru vrijedi*

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2).$$

Dokaz. Iz

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y, x + y) = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 \\ |x - y|^2 &= (x - y, x - y) = |x|^2 - 2(x, y) + |y|^2, \end{aligned}$$

zbrajanjem slijedi tvrdnja. ■

Primjer 6. Neka su $z = (z_1, \dots, z_n)$ i $w = (w_1, \dots, w_n)$ dvije n -torke kompleksnih brojeva. Dokažite da vrijedi

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left| \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right)^{1/2}, \\ \text{b)} \quad & \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i + w_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |w_i|^2}. \end{aligned}$$

(Pri tom je \bar{u} konjugirano kompleksni broj od $u \in \mathbb{C}$, a $|u|$ njegov modul.)

Rješenje. Skup \mathbb{C}^n svih uređenih n -torki (z_1, \dots, z_n) kompleksnih brojeva ima strukturu vektorskog prostora nad poljem \mathbb{C} . U tom prostoru definiramo skalarni produkt vektora $z, w \in \mathbb{C}^n$ formulom

$$(z, w) = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i.$$

Nije teško provjeriti da ovaj produkt zadovoljava aksiome (SP2), (SP3), (SP4), a umjesto aksioma (SP1) (simetričnost) zadovoljava uvjet

$$(\overline{\text{SP1}}) \quad (z, w) = \overline{(w, z)}.$$

Vektorski prostor nad \mathbb{C} na kojem je definiran skalarni produkt sa svojstvima $(\overline{\text{SP1}})$, (SP2), (SP3) i (SP4) zove se **kompleksni unitarni prostor**. Sada se sasvim analogno, kao i u realnom slučaju, dokaže da i u kompleksnom unitarnom prostoru vrijede nejednakost Cauchy-Schwartz-Bunjakowskog i nejednakost trokuta, što su točno tvrdnje a) i b). Detalje dokaza prepuštamo čitatelju. ■

8.3. Neke primjene skalarnog produkta u geometriji

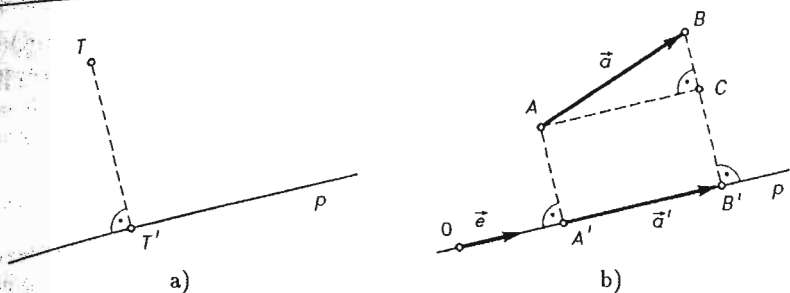
Nakon ovog izleta u malo "apstraktniju" teoriju, vratimo se običnom skalarnom produktu u euklidskoj ravnini M . Među najvažnije pojmove euklidske geometrije pripada pojam okomitosti pravaca (ili vektora) i pojam ortogonalnog projiciranja.

Ako je zadan pravac $p \subset M$, onda imamo ortogonalno projiciranje $pr_p : M \rightarrow p$, $T \mapsto T'$ (sl. 54a)). No shvatimo li ravninu M i pravac p kao vektorske prostore, onda se vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (sl. 54b)) projicira u vektor $\vec{a}' = \overrightarrow{A'B'}$ i pišemo $\vec{a}' = pr_p(\vec{a})$.

Neka je \vec{e} jedinični vektor koji leži na pravcu p . Tada se ortogonalno projiciranje može shvatiti kao ortogonalno projiciranje na vektor \vec{e} , i to se označava s $pr_{\vec{e}}$.

LEMA 2. Neka su $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$ i $\vec{a} = \vec{a}_2 + \vec{b}_2$ dva prikaza vektora \vec{a} , gdje su \vec{a}_1 i \vec{a}_2 kolinearni vektori (tj. leže na jednom pravcu p), a \vec{b}_1 i \vec{b}_2 vektori okomiti na \vec{a}_1 i \vec{a}_2 (tj. okomiti na p). Tada je $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$ i $\vec{b}_1 = \vec{b}_2$. Dakle, takav prikaz je jedinstven.

Dokaz. Iz $\vec{a}_1 + \vec{b}_1 = \vec{a}_2 + \vec{b}_2$ slijedi $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Vektor $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ kolinearan je sa \vec{a}_1 i \vec{a}_2 (tj. leži na pravcu p), a vektor $\vec{b}_1 - \vec{b}_2$ je okomit na $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ (tj. na p). To znači da je $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ okomit na samog sebe, a to može biti samo tako da je to nul-vektor. Stoga je $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$, pa zato i $\vec{b}_1 = \vec{b}_2$. ■



Sl. 54.

TEOREM 7 (O projekciji). 1) Neka je \vec{e} jedinični vektor, a $pr_{\vec{e}}$ ortogonalno projiciranje na taj vektor. Tada je

$$pr_{\vec{e}}(\vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{e}.$$

2) Općenitije, ako je $\vec{b} \neq \vec{0}$ bilo koji vektor, onda je

$$pr_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}.$$

Dokaz. 1) Promotrimo vektor $\vec{c} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{e}$. Tada je

$$\vec{c} \cdot \vec{e} = \vec{a} \cdot \vec{e} - (\vec{a} \cdot \vec{e})(\vec{e} \cdot \vec{e}) = \vec{a} \cdot \vec{e} - \vec{a} \cdot \vec{e} = 0, \quad \text{zbog} \quad \vec{e} \cdot \vec{e} = |\vec{e}|^2 = 1.$$

To pokazuje da je vektor \vec{c} okomit na \vec{e} . No tada je s

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{e} + \vec{c}$$

dan rastav vektora \vec{a} na dva međusobno okomita vektora od kojih je prvi u smjeru vektora \vec{e} (tj. leži na pravcu p). S druge strane iz pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ vidimo da je (sl. 54b))

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{CB},$$

gdje je $\overrightarrow{A'B'} = pr_{\vec{e}}(\vec{a}) = \vec{a}'$ projekcija od \vec{a} na \vec{e} , a vektor \overrightarrow{CB} je okomit na \vec{e} . Zbog jedinstvenosti ovakvog prikaza (tj. zbog leme) slijedi da je $\vec{a}' = \overrightarrow{A'B'} = pr_{\vec{e}}(\vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{e}$.

2). slijedi iz tvrdnje 1). ako se stavi $\vec{e} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. ■

Ortogonalno projiciranje na dani vektor (ili pravac) je linearno preslikavanje, tj. vrijedi

KOROLAR 1.

$$pr_{\vec{e}}(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda pr_{\vec{e}}(\vec{a}) + \mu pr_{\vec{e}}(\vec{b}),$$

za svaka dva vektora \vec{a} i \vec{b} i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Iz svojstava skalarnog produkta (SP2) i (SP3) slijedi da je $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \cdot \vec{c} = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{c} + (\mu\vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \mu(\vec{b} \cdot \vec{c})$, tj. skalarni produkt je linearno preslikavanje. Stoga iz teorema slijedi

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\vec{e}}(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) &= [(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \cdot \vec{e}] \vec{e} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{e} + \mu(\vec{b} \cdot \vec{e})\vec{e} = \\ &= \lambda \text{pr}_{\vec{e}}(\vec{a}) + \mu \text{pr}_{\vec{e}}(\vec{b}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Pomoću projiciranja vektora na vektor možemo od bilo kojeg linearno nezavisnog para vektora \vec{x}_1, \vec{x}_2 u ravnini na prirodan način doći do **ortonormiranog** para vektora \vec{e}_1, \vec{e}_2 (tj. ortogonalnih i jedinične duljine) u toj ravnini. To načinimo tako da prvi vektor normiramo, a drugi vektor ortogonalno projiciramo na pravac (ili vektor) okomit na prvi, i tada ga normiramo. Pomoću teorema o projekciji lako se dobiva (provjerite):

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{x}_2 - (\vec{x}_2 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1}{|\vec{x}_2 - (\vec{x}_2 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1|}.$$

Taj se postupak zove **Gram²-Schmidtov³ postupak ortogonalizacije**. No, puni smisao taj postupak dobiva tek u višim dimenzijama, a ideja je ista, tj. svaki naredni vektor se dobiva ortogonalnim projiciranjem na pravac ortogonalan na prethodne vektore i potom normiranjem.

Evo sada nekoliko primjera iz planimetrije koji ilustriraju primjenu skalarnog produkta.

Primjer 7. Neka je $A_1 A_2 \dots A_n$ pravilni n -terokut upisan u kružnicu radijusa R s centrom O , a $T \in M$ bilo koja točka i $d = |OT|$. Dokažite da je

$$|TA_1|^2 + |TA_2|^2 + \dots + |TA_n|^2 = n(R^2 + d^2).$$

Rješenje. Vektor $\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i$ je nulvektor, jer prilikom rotacije za $2\pi/n$ prelazi u

sama sebe. Kako je $\vec{TA}_i = \vec{TO} + \vec{OA}_i$, imamo da je $|TA_i|^2 = \vec{TA}_i \cdot \vec{TA}_i = (\vec{TO} + \vec{OA}_i) \cdot (\vec{TO} + \vec{OA}_i) = |OA_i|^2 + |OT|^2 + 2\vec{OA}_i \cdot \vec{OT} = R^2 + d^2 + 2\vec{OA}_i \cdot \vec{OT}$. Stoga sumiranjem slijedi

$$\sum_{i=1}^n |TA_i|^2 = nR^2 + nd^2 + 2 \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i \cdot \vec{OT} = n(R^2 + d^2), \quad \text{jer je} \quad \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i = \vec{0}. \quad \blacksquare$$

Primjer 8. Neka je T točka na opisanoj kružnici jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$. Dokažite da $|TA|^4 + |TB|^4 + |TC|^4$ ne ovisi o položaju točke T .

Rješenje. Neka je O centar opisane kružnice radijusa R . Iz $\vec{TA} = \vec{TO} + \vec{OA}$ slijedi $|TA|^2 = |TO|^2 + |OA|^2 + 2\vec{TO} \cdot \vec{OA} = 2(R^2 + \vec{TO} \cdot \vec{OA})$. Zato je $|TA|^4 + |TB|^4 + |TC|^4 = 12R^4 + 8R^2\vec{TO} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) + 4(\vec{TO} \cdot \vec{OA})^2 + 4(\vec{TO} \cdot \vec{OB})^2 + 4(\vec{TO} \cdot \vec{OC})^2$. Jasno je da je $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$.

² Jürgen Gram (1850–1916), nizozemski matematičar.

³ Ehrhardt Schmidt (1876–1959), njemački matematičar.

Neka su A' , B' , C' projekcije točke T na pravce OA , OB , OC redom. Tada je $\vec{TO} \perp \vec{OA}$.
 $|\vec{OA}'| = \pm |\vec{TO}| |\vec{OA}| = \pm R |\vec{OA}'|$. Trokut $\triangle A'B'C'$ je također jednakostraničan (dokažite to sami) i upisan u kružnicu nad promjerom \vec{OT} . Stoga, prema prethodnom primjeru, dobivamo

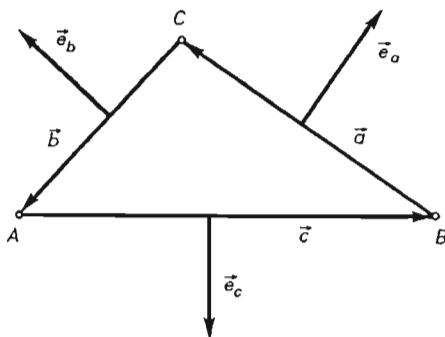
$$|\vec{OA}'|^2 + |\vec{OB}'|^2 + |\vec{OC}'|^2 = \frac{3}{4}R^2 + \frac{3}{4}R^2 = \frac{3}{2}R^2.$$

Prema tome, slijedi

$$|\vec{TA}|^4 + |\vec{TB}|^4 + |\vec{TC}|^4 = 12R^4 + 6R^4 = 18R^4. \quad \blacksquare$$

Primjer 9. Neka su stranice trokuta $\triangle ABC$ vektorizirane tako da je $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Neka je \vec{e}_a vektor okomit na stranicu (tj. vektor) $\vec{a} = \vec{BC}$, modula $|\vec{e}_a| = |\vec{a}| = a$ i neka je orijentiran prema vanjštini trokuta. Analogno se definiraju i vektori \vec{e}_b i \vec{e}_c . Dokažite da je tada $\vec{e}_a + \vec{e}_b + \vec{e}_c = \vec{0}$. Ova se tvrdnja katkada zove "teorem o ježu" (sl. 55).

Pomoću teorema o ježu dokažite sinusov i kosinsov poučak za trokut (§ 9).



Sl. 55.

Rješenje. Translatiramo vektore \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} tako da imaju zajedničko hvatište O . Tada rotacijom za 90° oko O oni prelaze redom u vektore \vec{e}_a , \vec{e}_b , \vec{e}_c , pa i suma $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ prelazi u sumu $\vec{e}_a + \vec{e}_b + \vec{e}_c$ i zato ova suma mora biti jednaka $\vec{0}$.

Da dokažemo sinusov poučak, pomnožimo skalarno $\vec{e}_a + \vec{e}_b + \vec{e}_c = \vec{0}$ s vektorom \vec{a} . Tada zbog $\vec{e}_a \cdot \vec{a} = 0$ slijedi

$$0 = \vec{e}_b \cdot \vec{a} + \vec{e}_c \cdot \vec{a} = ba \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) + ca \cos \left(\beta + \frac{\pi}{2} \right) = ab \sin \gamma - ac \sin \beta,$$

odakle dobivamo $ab \sin \gamma = ac \sin \beta$. Analogno dobivamo $ab \sin \gamma = bc \sin \alpha$. Odatle slijedi

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Za dokaz kosinsovog poučka skalarno kvadrirajmo jednakost $-\vec{e}_a = \vec{e}_b + \vec{e}_c$. Slijedi $\vec{e}_a^2 = \vec{e}_b^2 + \vec{e}_c^2 + 2\vec{e}_b \cdot \vec{e}_c$, tj. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(\pi - \alpha)$, pa je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, a to je kosinsov poučak. \blacksquare

Primjer 10. Neka je \vec{v} bilo koji vektor u ravnini jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$, a \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \vec{v}_3 ortogonalne projekcije vektora \vec{v} na pravce AB , BC , CA . Dokažite da vrijedi

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \frac{3}{2}\vec{v}.$$

Rješenje. Neka su $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ jedinični vektori vektora $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$. Vektor \vec{v} dopušta rastav

$$\vec{v} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2.$$

Prema teoremu o projekciji imamo

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3.$$

Uvrstimo li u ovo gornji izraz i uzmemo li u obzir da je

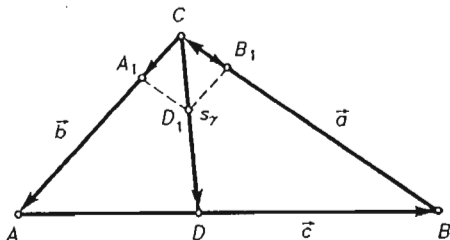
$$\vec{e}_3 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = -\frac{1}{2},$$

dobivamo

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \frac{3}{2}(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2) = \frac{3}{2}\vec{v}. \quad \blacksquare$$

Primjer 11. Izrazite duljinu simetrale kuta pomoću stranica trokuta.

Rješenje. Vektorizirajmo trokut kao na sl. 56. i neka je $\vec{s}_\gamma = \overrightarrow{CD}$. Tada postoji



Sl. 56.

$\mu \in \mathbb{R}$, tako da je

$$\overrightarrow{AD} = \mu(-\vec{b} - \vec{a}). \quad (1)$$

Jedinični vektor iz C prema A je $\frac{\vec{b}}{b}$, a jedinični vektor iz C prema B je $-\frac{\vec{a}}{a}$. Dijagonala CD_1 romba $CA_1D_1B_1$ raspolavlja kut γ trokuta, pa je $\frac{\vec{b}}{b} - \frac{\vec{a}}{a}$ vektor iz C prema D , pa postoji $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da je

$$\vec{s}_\gamma = \lambda \left(\frac{\vec{b}}{b} - \frac{\vec{a}}{a} \right),$$

pa je

$$\overrightarrow{AD} = -\vec{b} + \lambda \left(\frac{\vec{b}}{b} - \frac{\vec{a}}{a} \right). \quad (2)$$

Izjednačavanje koeficijenata uz \vec{a} i \vec{b} u (1), (2) povlači

$$\lambda = \frac{ab}{a+b}, \quad \mu = \frac{b}{a+b}.$$

Dakle,

$$\vec{s}_\gamma = \frac{1}{a+b} (a\vec{b} - b\vec{a}).$$

Odavde i iz $s_\gamma = \sqrt{s_\gamma^2}$, koristeći $\vec{a}^2 = a^2, \vec{b}^2 = b^2$, slijedi

$$s_{\gamma} = \frac{1}{a+b} \sqrt{2a^2b^2 - ab \cdot 2\vec{a} \cdot \vec{b}}.$$

Zbog $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{c}^2$ je $2\vec{a}\vec{b} = c^2 - a^2 - b^2$, pa dobivamo

$$s_{\gamma} = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}, \quad \text{odnosno}$$

$$s_{\gamma} = \frac{2}{a+b} \sqrt{abs(s-c)}. \quad \blacksquare$$

Još neke primjene dat će se u poglavlju VI. § 1.

§ 9. Sinusov i kosinusov poučak. Primjene u planimetriji

9.1. Sinusov i kosinusov poučak

"Riješiti" neki trokut znači iz zadanih elemenata (sastavina) tog trokuta odrediti nepoznate. U trokutu imamo 6 glavnih (osnovnih) elemenata, to su stranice i kutovi. Trokut je određen ako su mu zadana 3 osnovna elementa (od kojih je bar jedan stranica). Prema tome, riješiti trokut znači odrediti tri preostala osnovna elementa. Ostali elementi trokuta, kao npr. polumjer upisane kružnice, opisane kružnice, duljine težišnica, duljine simetrala itd. zovu se sekundarne sastavine trokuta.

Pri rješavanju trokuta razlikujemo 4 osnovna slučaja, koji odgovaraju poučcima o sukladnosti trokutu. To su slučajevi kada je zadano:

- duljina stranice i dva kuta,
- duljine dviju stranica i kut među njima,
- duljine dviju stranica i kut nasuprot većoj od njih,
- duljine svih stranica.

Svi se osnovni slučajevi rješavaju pomoću sinusova i kosinusova poučka.

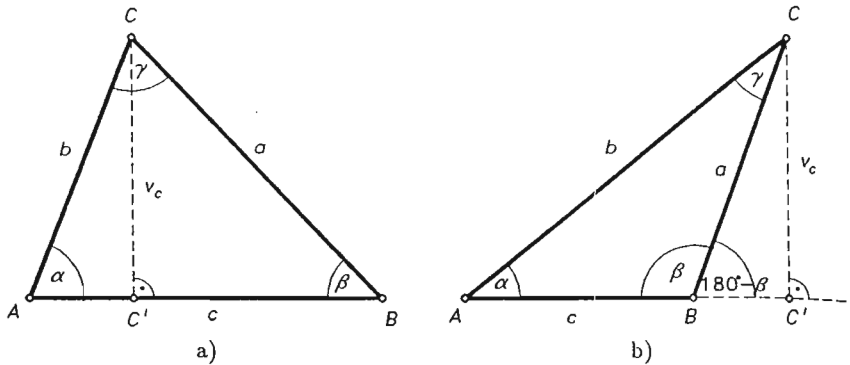
PROPOZICIJA 1. *Stranice u trokutu odnose se kao sinusi tim stranicama nasuprotnih kutova, tj. ako su a, b, c duljine stranica i α, β, γ redom mjere tim stranicama nasuprotnih kutova, onda vrijedi*

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma, \quad (1)$$

ili, preciznije

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \quad (1')$$

gdje je R radijus opisane kružnice trokuta.



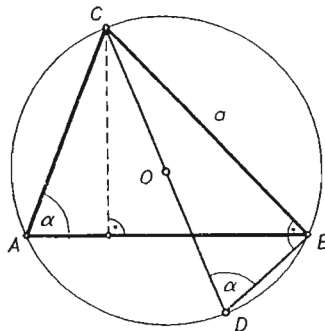
Sl. 57.

Dokaz. Uzmimo trokut $\triangle ABC$ i uvedimo oznake kao na sl. 57.

Iz trokuta $\triangle AC'C$ i $\triangle C'BC$ slijedi da je $v_c = b \sin \alpha$ i $v_c = a \sin \beta$ i te jednakosti vrijede bez obzira je li $C' \in \overline{AB}$ (sl. 57a) ili $C' \notin \overline{AB}$ (sl. 57b). Iz ovih jednakosti slijedi $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$. Analogno se dokazuje da vrijedi $b : c = \sin \beta : \sin \gamma$, a iz ove dvije jednakosti slijedi (1). Da je (1) ekvivalentno sa (1') očito je.

Da sinusov poučak rješava osnovne slučajeve a) i c) očito je.

Iz zapisa (1') razabiremo da su u svakom trokutu omjeri $\frac{a}{\sin \alpha}$, $\frac{b}{\sin \beta}$, $\frac{c}{\sin \gamma}$ jednaki, pa prema tome taj omjer mora imati neko posebno geometrijsko značenje. Pokazat ćemo da je vrijednost tih omjera jednaka promjeru $2R$ trokutu opisane kružnice. U tu svrhu opišimo oko trokuta $\triangle ABC$ kružnicu i označimo njen poluprjer sa R . Neka pravac OC siječe opisanu kružnicu još u točki D . Prema poučku o središnjem i obodnom kutu je $\sphericalangle BDC = \alpha$, pa iz pravokutnog trokuta $\triangle BDC$



Sl. 58.

($\angle DBC = \frac{\pi}{2}$ (Thales)) slijedi da je $\frac{a}{2R} = \sin \alpha$. Slično se dokazuje da je $\frac{b}{2R} = \sin \beta$, $\frac{c}{2R} = \sin \gamma$, pa odavde slijedi (1'). ■

Vrijedi i ovaj obrat sinusovog poučka.

PROPOZICIJA 2. *Ako realni brojevi $a, b, c > 0$ i $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ zadovoljavaju jednakosti (1), onda postoji jedinstveni trokut kojemu su a, b, c duljine stranica i α, β, γ kutovi.*

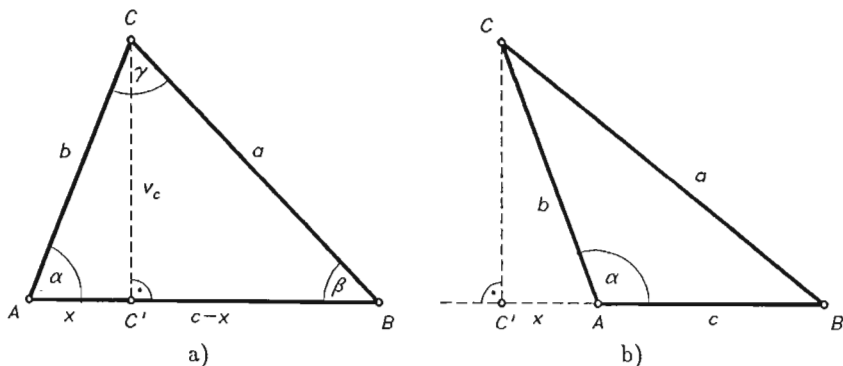
Dokaz. Uzmimo trokut $\triangle A'B'C'$ takav da je $|B'C'| = a$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$. Takav trokut postoji jer je $\beta + \gamma < \pi$. Označimo preostale elemente tog trokuta sa b' , c' i α' . Iz $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ slijedi (zbog $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$) da je $\alpha' = \alpha$. Kako za trokut $\triangle A'B'C'$ sinusov poučak vrijedi, to je $a : \sin \alpha = b' : \sin \beta = c' : \sin \gamma$. Usporedimo li tu jednakost sa (1), slijedi $b' = b$ i $c' = c$. ■

Slučajeve b) i d) rješava kosinusov poučak.

PROPOZICIJA 3. *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ njegovi kutovi, onda vrijedi*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned} \quad (3)$$

Dokaz. Uzmimo trokut $\triangle ABC$ i uvedimo oznake kao na sl. 59.



Sl. 59.

Iz pravokutnog trokuta $\triangle AC'C$ i $\triangle C'BC$ slijedi pomoću Pitagorinog poučka u slučaju kada je α šiljast kut (sl. 59a)

$$v_c^2 = b^2 - x^2 \quad \text{i} \quad v_c^2 = a^2 - (c - x)^2,$$

a u slučaju kada je tup kut (sl. 59b)

$$v_c^2 = a^2 - (c + x)^2, \quad \text{i} \quad v_c^2 = b^2 - x^2.$$

U prvom slučaju iz navedenih jednakosti slijedi $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$, a u drugom $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$. Kako u prvom slučaju iz pravokutnog trokuta $\triangle AC'C$ slijedi $x = b \cos \alpha$, a u drugom $x = b \cos(180^\circ - \alpha) = -b \cos \alpha$, to u oba slučaja vrijedi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Analogno se dokazuju i druge dvije jednakosti (3). ■

Napomena 1. Druge dokaze sinusovog i kosinusovog poučka upoznali smo u § 7 i § 8.

Napomena 2. U ovom dokazu kosinusovog poučka koristili smo Pitagorin poučak, pa je kosinusov poučak posljedica Pitagorinog. Ako je pak trokut pravokutan, onda je $\gamma = \frac{\pi}{2}$, pa iz treće od jednakosti (3) slijedi $c^2 = a^2 + b^2$, a to je Pitagorin poučak.

Napomena 3. Uočite da iz kosinusovog poučka odmah slijedi i obrat Pitagorinog.

Kao i kod sinusovog poučka, i ovdje vrijedi obrat. Dokažite to sami:

PROPOZICIJA 4. *Ako realni brojevi $a, b, c > 0$ i $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ zadovoljavaju jednakost (3), onda postoji jedinstveni trokut, kojemu su a, b, c duljine stranica i α, β, γ kutovi.* ■

Primijetimo da su sinusov i kosinusov poučak ekvivalentni; točnije, vrijedi:

PROPOZICIJA 5. *Ako su $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ zadani realni brojevi takvi da je $a, b, c > 0, 0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, onda su sustavi*

$$\begin{cases} \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}, \\ \alpha + \beta + \gamma = \pi. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \end{cases} \quad (3)$$

ekvivalentni.

Dokaz. Najprije (4) \implies (3). Iz druge od jednakosti (4) je $\alpha = \pi - \beta - \gamma$, pa redom imamo

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \beta - \gamma) = \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma.$$

Odavde je

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \sin^2 \beta \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma = \\ &= \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \gamma) + (1 - \sin^2 \beta) \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma = \\ &= \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma (\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma) = \\ &= \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma \cos(\beta + \gamma). \end{aligned}$$

Kako je $\beta + \gamma = \pi - \alpha$, to iz prethodne jednakosti slijedi

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha.$$

Stavimo u (4) $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = k$, pa iz prethodne jednakosti slijedi

$$\frac{a^2}{k^2} = \frac{b^2}{k^2} + \frac{c^2}{k^2} - 2 \cdot \frac{b}{k} \cdot \frac{c}{k} \cos \alpha,$$

odnosno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, a to je prva od jednakosti (3). Analogno se dobivaju druga i treća od tih jednakosti.

Dokažimo da (3) \Rightarrow (4). Kako je $0 < \alpha < \pi$, to je $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. Iz prve od jednakosti (3) slijedi

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

pa je

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2} = \frac{1}{2bc} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Stavimo li $\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} = K$, dobit ćemo $\sin \alpha = \frac{K}{2bc}$, odnosno $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{2abc}{K}$. Slično se dobiva da je $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{2abc}{K}$, pa su prve jednakosti u (4) dokazane.

Preostaje da se dokaže da je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. U tu svrhu zbrojimo drugu i treću od jednakosti (3). Dobivamo $a = c \cos \beta + b \cos \gamma$. Kako je $a = k \sin \alpha$, $b = k \sin \beta$, $c = k \sin \gamma$, to iz prethodne jednakosti slijedi $\sin \alpha = \sin(\beta + \gamma)$, pa je ili $\alpha = \beta + \gamma$ ili $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Sada $\alpha + \beta + \gamma \neq \pi$ povlači da je

$$\alpha = \beta + \gamma. \quad (5)$$

Na isti način zbrajanjem prve i treće jednakosti (3) slijedi

$$\beta = \alpha + \gamma. \quad (6)$$

Iz (5) i (6) slijedi $\gamma = 0$, a to je u proturječju s pretpostavkom da je $\gamma > 0$. Dakle je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. ■

9.2. Primjene u planimetriji

Pokažimo sada na primjerima kako se primjenjuje trigonometrija na kosokutni trokut u planimetriji.

Primjer 1. Pokažite da je površina svakog trokuta jednaka poluproduktu dviju stranica i sinusa kuta među njima.

Rješenje. Iz sl. 57a i sl. 57b razabiremo da u oba slučaja vrijedi $v_c = b \sin \alpha$, pa je površina trokuta $P = \frac{1}{2}cv_c = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$. Analogno se dokazuje da je $P = \frac{1}{2}ac \sin \beta$ i $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$. Dakle,

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ca \sin \beta. \quad (7)$$

Napomenimo da dijeljenjem s abc i odavde slijedi sinusov poučak. ■

Primjer 2. Dokažite trigonometrijski da je polumjer R trokutu opisane kružnice dan sa $R = \frac{abc}{4P}$, gdje su a, b, c duljine stranica trokuta, a P njegova površina.

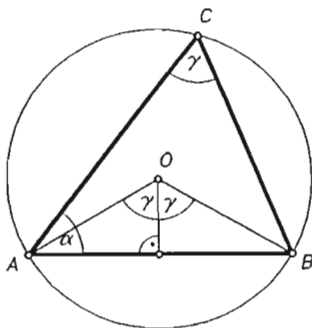
Rješenje. Zbog (7) imamo redom

$$\frac{abc}{4P} = \frac{abc}{2bc \sin \alpha} = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

Odavde zbog (2) odmah slijedi $R = \frac{abc}{4P}$. Drugi dokaz smo dali u prvom dijelu, str. 261. ■

Primjer 3. U kružnicu polumjera 4 upisan je šiljastokutan trokut $\triangle ABC$ sa stranicama $|AB| = 4\sqrt{2}$, $|AC| = 4\sqrt{3}$. Odredite kutove trokuta.

Rješenje. Neka je O središte trokutu opisane kružnice i D nožište spuštene iz O na \overline{AB} (sl. 60). Prema poučku o obodnom i središnjem kutu je $\sphericalangle AOD = \gamma$, pa iz $\triangle ADO$



Sl. 60.

slijedi $\sin \gamma = \frac{|AD|}{|AO|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $\gamma = 45^\circ$. Primjenom sinusovog poučka na trokut $\triangle ABC$ dobivamo $\frac{\sin \beta}{\sin 45^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, tj. $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Kako je trokut $\triangle ABC$ šiljastokutan, to je $\beta = 60^\circ$, pa je $\gamma = 75^\circ$. ■

Primjer 4. Dokažite ako duljine stranica trokuta zadovoljavaju jednakost

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c},$$

onda je stranici b nasuprotan kut jednak $\beta = 60^\circ$.

Rješenje. Zadana jednakost je ekvivalentna sa $a^2 + c^2 - ac = b^2$, pa usporedba s $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ daje $\cos \beta = \frac{1}{2}$, tj. $\beta = 60^\circ$. ■

Primjer 5. Dokažite, ako su a, b, c duljine stranica trokuta, α, β, γ tim stranicama nasuprotni kutovi i P njegova površina, onda vrijedi

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4P}.$$

Rješenje. Iz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ slijedi $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, pa vrijedi

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin \alpha}.$$

Odavde zbog (7) slijedi

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4P}.$$

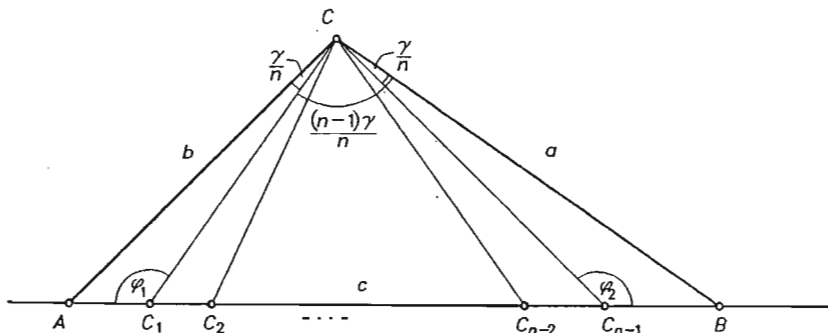
Analogno se vidi da je

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4P}, \quad \operatorname{ctg} \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4P}.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti slijedi tvrdnja. ■

Primjer 6. Kut γ trokuta $\triangle ABC$ podijeljen je zrakama kroz C na n jednakih dijelova. Neka te zrake sijeku stranicu $|AB| = c$ u točkama C_1, \dots, C_{n-1} . Neka je $|AC_1| = c_1$ i $|C_{n-1}B| = c_n$. Dokažite da izraz $\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c}\right) : \left(\frac{1}{c_n} - \frac{1}{c}\right)$ ne ovisi o n .

Rješenje. Primjenom sinusovog poučka redom na trokute $\triangle AC_1C, \triangle C_1BC, \triangle C_{n-1}BC$ i $\triangle AC_{n-1}C$ uz oznake $\sphericalangle AC_1C = \varphi_1$ i $\sphericalangle CC_{n-1}B = \varphi_2$ (sl. 61), dobivamo



Sl. 61.

$$c_1 : b = \sin \frac{\gamma}{n} : \sin \varphi_1, \quad (c - c_1) : a = \sin \frac{(n-1)\gamma}{n} : \sin \varphi_1,$$

$$c_n : a = \sin \frac{\gamma}{n} : \sin \varphi_2, \quad (c - c_n) : b = \sin \frac{(n-1)\gamma}{n} : \sin \varphi_2.$$

Iz prve i treće jednadžbe slijedi

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{c_n b}{c_1 a},$$

a iz druge i četvrte

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{(c - c_n) a}{(c - c_1) b},$$

pa vrijedi

$$\frac{(c - c_1) c_n}{(c - c_n) c_1} = \frac{a^2}{b^2},$$

a odavde je

$$\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c}\right) : \left(\frac{1}{c_n} - \frac{1}{c}\right) = a^2 : b^2. \blacksquare$$

Primjer 7. Dokažite tangensov poučak: Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, α, β, γ tim stranicama nasuprotni kutovi, onda vrijedi

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}, \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2}}.$$

Dokažite i Molweideove⁴ formule

$$(a+b) : c = \cos \frac{\alpha-\beta}{2} : \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

i ostale dvije dobivene cikličkim zamjenama.

Rješenje. Kako je $a = 2R \sin \alpha, b = 2R \sin \beta$ (v. (2)), to redom imamo

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{2R \sin \alpha + 2R \sin \beta}{2R \sin \alpha - 2R \sin \beta} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}. \end{aligned}$$

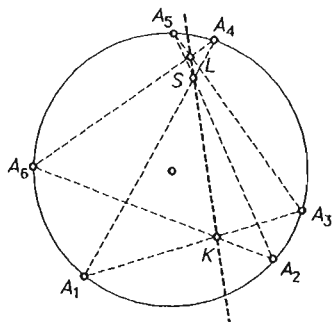
Za dokaz Molweideove formule pođimo od sinusovog poučka $a : c = \sin \alpha : \sin \gamma, b : c = \sin \beta : \sin \gamma$, pa zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned} (a+b) : c &= (\sin \alpha + \sin \beta) : \sin \gamma = (\sin \alpha + \sin \beta) : \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \\ &= (\sin \alpha + \sin \beta) : \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} : 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = \\ &= \cos \frac{\alpha-\beta}{2} : \cos \frac{\alpha+\beta}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Primjer 8. Dokažite Pascalov teorem: Ako su $A_i, i = 1, 2, \dots, 6$, uzastopni vrhovi šesterokuta upisanog u kružnicu, K sjecište od A_1A_3 i A_2A_6 , L sjecište od A_3A_5 i A_4A_6 , onda se dijagonale A_1A_4, A_2A_5 i pravac KL sijeku u jednoj točki.

Rješenje. Neka je S sjecište od A_1A_4 i KL (sl. 62). Tada je

⁴Karl B. Molweide (1774-1825), njemački matematičar i astronom.



Sl. 62.

$$\frac{|KS|}{|LS|} = \frac{P(\triangle A_1KA_4)}{P(\triangle A_1LA_4)} = \frac{\frac{1}{2}|A_1K| \cdot |A_1A_4| \cdot \sin(\sphericalangle KA_1A_4)}{\frac{1}{2}|LA_4| \cdot |A_1A_4| \cdot \sin(\sphericalangle LA_1A_4)}$$

Kako su sinusi obodnih kutova proporcionalni s pripadnim tetivama, to iz prethodne jednakosti slijedi

$$\frac{|KS|}{|LS|} = \frac{|A_1K| \cdot |A_3A_4|}{|A_4L| \cdot |A_1A_6|} \quad (*)$$

Pretpostavimo da se A_2A_5 i KL ne sijeku u S već u nekoj točki S_1 . Tada slično nalazimo da je

$$\frac{|KS_1|}{|LS_1|} = \frac{|A_2K| \cdot |A_5A_6|}{|A_5L| \cdot |A_2A_3|} \quad (**)$$

Iz $\triangle A_1KA_6 \sim \triangle A_2KA_3$, $\triangle A_3LA_4 \sim \triangle A_6LA_5$ nalazimo da je

$$\frac{|A_1K|}{|A_1A_6|} = \frac{|A_2K|}{|A_2A_3|}, \quad \frac{|A_3A_4|}{|A_4L|} = \frac{|A_5A_6|}{|A_5L|}$$

Pomnožimo li ove jednakosti i usporedimo li ih sa (*) i (**) nalazimo da je

$$\frac{|KS|}{|LS|} = \frac{|KS_1|}{|LS_1|}$$

a to povlači da je $S \equiv S_1$ (o tome će još biti riječi u pogl. V). ■

Primjer 9. Dokažite, ako su a, b, c i d redom duljine susjednih stranica konveksnog četverokuta, α kut između stranica a i b , a γ kut između stranica c i d , onda je površina tog četverokuta dana sa

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}},$$

gdje je $2s = a + b + c + d$ opseg četverokuta (Heronova formula za četverokut).

Rješenje. Površina četverokuta je očito jednaka $2P = ab \sin \alpha + cd \sin \gamma$ (nacrtajte sliku). Odavde kvadriranjem slijedi

$$4P^2 = a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd \sin \alpha \sin \gamma - (a^2b^2 \cos^2 \alpha + c^2d^2 \cos^2 \gamma).$$

Prema kosinusovom poučku je

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos \gamma.$$

Uvrštavanjem ove u prethodnu jednakost i koristeći adicioni teorem slijedi

$$4P^2 = a^2 b^2 + c^2 d^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma).$$

Dalje redom imamo

$$\begin{aligned} 16P^2 &= 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd(1 + \cos(\alpha + \gamma)) = \\ &= [2(ab + cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2] \cdot [2(ab + cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2] - \\ &\quad - 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} = \\ &= [(c + d)^2 - (a - b)^2] \cdot [(a + b)^2 - (c - d)^2] - 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} = \\ &= (b + c + d - a)(a + c + d - b)(a + b + d - c)(a + b + c - d) - \\ &\quad - 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}. \end{aligned}$$

Uz oznaku $2s = a + b + c + d$ odavde neposredno slijedi tvrdnja. ■

Napomena 4. Stavimo li u Heronovu formulu za četverokut $d = 0$, iz nje slijedi Heronova formula za površinu trokuta.

Napomena 5. Za tetivni četverokut ($\alpha + \gamma = \pi$), iz Heronove formule, slijedi

$$P = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)},$$

a to je Brahmaguptina formula za površinu tetivnog četverokuta.

Napomena 6. Iz dobivenih rezultata slijedi da od svih konveksnih četverokuta sa zadanim stranicama a, b, c i d najveću površinu ima tetivni četverokut.

Primjer 10. Dokazite kosinusov teorem za četverokut: Ako su a, b, c, d uzastopne stranice četverokuta, e i f njegove dijagonale, $\alpha = \sphericalangle(a, d)$ i $\gamma = \sphericalangle(b, c)$, onda vrijedi (v. sl. 63):

$$e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma). \quad (*)$$

Rješenje. Nad stranicom \overline{AB} prema van konstruiramo $\triangle ABP \sim \triangle CAD$, tako da je $\sphericalangle PAB = \sphericalangle DCA$ i $\sphericalangle PBA = \sphericalangle DAC$ i nad \overline{AD} prema van konstruiramo trokut $\triangle ADQ \sim \triangle CAB$, tako da je $\sphericalangle DAQ = \sphericalangle BCA$ i $\sphericalangle ADQ = \sphericalangle CAB$. Iz tih sličnosti slijedi da je

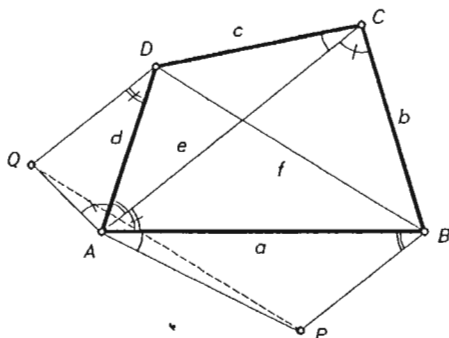
$$|AP| = \frac{ac}{e}, \quad |AQ| = \frac{bd}{e}, \quad |PB| = |DQ| = \frac{ad}{e}.$$

Nadalje je

$$\sphericalangle PBD + \sphericalangle QDB = \sphericalangle CAD + \sphericalangle ABD + \sphericalangle BDA + \sphericalangle CAB = \pi,$$

pa je četverokut $PBDQ$ paralelogram, a to povlači da je $|PQ| = |BD| = f$. Dalje je $\sphericalangle PAQ = \alpha + \gamma$. Primjena kosinusnog teorema na trokut $\triangle PAQ$ daje

$$|PQ|^2 = |AP|^2 + |AQ|^2 - 2|AP| \cdot |AQ| \cos(\sphericalangle PAQ).$$



Sl. 63.

Uvrštavanje nađenih vrijednosti daje

$$f^2 = \left(\frac{ac}{e}\right)^2 + \left(\frac{bd}{e}\right)^2 - 2 \cdot \frac{ac}{e} \cdot \frac{bd}{e} \cdot \cos(\alpha + \gamma),$$

pa odavde slijedi tvrdnja. ■

Napomena 7. Neposredna posljedica kosinusovog poučka za četverokut je **Ptolemejev teorem** (usp. prvi dio, str. 302). Četverokut je tetivni ako i samo ako je produkt njegovih dijagonala jednak zbroju produkata nasuprotnih stranica. Da se to vidi, dovoljno je u (*) uvrstiti $\alpha + \gamma = \pi$

Primjer 11. Neka je trokut $\triangle ABC$ jednakostraničan, a T bilo koja točka ravnine koja nije na tom trokutu opisanom kružnici. Dokažite da postoji trokut kojemu stranice imaju duljine $|TA|$, $|TB|$ i $|TC|$.

Rješenje. Kosinusov poučak primijenjen na četverokut $ABCT$ daje $|TB|^2 = |TA|^2 + |TC|^2 - 2|TA| \cdot |TC| \cos(\sphericalangle ATC + 60^\circ)$ (nacrtajte sliku). Kako je $\sphericalangle ATC \neq 120^\circ$, to slijedi $|TB| < |TA| + |TC|$. Na isti se način dokazuju nejednakosti $|TA| < |TB| + |TC|$ i $|TC| < |TA| + |TB|$, pa takav trokut zaista postoji. ■

Primjer 12. Neka je $\triangle ABC$ trokut i A_1, B_1, C_1 točke redom na pravcima BC, CA, AB . Označimo

$$\lambda = \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|}$$

i

$$\bar{\lambda} = \frac{\sin(\sphericalangle ACC_1)}{\sin(\sphericalangle C_1CB)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle BAA_1)}{\sin(\sphericalangle A_1AC)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle CBB_1)}{\sin(\sphericalangle B_1BA)}.$$

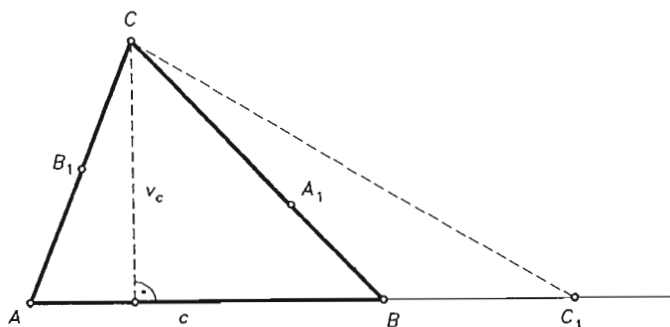
Dokažite da je $\lambda = \bar{\lambda}$.

Rješenje. Uz oznake sa sl. 64. imamo da je

$$2P(\triangle AC_1C) = |AC_1| \cdot v_c, \quad 2P(\triangle BC_1C) = |BC_1| \cdot v_c,$$

odnosno

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{P(\triangle AC_1C)}{P(\triangle BC_1C)}.$$



Sl. 64.

Prema (7) odavde slijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{\frac{1}{2}|AC_1| \cdot |CC_1| \sin(\sphericalangle AC_1C)}{\frac{1}{2}|CC_1| \cdot |CB| \sin(\sphericalangle C_1CB)} = \frac{|AC| \sin(\sphericalangle ACC_1)}{|BC| \sin(\sphericalangle CC_1B)}.$$

Analogno se dobivaju izrazi za $\frac{|BA_1|}{|A_1C|}$ i $\frac{|CB_1|}{|B_1A|}$, pa njihovim množenjem slijedi tvrdnja. ■

Primjer 13. Izvedite iz rezultata prethodnog primjera Cevin teorem (v. prvi dio, str. 256).

Rješenje. Ograničimo se na slučaj kada točke A_1, B_1, C_1 leže redom na stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$. Treba pokazati da se pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki ako i samo ako vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1, \quad (*)$$

tj. ako je $\lambda = 1$.

Najprije neka se ti pravci sijeku u točki S . Primijenimo li na trokute $\triangle ASC, \triangle ASB$ i $\triangle BSC$ sinusov poučak, dobijemo

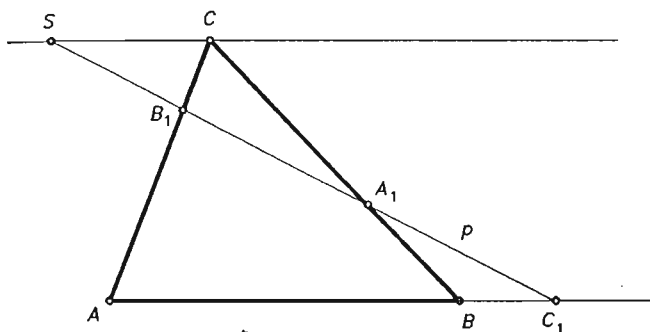
$$\frac{\sin(\sphericalangle ACC_1)}{\sin(\sphericalangle A_1AC)} = \frac{|AS|}{|SC|}, \quad \frac{\sin(\sphericalangle BAA_1)}{\sin(\sphericalangle B_1BA)} = \frac{|SB|}{|AS|}, \quad \frac{\sin(\sphericalangle CBB_1)}{\sin(\sphericalangle C_1CB)} = \frac{|SC|}{|SB|}.$$

Množenjem ovih jednakosti slijedi $\bar{\lambda} = 1$, pa zbog $\lambda = \bar{\lambda}$ slijedi i (*). Obrnuto neka vrijedi (*), tj. $\lambda = 1$ i točke A_1, B_1, C_1 leže na stranicama trokuta. Označimo sa S_1 sjecište pravaca AA_1 i BB_1 i neka CS_1 siječe AB u točki C_2 . Iz $\lambda = 1$ tada slijedi $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|}$, pa je $C_1 \equiv C_2$. ■

Primjer 14. Dokažite ovaj Menelajev teorem⁵: Neka su A_1, B_1, C_1 točke koje redom dijele orijentirane stranice $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ trokuta $\triangle BAC$ u omjerima $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Točke A_1, B_1, C_1 leže na jednom pravcu ako i samo ako vrijedi $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -1$.

Rješenje. Povucimo točkom C paralelu s pravcem AB i neka ona siječe pravac p na kojemu leže točke A_1, B_1, C_1 u točki S (sl. 65). Iz $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle A_1CS$ i $\triangle B_1CS \sim$

⁵Menelaj (oko 100. godine) starogrčki astronom i matematičar. Djelovao u Aleksandriji.



Sl. 65.

u $\triangle B_1AC$, tada slijedi

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BC_1|}{|CS|}, \quad \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CS|}{|AC_1|}.$$

Ako ovo uvrstimo u izraz za λ iz primjera 12, dobit ćemo da je $\lambda = 1$, tj.

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1,$$

tj. $|\lambda_1| \cdot |\lambda_2| \cdot |\lambda_3| = 1$. Kako su dvije od vrijednosti λ_i uvijek pozitivne, a jedna negativna (Páščov aksiom!), to slijedi da je zaista $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -1$.

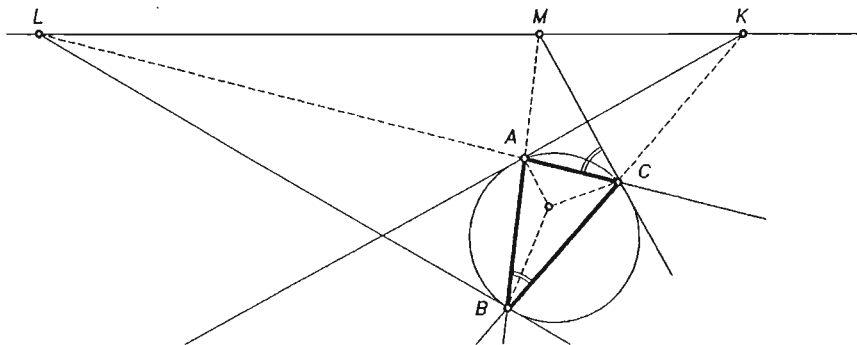
Obrat se dokazuje sasvim analogno kao i u prethodnom primjeru. ■

Navedimo sada i neke primjene Menelajevog i Cevinog teorema.

Primjer 15. Dokazite da tangente povučene u vrhovima trokuta na njemu opisanu kružnicu sijeku nasuprotne stranice u tri kolinearne točke.

Rješenje. Označimo sjecišta tangenata sa suprotnim stranicama kao na sl. 66. Očito je

$$\frac{|MB|}{|MA|} = \frac{|MB|}{|MC|} \cdot \frac{|MC|}{|MA|}.$$



Sl. 66.

Prema poučku o kutu tetive i tangente $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle ACM$, pa je $\triangle MBC \sim \triangle MCA$, zbog čega je $\frac{|MB|}{|MC|} = \frac{|MC|}{|MA|} = \frac{|BC|}{|CA|}$, pa slijedi

$$\frac{|MB|}{|MA|} = \left(\frac{|MC|}{|MA|} \right)^2 = \left(\frac{|BC|}{|CA|} \right)^2.$$

Analogno je

$$\frac{|KC|}{|KB|} = \left(\frac{|CA|}{|AB|} \right)^2, \quad \frac{|LA|}{|LC|} = \left(\frac{|AB|}{|BC|} \right)^2.$$

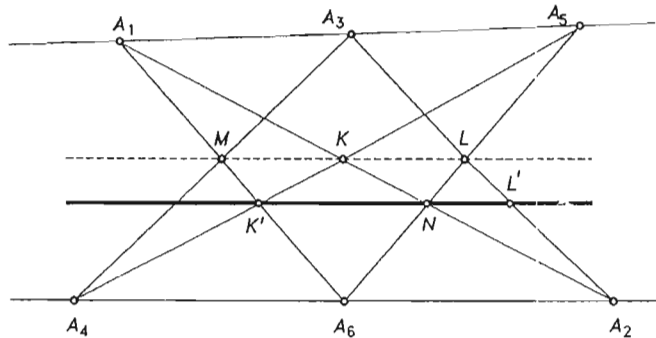
Iz ovih jednakosti slijedi

$$\frac{|MB|}{|MA|} \cdot \frac{|KC|}{|KB|} \cdot \frac{|LA|}{|LC|} = 1,$$

pa su prema Menelajevom teoremu, točke K, L, M kolinearne jer su sva tri djelišna omjera izražena pomoću orijentiranih duljina negativna. ■

Primjer 16. Dokazite Pappusov⁶ teorem: Ako su A_1, A_3, A_5 tri točke na jednom pravcu ravnine, a A_2, A_4, A_6 tri točke na drugom pravcu te iste ravnine, onda sjecišta pravaca A_1A_2 i A_4A_5 , A_2A_3 i A_5A_6 , A_3A_4 i A_6A_1 leže na jednom pravcu.

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su pravci na kojima leže navedene točke paralelni. Ako su naime, ti pravci ukršteni, onda na pravcu okomitom na ravninu određenom tim točkama uzmimo bilo koju točku i iz nje projiciramo te pravce na bilo koju ravninu, koja je paralelna s tom okomicom. Tada će se ti pravci projicirati u paralelne pravce. Kako se pri tom projiciranju čuva incidencija i kolinearne točke preslikavaju u kolinearne to je tvrdnju očito dovoljno dokazati za paralelne pravce. Označimo redom ta sjecišta sa K, L, M (sl. 67), a sjecište pravaca A_1A_2 i A_5A_6 sa N . Točkom



Sl. 67.

N povučemo paralelu sa zadanim pravcima i označimo redom sa K' i L' sjecišta te paralele s pravcima A_2A_3 i A_4A_5 . Tada zbog $\triangle A_1MA_3 \sim \triangle A_6MA_4$, $\triangle A_2LA_6 \sim \triangle L'LN$, $\triangle A_1KA_5 \sim \triangle NKK'$ imamo

$$|\lambda| = \frac{|A_1M|}{|MA_6|} \cdot \frac{|A_6L|}{|LN|} \cdot \frac{|NK|}{|KA_1|} = \frac{|A_1A_3|}{|A_4A_6|} \cdot \frac{|A_6A_2|}{|L'N|} \cdot \frac{|NK'}{|A_5A_1|} =$$

⁶Pappus (oko 250. godine), starogrčki matematičar. Djelovao u Aleksandriji.

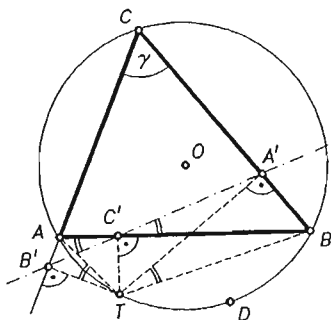
$$= \frac{|A_1 A_3|}{|L' N|} \cdot \frac{|N K'|}{|A_4 A_6|} \cdot \frac{|A_6 A_2|}{|A_5 A_1|}.$$

Zbog $\triangle A_1 A_2 A_3 \sim \triangle N A_2 L'$, $\triangle A_4 A_6 A_5 \sim \triangle K' N A_5$ imamo dalje da je

$$|\lambda| = \frac{|A_1 A_2|}{|A_2 N|} \cdot \frac{|N A_5|}{|A_5 A_6|} \cdot \frac{|A_6 A_2|}{|A_5 A_1|} = \frac{|A_1 N|}{|A_2 N|} \cdot \frac{|N A_5|}{|A_5 N|} \cdot \frac{|A_2 N|}{|N A_1|} = 1.$$

Prema Menelajevom teoremu primijenjenom na $\triangle A_1 A_6 N$ odavde slijedi da su točke K , L i M kolinearne. (Za drugi dokaz v. pogl. V.) ■

Primjer 17. (Simsonov teorem). Ako su A' , B' , C' ortogonalne projekcije točke T ravnine trokuta $\triangle ABC$ redom na pravce BC , CA , AB , onda su A' , B' , C' kolinearne ako i samo ako T leži na tom trokutu opisanoj kružnici.



Sl. 68.

Rješenje. Dokažimo ako je T na opisanoj kružnici, onda su A' , B' , C' kolinearne točke. Neka je \overline{CD} promjer kružnice i pretpostavimo da je T na luku \widehat{AD} . U tom slučaju vrijedi

$$\frac{|BA'|}{|CA'|} = \frac{|BT| \cos(\sphericalangle TBC)}{|CT| \cos(\sphericalangle TCB)}, \quad \frac{|CB'|}{|AB'|} = -\frac{|CT| \cos(\sphericalangle TCA)}{|AT| \cos(\sphericalangle TAC)},$$

$$\frac{|AC'|}{|BC'|} = \frac{|AT| \cos(\sphericalangle TAB)}{|TB| \cos(\sphericalangle TBA)}$$

Izmnoživši ove jednakosti, uzevši u obzir da je $\sphericalangle TAC = \pi - \sphericalangle TBC$, $\sphericalangle TAB = \sphericalangle TCB$, $\sphericalangle TCA = \sphericalangle TBA$ (obodni kutovi nad istim lukovima), dobivamo

$$\frac{|BA'|}{|CA'|} \cdot \frac{|CB'|}{|AB'|} \cdot \frac{|AC'|}{|BC'|} = 1,$$

pa jer je jedan djelišni omjer negativan, a dva pozitivna, iz Menelajevog teorema slijedi da su točke A' , B' , C' kolinearne. Analogno se dokazuju tvrdnje za druge položaje od T .

Obrnuto, neka su A' , B' , C' kolinearne točke. Tada je $\sphericalangle BC'A' = \sphericalangle B'C'A$. Kako su četverokuti $B'TC'A$ i $TBA'C'$ tetivni, to je $\sphericalangle B'TA = \sphericalangle B'C'A$ i $\sphericalangle BTA' = \sphericalangle BC'A'$, pa je $\sphericalangle B'TA = \sphericalangle BTA'$. Dalje je i četverokut $B'TA'C$ tetivni, pa je $\sphericalangle B'TA' = \pi - \gamma$, pa iz prethodne jednakosti slijedi $\sphericalangle ATB = \pi - \gamma$, a to povlači da je i četverokut $ATBC$ tetivni, pa T leži na trokutu opisanoj kružnici. ■

Napomena 8. Pravec A', B', C' zove se **Simsonov⁷ pravac** trokuta $\triangle ABC$ pridružen točki T opisane kružnice. Pokušajte i prvi dio dokaza provesti čisto planimetrijski.

9.3. Trigonometrijske jednakosti i nejednakosti za kutove trokuta

Navest ćemo nekoliko trigonometrijskih identiteta i nejednakosti koje zadovoljavaju kutovi trokuta. Te jednakosti i nejednakosti vrijede i u općenitijoj situaciji, tj. ne samo za kutove trokuta, već i za bilo koja tri kuta za koje vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Primjer 18. Dokažite da za kutove trokuta vrijedi

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Rješenje. Kako je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, to imamo redom

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \\ &= \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta) = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \\ &= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Kako je $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) = \cos \frac{\gamma}{2}$, to vrijedi

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Drugi dio tvrdnje slijedi iz očiglednih jednakosti

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta + \gamma}{2}, \quad \cos \frac{\beta}{2} = \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad \blacksquare$$

Primjer 19. Dokažite da za kutove trokuta vrijedi

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

Rješenje. Iz $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ slijedi

$$0 = \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha},$$

pa odavde slijedi tvrdnja. \blacksquare

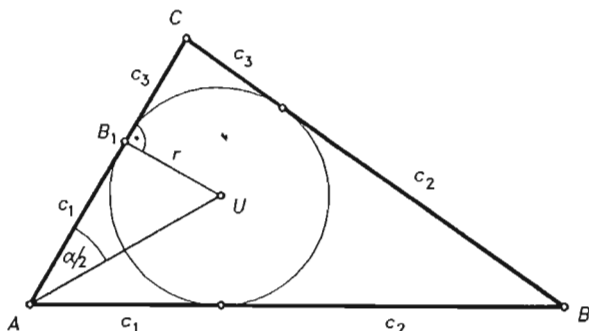
⁷Robert Simson (1687–1768), engleski matematičar.

Primjer 20. Dokažite ako su α, β, γ kutovi trokuta, onda su brojevi $\cos \alpha, \cos \beta$ i $\cos \gamma$ korijeni jednadžbe

$$4R^2 x^3 - 4R(R+r)x^2 + (s^2 + r^2 - 4R^2)x + (2R+r)^2 - s^2 = 0,$$

gdje je s poluopseg trokuta, a r i R polumjeri trokutu upisane i opisane kružnice.

Rješenje. Prema sinusovom poučku je $a = 2R \sin \alpha$, a iz sl. 69. razabiremo da je



Sl. 69.

$2c_1 = 2s - 2(c_2 + c_3) = 2(s - a)$, tj. $c_1 = s - a$, pa iz $\triangle AUB_1$ slijedi $s - a = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Zbrajanjem izvedenih jednakosti dobivamo $2R \sin \alpha + r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = s$. Kako je $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$,

$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$, to prethodnu jednakost možemo napisati u obliku

$$2R\sqrt{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} + r\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = s.$$

Oдавде lako slijedi da je

$$4R^2 \cos^3 \alpha - 4R(R+r) \cos^2 \alpha + (s^2 + r^2 - 4R^2) \cos \alpha + (2R+r)^2 - s^2 = 0,$$

što znači da je $x = \cos \alpha$ korijen navedene jednadžbe. Na isti se način pokazuje da su i $\cos \beta$ i $\cos \gamma$ korijeni te jednadžbe.

Prema Viëtinim formulama iz ove se jednadžbe dobivaju zanimljivi identiteti

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \frac{r+R}{R}, \\ \cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha &= \frac{s^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}, \\ \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \frac{s^2 - (2R+r)^2}{4R^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Primjer 21. Dokažite da za kutove trokuta vrijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= 1, \\ \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} &\geq 1. \end{aligned}$$

Rješenje. Iz $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$ imamo redom

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) &= \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} \left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

a odavde slijedi prva jednakost.

Iz dobivene jednakosti, primjenom nejednakosti Cauchy-Schwartz-Bunjakowskog (§8), slijedi

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leq \\ &\leq \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \\ &= \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Očito znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma$. ■

Primjer 22. Dokažite da za kutove trokuta vrijedi

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Rješenje. Imamo redom

$$\begin{aligned} \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{2} \left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \sin\frac{\gamma}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2} \right) \sin\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Slijedi da je $x = \sin\frac{\gamma}{2}$ korijen jednadžbe

$$x^2 - x \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = 0.$$

Kako korijeni ove jednadžbe moraju biti realni, to je

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 8 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \geq 0,$$

tj.

$$\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8} \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leq \frac{1}{8}. \quad \blacksquare$$

Primjer 23. Dokažite da za kutove trokuta vrijedi

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Rješenje. Imamo redom

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right) = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}\right) + 1 = \\ &= 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + 1 = \\ &= 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

a to je prva jednakost.

Iz ove jednakosti prema nejednakosti iz prethodnog primjera slijedi

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 1 + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}. \blacksquare$$

§ 10. Neke primjene trigonometrije u geodeziji, fizici, mehanici, tehnicima i astronomiji

Niz praktičnih problema u geodeziji rješava se primjenom trigonometrije. Takvi su npr. problem određivanja udaljenosti među točkama na Zemlji ako se ta duljina ne može odrediti izravnim mjerenjem, zatim problem određivanja visine npr. neke planine, zgrade, tornja, stabla itd. U slučajevima kada su te udaljenosti relativno male, dio Zemljine površine smatramo ravnim, pa primjenjujemo "ravnu" ili "običnu" trigonometriju, dok u slučaju velikih udaljenosti primjenjujemo sfernu trigonometriju (§ 11). Jedan od najjednostavnijih takvih problema je ovaj.

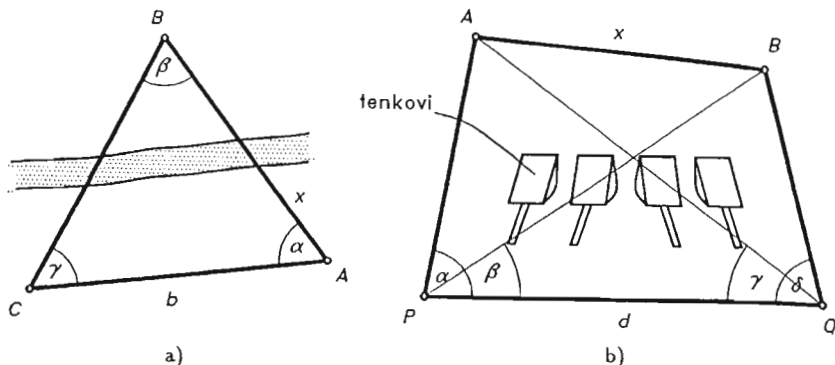
Primjer 1. Izračunajte udaljenost od neke dostupne točke A do neke nedostupne točke B koja se vidi iz točke A .

Rješenje. Prije nego što riješimo ovaj problem, pojasnimo točnije što se točno podrazumijeva pod time. Da je točka A dostupna znači da u točku A može doći motritelj zajedno s potrebnim instrumentarijem. Osim toga, to znači da je dostupna ne samo točka A , nego i neko područje (krajolik) oko A . Pretpostavljamo, dalje, da je svaka točka C iz tog dostupnog područja vidljiva iz A i da možemo mjeriti udaljenost $|AC|$. Da je točka B nedostupna znači da je ona odijeljena od A nekom zaprekom (rijekom, jezerom, tenkovima, itd.) tako da se ne može neposredno izmjeriti udaljenost $|AB|$ (sl. 70a).

U dostupnom području oko točke A odaberimo točku C iz koje se vidi točka B . Izmjerimo duljinu $b = |AC|$ i kutove $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\gamma = \sphericalangle BCA$. Neka je x tražena udaljenost $x = |AB|$. Iz sinusovog poučka za $\triangle ABC$ tada slijedi

$$\frac{x}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} \implies x = \frac{b \sin \gamma}{\sin(\pi - (\alpha + \gamma))} = \frac{b \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}. \blacksquare$$

Primjer 2. Izračunajte udaljenost među nedostupnim točkama A i B , koje su vidljive iz nekog dostupnog područja (sl. 70b).



Sl. 70.

Rješenje. U dostupnom području odaberimo točke P i Q , i izmjerimo udaljenost $d = |PQ|$. Izmjerimo i kutove α , β , γ , δ kao na slici. Prvo izračunajmo $|PA|$ i $|PB|$ kao u prethodnom primjeru:

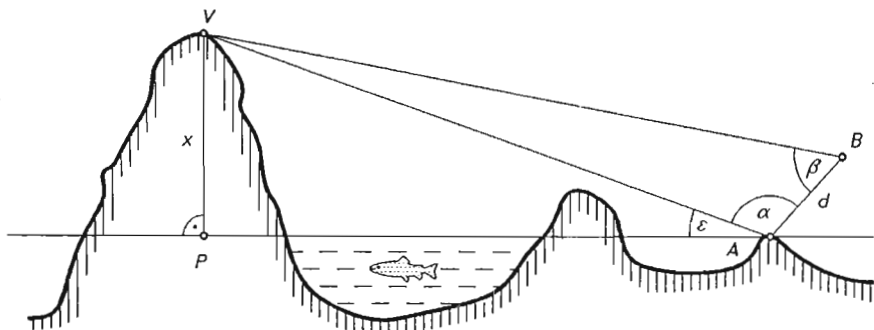
$$|PA| = \frac{d \sin \delta}{\sin(\alpha + \delta)}, \quad |PB| = \frac{d \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

U $\triangle PAB$ znamo sada $|PA|$, $|PB|$ i kut $\alpha - \beta$ među njima. Traženu udaljenost $x = |AB|$ nađimo sada iz kosinusovog poučka:

$$x^2 = |PA|^2 + |PB|^2 - 2|PA||PB|\cos(\alpha - \beta).$$

Za kontrolu možemo slično postupiti i s $\triangle PQB$. ■

Primjer 3. Izračunajte visinu $|VP|$ brijega (od morske razine) od vrha V do podnožja P , ako se jedna dostupna točka A nalazi na morskoj razini (sl. 71).



Sl. 71.

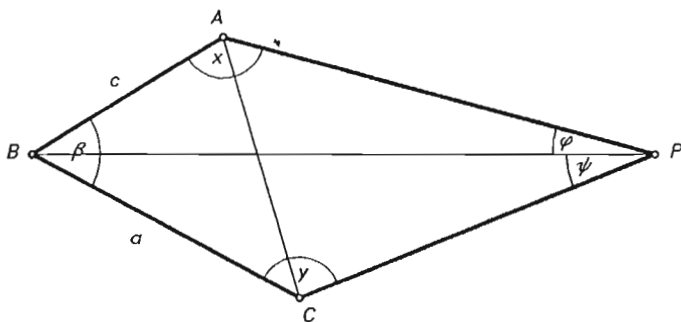
Rješenje. Odaberimo u dostupnom području točku B , izmjerimo $|AB| = d$ i teodolitom izmjerimo kut elevacije $\epsilon = \sphericalangle VAP$, kao i kutove $\alpha = \sphericalangle VAB$ i $\beta = \sphericalangle VBA$. Iz $\triangle VAB$

nalazimo $|VA| = \frac{d \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. Iz pravokutnog $\triangle AVP$ nalazimo

$$x = |VP| = |VA| \sin \epsilon = \frac{d \sin \beta \sin \epsilon}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad \blacksquare$$

U pravljenju raznih geodetskih karata i mapa često se susreće problem poznat kao **Pothenotov problem**.

Primjer 4. Poznate su tri uporišne točke A , B i C koje su već unesene na kartu. Iz neke točke P (u ravnini ABC) izmjereni su kutovi φ i ψ pod kojima se vide dužine \overline{AB} i \overline{BC} (sl. 72). Treba ucrtati točku P na kartu.



Sl. 72.

Rješenje. Za utvrđivanje položaja točke P dovoljno je poznavati kutove $x = \sphericalangle BAP$ i $y = \sphericalangle BCP$. Pri tom su poznate veličine $a = |BC|$, $c = |AB|$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\varphi = \sphericalangle APB$ i $\psi = \sphericalangle BPC$. Iz $\triangle ABP$ i $\triangle BCP$ imamo

$$|BP| = c \frac{\sin x}{\sin \varphi} = a \frac{\sin y}{\sin \psi}.$$

Suma kutova četverokuta je 360° , pa je $x + y = 360^\circ - (\varphi + \beta + \psi)$. Stoga za nalaženje x i y dobivamo sustav jednadžbi

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \varphi}{c \sin \psi}, \quad x + y = 360^\circ - (\varphi + \beta + \psi). \quad (*)$$

Uvedimo pomoćni kut δ zahtjevom

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{a \sin \varphi}{c \sin \psi}, \quad \text{tj.} \quad \delta = \operatorname{arctg} \left(\frac{a \sin \varphi}{c \sin \psi} \right).$$

Tada prvu jednadžbu u (*) možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} &= \frac{\operatorname{tg} \delta - 1}{\operatorname{tg} \delta + 1} \iff \frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} = \operatorname{tg}(\delta - 45^\circ) \iff \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \\ &= \operatorname{tg}(\delta - 45^\circ) \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \iff \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(45^\circ - \delta) \operatorname{tg} \frac{\varphi + \beta + \psi}{2}. \end{aligned}$$

Stoga za x , y dobivamo sustav jednadžbi

$$x + y = 360^\circ - (\varphi + \beta + \psi), \quad x - y = 2 \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg}(45^\circ - \delta) \operatorname{tg} \frac{\varphi + \beta + \psi}{2} \right]. \quad (**)$$

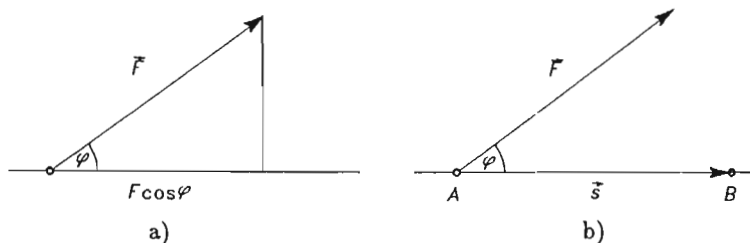
Pri tom treba upozoriti na slučaj $\frac{x+y}{2} = 90^\circ$, tj. $x+y = 180^\circ$, pa dakle $\varphi + \beta + \psi = 180^\circ$. To znači da je $ABCP$ tetivni četverokut i točka P može biti bilo koja točka na opisanoj kružnici oko $\triangle ABC$ (dokažite to sami). ■

Sada spomenimo samo neke od primjena trigonometrije u mehanici, fizici i tehnici.

Pri rastavu sila (ili neke druge vektorske veličine) na dvije okomite komponente (u prostoru na tri komponente), treba silu (tj. vektor) \vec{F} projicirati na te smjerove.

Kao primjer promotrimo djelovanje konstantne sile \vec{F} na tijelo koje se giba po kosini. Ako je nagib kosine φ , onda njena projekcija na horizontalnu ravninu ima veličinu $F \cos \varphi$ (sl. 73a), gdje je $F = |\vec{F}|$. Radnja koju konstantna sila načini na putu $\vec{s} = \overline{AB}$ je po definiciji (sl. 73b)

$$R = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \varphi.$$



Sl. 73.

Primjer 5. Pod djelovanjem sile teže tijelo se giba po kosini. Akceleracija tog gibanja je n puta manja od akceleracije slobodnog pada, a koeficijent trenja je k . Odredite kut x koji kosina zatvara s horizontalnom ravninom.

Rješenje. Težinu T tijela rastavimo na dvije okomite komponente od kojih je jedna okomita na kosinu i iznosi $N = T \cos x$, a druga u smjeru kosine iznosi $T \sin x$ (sl. 74). Sila trenja f proporcionalna je normalnoj komponenti, tj. $f = kT \cos x$.

Gibanje po kosini se odvija zbog djelovanja sile $T \sin x - kT \cos x$. Akceleracija je jednaka (sjetite se $\vec{F} = m\vec{a}$):

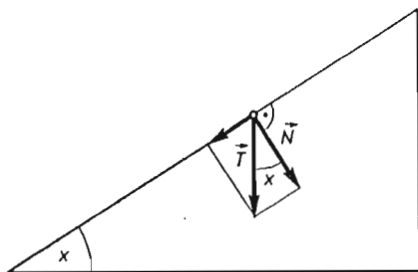
$$\frac{T \sin x - kT \cos x}{m} = g(\sin x - k \cos x),$$

gdje je m masa tijela, a g akceleracija sile teže. Prema pretpostavci je

$$g(\sin x - k \cos x) = \frac{1}{n}g.$$

Dobivamo, dakle, trigonometrijsku jednadžbu

$$\sin x - k \cos x = \frac{1}{n}.$$



Sl. 74.

Uvođenjem pomoćnog kuta $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ (usp. § 7, Propozicija 1), dobivamo jednadžbu

$$\sin(x - \alpha) = \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}. \quad (*)$$

Zbog fizikalnih razloga je očito $0 < k < 1$, $n > 1$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Ova jednadžba ima rješenje samo za $n\sqrt{1+k^2} \geq 1$, što je zbog $n > 1$ uvijek ispunjeno. Za $-\frac{\pi}{2} < x - \alpha < \frac{\pi}{2}$ dobivamo

$$x = \alpha + \arcsin \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}.$$

Odatle se transformacijama iz §6. dobiva

$$x = \arcsin \frac{k\sqrt{n^2k^2 + n^2 - 1} + 1}{n(k^2 + 1)}. \quad \blacksquare$$

Brojne su primjene trigonometrije u optici. Evo tipičnog primjera.

Primjer 6. Zraka svjetlosti prolazi kroz staklenu ploču koja je omeđena paralelnim ravninama. Dokažite da je izlazna zraka paralelna s ulaznom i odredite pomak zrake.

Rješenje. Neka je n indeks loma svjetlosti prolaskom kroz ploču, a d debljina ploče. Neka je AB zraka ulaska svjetlosti u ploču, gdje se lomi po pravcu BC , da bi napustila ploču po zraci CD (sl. 75). Prema zakonu o indeksu loma ("Snellov zakon") vrijedi

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

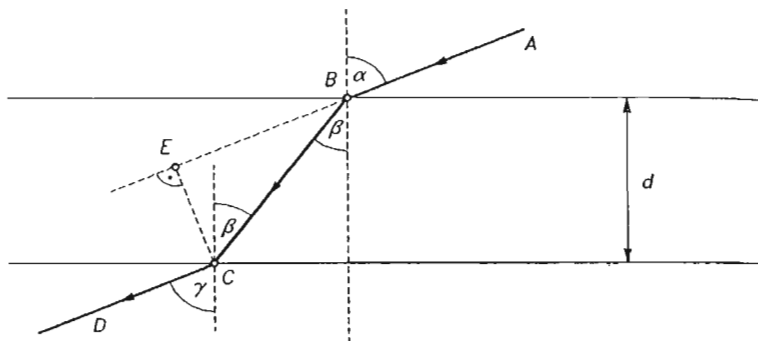
a prema istom zakonu pri izlasku zrake svjetlosti iz ploče vrijedi

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}.$$

Odavde slijedi da je $\sin \alpha = \sin \gamma$ pa zbog $\alpha, \gamma \in (0, \pi/2)$, $\alpha = \gamma$.

Dakle, prolaskom kroz ploču smjer zrake se ne mijenja. Izračunajmo međutim "lom" BE zrake svjetlosti u ploči. Iz $\triangle BCE$ za pomak $|CE|$ imamo

$$|CE| = |BC| \sin \sphericalangle CBE = |BC| \sin(\alpha - \beta).$$



Sl. 75.

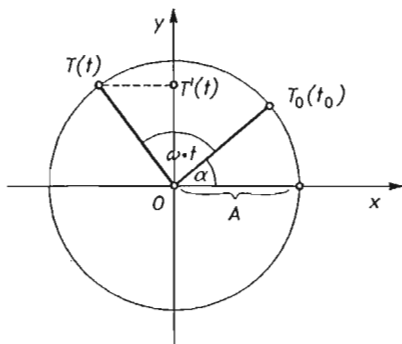
Odatle slijedi

$$|CE| = \frac{d}{\cos \beta} \sin(\alpha - \beta) = \frac{d \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}. \blacksquare$$

Primjer 7. Harmonijsko gibanje. Ako se materijalna točka giba po kružnici polumjera A , onda njena ortogonalna projekcija na bilo koji pravac kroz središte kružnice vrši gibanje koje zovemo harmonijskim gibanjem ili titranjem. Takvo gibanje nastaje kada se uteg obješen o elastično pero pamakne iz položaja ravnoteže; tada on pod utjecajem elastične sile titra oko tog položaja.

Nađimo sada zakon toga gibanja, tj. odredimo položaj materijalne točke u nekom momentu vremena t . U tu svrhu uzмимо da je središte u ishodištu koordinatnog sustava i uzмимо da se materijalna točka giba po kružnici jednolikom kutnom brzinom ω rad/s u smislu obrnutom od kretanja kazaljke na satu i razmotrimo projekciju materijalne točke na os ordinata. U momentu početka gibanja $t = 0$, neka je T_0 položaj materijalne točke. Za vrijeme t polumjer $\overline{OT_0}$ opiše kut $\omega \cdot t$, pa sa sl. 76. razabiremo da je položaj T materijalne točke određen sa $|OT| = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$, tj. udaljenost $y(t)$ materijalne točke od položaja ravnoteže dana je sa

$$y(t) = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (*)$$



Sl. 76.

Dakle, zakon toga gibanja je dan sa (*), pa je graf gibanja sinusoida. Pozitivan realan broj A zove se amplituda, a kut α se zove faza gibanja. Amplituda je očito maksimalni otklon materijalne točke od položaja ravnoteže, a faza kut otklona od položaja ravnoteže na početku gibanja. Očito je broj titraja u 1 s jednak $\omega/2\pi$ i zove se frekvencija gibanja. Uočite da je frekvencija gibanja jednaka recipročnoj vrijednosti perioda gibanja, tj. perioda frekvencije (*).

Očito se (*) može napisati u obliku

$$y(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t,$$

gdje je $a = A \cos \alpha$, $b = A \sin \alpha$. No vrijedi i obrnuto. Svaka funkcija

$$y(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (**)$$

$a, b \in \mathbb{R}$ je prikaz harmonijskog gibanja jer se može prikazati u obliku $y(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$, gdje je $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

U primjenama često treba naći izraz za gibanje koje nastaje superpozicijom dvaju harmonijskih gibanja u istom smjeru jednakih frekvencija (perioda), a različitih amplituda i faza. Na primjer, u elektrotehnici često treba naći zbroj dviju izmjeničnih struja jednake frekvencije, a različitih jakosti i različitih faza, koje teku istim vodičem.

Neka su, dakle, $y_i(t) = A_i \sin(\omega t + \alpha_i)$, $i = 1, 2$, dva takva gibanja. Tada je

$$\begin{aligned} y_1(t) + y_2(t) &= A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) = \\ &= (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_1) \cos \omega t + (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Stavimo $a = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2$, $b = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2$, pa je

$$y_1(t) + y_2(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

oblika (**), tj. opet harmonijsko gibanje iste frekvencije. Amplituda toga gibanja je

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

a faza α je određena sa

$$\sin \alpha = \frac{1}{A}(A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2), \quad \cos \alpha = \frac{1}{A}(A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2).$$

Lako se vidi, ako se radi o sastavljanju harmonijskih gibanja istog smjera, da superpozicija takvih gibanja ne mora biti harmonijsko gibanje.

Čest je slučaj kada treba superponirati dva harmonijska gibanja jednakog perioda, različitih amplituda i faza u okomitim smjerovima. Uzmimo da je prvo gibanje u smjeru osi x dano sa $x(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$, a drugo u smjeru osi y sa $y(t) = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$. Ako su faze jednake, tj. $\alpha_1 = \alpha_2$, onda eliminacijom parametra t nalazimo da je $\frac{x}{A_1} = \frac{y}{A_2}$, pa se rezultantno gibanje vrši po pravcu $y = \frac{A_2}{A_1}x$. Ako su faze različite i ako je, na primjer, $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi/2$, onda je $x(t) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_2)$, pa se eliminacijom parametra t dobije da se rezultantno gibanje vrši po elipsi $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$. ■

Navedimo nekoliko primjera primjene trigonometrije u tehnici.

Primjer 8. Kod remenskog prijenosa zadani su polumjeri R i r kotača i osovinski razmak d . Treba naći duljinu remena (sl. 77).

Rješenje.

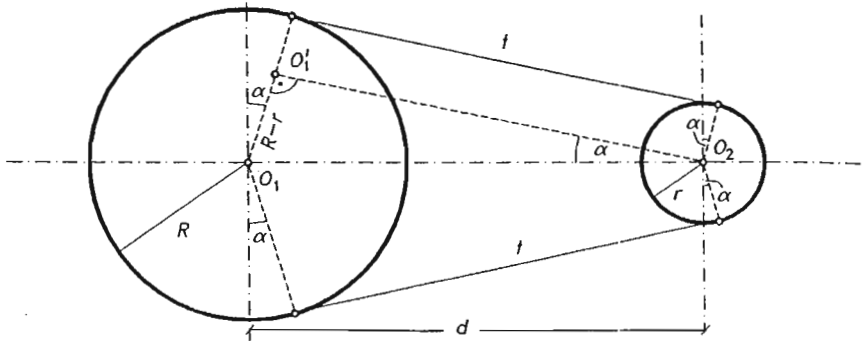
Ako je remen nategnut na kotače, onda je njegova duljina L jednaka zbroju duljine onog luka veće kružnice kojemu središnji kut iznosi $\pi + 2\alpha$ i onog luka manje kružnice kojemu je središnji kut $\pi - 2\alpha$ i dvostruke duljine vanjske zajedničke tangente tih dviju kružnica (sl. 77). Iz trokuta $\triangle O_1O_2O'_1$ nalazimo da je $\frac{R-r}{d} = \sin \alpha$, tj. $\alpha = \arcsin \frac{R-r}{d}$.

Dalje je $t = |O_1O'_1| = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}$, pa je

$$L = R(\pi + 2\alpha) + r(\pi - 2\alpha) + 2\sqrt{d^2 - (R-r)^2},$$

i konačno

$$L = \pi(R+r) + 2(R-r) \arcsin \frac{R-r}{d} + 2\sqrt{d^2 - (R-r)^2}.$$



Sl. 77.

U praksi je čest slučaj da je kut α mali, i se može uzeti da je $\sin \alpha \sim \alpha$, pa u tom slučaju dobivamo

$$L \sim \pi(R+r) + \frac{2}{d}(R-r)^2 + 2d.$$

Ako se radi o ukrštenom prijenosu, onda se slično nalazi da je

$$L = \left(\pi + 2 \arcsin \frac{R+r}{d} \right) (R+r) + 2\sqrt{d^2 - (R+r)^2},$$

ili

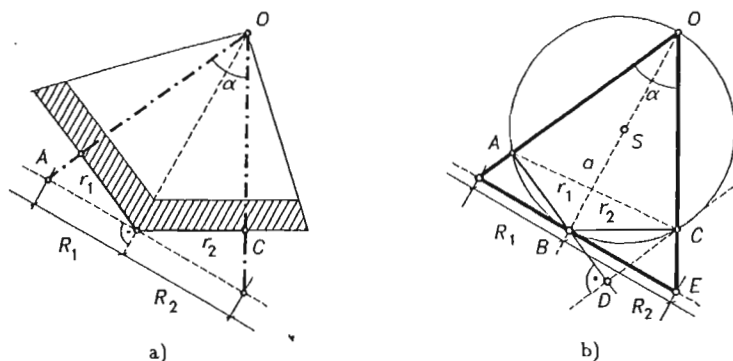
$$L \sim \pi(R+r) + \frac{2}{d}(R+r)^2 + 2\sqrt{d^2 - (R+r)^2}. \blacksquare$$

Primjer 9. Osi dvaju konusnih zupčanika sijeku se pod kutom α . Kod konstrukcije zupčanika važnu ulogu igraju tzv. dopunski polumjeri R_1 i R_2 (sl. 78). Za zadane polumjere zupčanika r_1 i r_2 i zadani kut α odredite R_1 i R_2 .

Rješenje.

Na sl. 78b vidimo da je četverokut $OABC$ tetivni i da je $\triangle ACD \sim \triangle BEC$. Stoga je $R_2 : r_2 = |AC| : |AD|$. Kako je $|AC|^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \alpha$ i $|AD| = r_1 + r_2 \cos \alpha$, to je

$$R_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2 \cos \alpha} \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \alpha}.$$



Sl. 78.

Na isti se način nalazi da je

$$R_1 = \frac{r_1}{r_2 + r_1 \cos \alpha} \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \alpha}.$$

Ovim je formulama uobičajeno dati i drugi oblik. Ako sa z_i , $i = 1, 2$ označimo broj zubaca prvog i drugog zupčanika, onda mora biti $\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}$, pa dobivamo

$$R_1 = r_1 \cdot \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2 \cos \alpha}}{z_2 + z_1 \cos \alpha}, \quad R_2 = r_2 \cdot \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2 \cos \alpha}}{z_1 + z_2 \cos \alpha}.$$

Čest je slučaj da su osi zupčanika okomite, pa je u tom slučaju

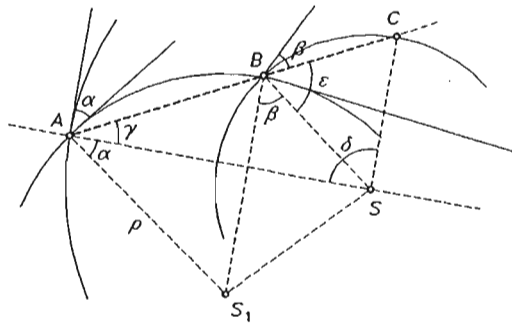
$$R_1 = r_1 \cdot \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \sqrt{r_1^2 + r_2^2}, \quad R_2 = r_2 \cdot \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} \sqrt{r_1^2 + r_2^2}. \blacksquare$$

Primjer 10. Kod konstrukcije centrifugalne crpke koristi se zadatak: Zadane su dvije koncentrične kružnice polumjera R i r , $R > r$ i kutovi α , β , $\alpha < \beta$. Treba konstruirati kružnicu koja prolazi točkom veće kružnice, siječe veću kružnicu pod kutom α , a manju pod kutom β . Odredite polumjer te kružnice (sl. 79).

Rješenje. Neka je S središte zadanih kružnica i S_1 središte tražene kružnice i neka ona u točki A siječe veću, a u B siječe manju kružnicu. Označimo sa ρ polumjer tražene kružnice. Neka AB siječe manju kružnicu još u točki C . Trokuti $\triangle ABS_1$ i $\triangle BSC$ su jednakokrani i osim toga je $\sphericalangle S_1AS = \alpha$ i $\sphericalangle S_1BS = \beta$ (kutovi s okomitim krakima). Označimo $\sphericalangle BAS = \gamma$, $\sphericalangle ASC = \delta$ i $\sphericalangle CBS = \epsilon$. Tada je $\delta = 180^\circ - (\gamma + \epsilon)$, $\epsilon = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$, pa slijedi $\delta = \alpha + \beta$. Odavde slijedi konstrukcija. Spoji se A sa S i konstruira kroz S pravac koji s AS zatvara kut $\delta = \alpha + \beta$. Taj pravac siječe manju kružnicu u C . Drugo sjecište pravca AC sa manjom kružnicom je točka B tražene kružnice. Pomoću zadanih kutova α i β sada se lako konstruira središte S_1 tražene kružnice.

Pomoću kosinusovog poučka iz trokuta $\triangle AS_1S$ i $\triangle BS_1S$ dobivamo $|S_1S|^2 = \rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \alpha$ i $|S_1S|^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \beta$. Odavde je

$$\rho = \frac{R^2 - r^2}{2(R \cos \alpha - r \cos \beta)}. \blacksquare$$



Sl. 79.

Primjer 11. Kanal širine h ima pravokutni zakret. Odredite dimenzije maksimalnog pravokutnog splava koji može proći kroz taj kanal (v. sl. 80).

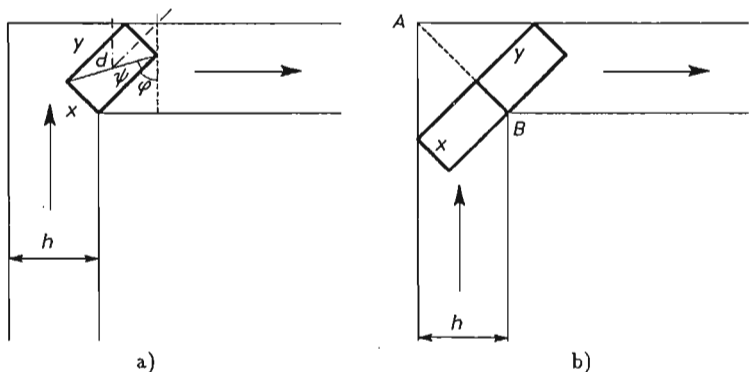
Rješenje. Očito je da kvadratna splav dimanzija $h \times h$ može proći kanalom bez ikakve rotacije oko svog središta.

Promotrimo sada pravokutni splav dimenzija $x < y$, $y > h$ i njegov prolaz kroz zakret kanala. Splav se tada mora zakrenuti oko svojeg težišta za neki kut, pa neka je φ najveća vrijednost tog kuta. Razlikujemo dva slučaja:

i) $\varphi < \frac{\pi}{4}$. Tada sa sl. 80a imamo da ako je d dijagonala, a ψ kut dijagonale i stranice, da je $x = d \sin \psi$, $y = d \cos \psi$ i $d \leq h\sqrt{2}$. Površina splavi je $P = xy = d^2 \sin \psi \cos \psi = \frac{1}{2}d^2 \sin 2\psi \leq \frac{1}{2}d^2 \leq h^2$.

ii) $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$. Način sprovođenja splavi kroz kanal prikazan na sl. 80b. U tom je slučaju $x + \frac{y}{2} \leq |AB| = h\sqrt{2}$, pa je površina

$$P = 2x \frac{y}{2} \leq 2 \left(\frac{x + \frac{y}{2}}{2} \right)^2 \leq h^2.$$



Sl. 80.

Jednakost se dostiže samo za $x = \frac{h}{\sqrt{2}}$, $y = h\sqrt{2}$.

Dakle, samo su dvije takve maksimalne splavi: dimenzija $h \times h$ i $h\sqrt{2} \times \frac{h}{\sqrt{2}} \approx 1,414 h \times 0,707 h$. ■

Evo i nekih primjera iz astronomije.

Primjer 12. Odredite brzinu (u m/s) Zagreba (geografska širina Zagreba je $\varphi = 45^{\circ}48'54''$, a polumjer Zemlje $R = 6370$ km) prilikom rotacije oko Zemljine osi.

Rješenje. Izračunajmo radijus ϱ kružnice na geografskoj širini Zagreba. Odmah vidimo da je $\varrho = R \sin(90^{\circ} - \varphi) = R \cos \varphi$. Za 24 sata prevaljeni put je $2\pi\varrho$. Stoga je tražena brzina

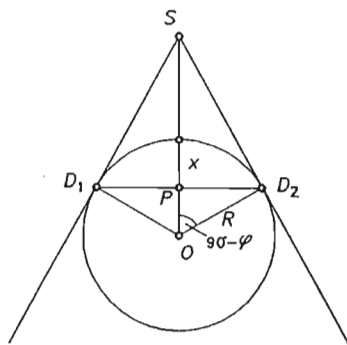
$$v = \frac{2\pi\varrho}{24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ m/s,} \quad \text{odnosno} \quad v = 322,8 \text{ m/s.} \quad \blacksquare$$

Primjer 13. Kolika je srednja udaljenost Mjeseca od Zemlje ako je srednja paralaksa Mjeseca (kut pod kojim se iz središta Mjeseca vidi polumjer Zemlje) $p = 57'$?

Rješenje. Tražena srednja udaljenost je jednaka $R \operatorname{ctg} p$, odnosno 384 148 km. ■

Primjer 14. Satelit kruži oko Zemlje na udaljenosti $h = 100$ km. Koliko se postotaka Zemljine površine vidi iz satelita? Ako je satelit nad sjevernim polom, do koje se geografske širine vidi iz satelita?

Rješenje. Uvedimo oznake kao na sl. 81. Kako je $\triangle OD_2P \sim \triangle OSD_2$, to slijedi $R : (R - x) = (R + h) : R$. Odavde je $x = \frac{hR}{R+h}$, pa je površina dijela Zemljine kugle



Sl. 81.

koja se vidi iz satelita jednaka $P = 2R\pi x = \frac{2hR^2\pi}{R+h}$ (površina kugline kapice, v. pogl. V)

ili u postocima $p = \frac{50h}{R+h}$. Za $R = 6370$ km i $h = 100$ km dobiva se $p = 0,77\%$. Ako sjevernu geografsku širinu mjesta D_1 (ili D_2) označimo sa φ , onda je $\sphericalangle D_2OS = 90^{\circ} - \varphi$, pa iz $\triangle OD_2S$ nalazimo $\sin \varphi = \frac{R}{R+h}$, tj. $\varphi = 79^{\circ}54'48''$. ■

Još neke primjene trigonometrije u astronomiji napraviti ćemo u § 11, Sferna trigonometrija.

§ 11. Sferna trigonometrija

11.1. Osnovni pojmovi

Kao što smo istaknuli u Uvodu, sferna se trigonometrija iz potreba navigacije, astronomskih promatranja itd. počela razvijati čak i ranije nego obična (ravninska) trigonometrija. Ona i danas ima veliku važnost u pomorskoj, zrakoplovnoj i satelitskoj navigaciji, astronomiji, geofizici i astrofizici, balistici i drugome.

Mi ćemo u ovom paragrafu pokazati neka osnovna svojstva i činjenice iz sferne trigonometrije.

Sfera je skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od čvrste točke O koja se zove središte ili centar sfere, a ta udaljenost radijus R sfere. Dakle, sfera je skup

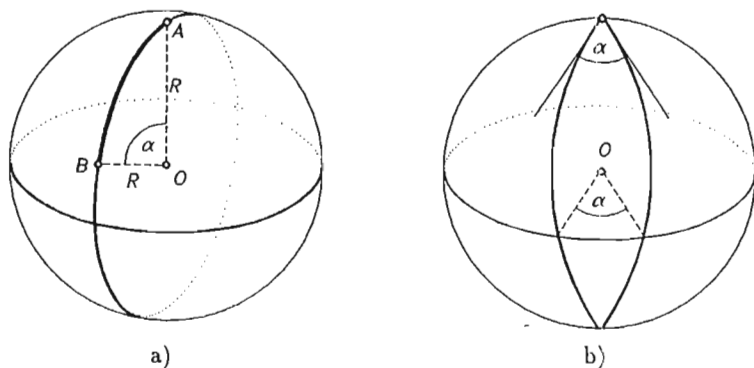
$$S^2(O; R) = \{T \in \mathbb{R}^3 \mid d(O, T) = R\}.$$

Sfera s centrom u ishodištu O prostornog koordinatnog sustava i radijusa 1 zove se **standardna sfera** i bilježi sa S^2 . Dakle $S^2 = S^2(O; 1)$.

Ako sferu presiječemo ravninom kroz njeno središte, u presjeku dobivamo **veliku kružnicu** sfere čiji je radijus jednak radijusu sfere.

Za svake dvije točke $A, B \in S^2(O; R)$ koje nisu dijametralno suprotne (kaže se još **antipodalne** i piše $A \neq -B$) postoji očito jedinstvena velika kružnica na kojoj one leže (sl. 82a); ta se kružnica dobiva kao presjek ravnine kroz O, A, B i sfere $S^2(O; R)$. Ako su A i B antipodalne točke (tj. $A = -B$), onda postoji beskonačno mnogo takvih velikih kružnica kroz A i B .

Pod **udaljenošću** točaka A i B razumijevamo duljinu manjeg luka \widehat{AB} velike kružnice kroz A i B . Luku \widehat{AB} pripada potpuno određeni kut $\sphericalangle AOB = \alpha$. Ako je



Sl. 82.

taj kut izmjeren u radijanima, onda je duljina luka \widehat{AB} dana s

$$|\widehat{AB}| = R\alpha.$$

Dvokut je dio sfere među dvjema velikim polukružnicama. Možemo dakle zamisljati da je dvokut kao vanjska površina kriške naranče. Dvokut je određen svojim kutom, tj. kutom između pripadnih kružnica (sl. 82b), odnosno tangentama na te kružnice i zove se **kut dvokuta**. Kut dvokuta može biti bilo koji kut između 0 i π radijana. Ustvari, dvije velike kružnice određuju očito na sferi četiri dvokuta od kojih su po dva dijametralno suprotna, te su kongruentna.

Površina P_α sfernog dvokuta s kutom α očito je razmjerna kutu α , tj. $P_\alpha = k\alpha$ za neku konstantu k . No, za $\alpha = \pi$, površina dvokuta je polusfera koja ima površinu $P_\pi = 2R^2\pi$ (v. pogl. V), pa je $k = 2R^2$ i stoga dobivamo

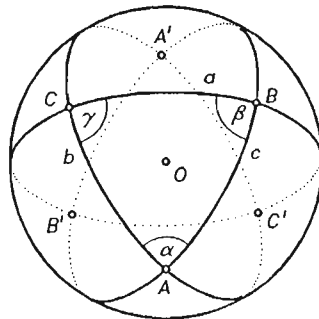
$$P_\alpha = 2R^2\alpha.$$

11.2. Sferni trokut

Neka su sada $A, B, C \in S^2(O; R)$ tri točke na sferi središta O i radijusa R , od kojih nikoje dvije nisu antipodalne točke. Spojimo li te tri točke trima lukovima velikih kružnica (a duljina svakog luka manja je od $R\pi$), onda se dio sfere omeđen tim lukovima zove **sferni trokut** s **vrhovima** u A, B, C i obilježava s $\triangle ABC$.

Lukovi $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$ obilježavaju se redom s a, b, c i zovu **stranice** trokuta $\triangle ABC$. **Kutovi** tog trokuta su kutovi α, β, γ među njegovim stranicama (tj. među tangentama na velike kružnice u vrhovima). Ti kutovi su zapravo **diedralni kutovi**, tj. kutovi među ravninama velikih kružnica. Stranice i kutovi sfernog trokuta zovu se **elementi sfernog trokuta** (sl. 83), analogno trokutu u planimetriji.

Sfernom trokutu $\triangle ABC$ pridruženi su još neki sferni trokuti. Neka su A', B', C' redom antipodalne točke od A, B, C (tj. $A' = -A$ itd.). **Sutrokuti** trokuta $\triangle ABC$ su na sl. 83. trokuti $\triangle BCA', \triangle ACB', \triangle ABC'$. Trokut $\triangle ABC$ sa svakim



Sl. 83.

od sutrokuta čini sferni dvokut. Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ zovu se **suprotni sferni trokuti**.

Dva sferna trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ na sferi $S^2(O; R)$ su **sukladna** (ili **konkruentna**) ako postoji bijekcija $f: \{A, B, C\} \rightarrow \{A', B', C'\}$, tako da je $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ i $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, tj. korespondentni elementi jednaki. Kao i u planimetriji, i ovdje vrijedi da su dva sferna trokuta \triangle i \triangle' sukladna ako i samo ako postoji izometrija $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tako da je $f(\triangle) = \triangle'$. Sukladnost trokuta bilježimo sa $\triangle \cong \triangle'$.

Uočimo da zbog definicije sfernog trokuta slijedi da za stranice i kutove sfernog trokuta na $S^2(O; R)$ vrijedi

$$0 < a, b, c, < R\pi, 0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi.$$

Za elemente sfernog trokuta $\triangle ABC$ vrijede neke nejednakosti analogne onima u planimetriji, ali i neke druge.

TEOREM 1. 1) $a + b > c$, $|a - b| < c$ (**nejednakost trokuta**);

2) $\alpha + \beta < \gamma + \pi$;

3) $a = b \iff \alpha = \beta$ (*nasuprot jednakim stranicama leže jednaki kutovi i obrnuto*; tzv. **pons asinorum**);

4) $a < b \iff \alpha < \beta$ (*nasuprot većoj stranici leži veći kut i obrnuto*);

5) $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$, $0 < a + b + c < 2R\pi$.

Ove će tvrdnje postupno slijediti iz narednih diskusija. Iz svojstva 5) slijedi da je $\alpha + \beta + \gamma > \pi$, pa se kut $\epsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ zove **sferni eksces** sfernog trokuta.

TEOREM 2. Površina P sfernog trokuta na sferi $S^2(O; R)$ jednaka je produktu ekscesa i kvadrata radijusa, tj.

$$P = R^2\epsilon.$$

Dokaz. Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'BC$ su sutrokuti i zajedno čine dvokut (sl. 84), pa vrijedi $P + P(\triangle A'BC) = 2R^2\alpha$. Zbrojimo li takve tri analogne relacije, dobivamo

$$3P + P(\triangle A'BC) + P(\triangle AB'C) + P(\triangle ABC') = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma). \quad (*)$$

S druge strane, trokuti $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$, $\triangle AB'C$ i $\triangle A'B'C$ prekrivaju polusferu i kako je $\triangle A'B'C \cong \triangle ABC'$, dobivamo

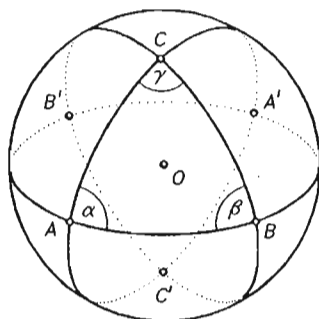
$$P + P(\triangle A'BC) + P(\triangle AB'C) + P(\triangle ABC') = 2R^2\pi. \quad (**)$$

Oduzimanjem (*)-(**) slijedi

$$P = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2\epsilon. \quad \blacksquare$$

Ako su kutovi u stupnjevim, onda je površina sfernog trokuta

$$P = \frac{R^2\pi\epsilon}{180}.$$



Sl. 84.

Iz jednakosti $\varepsilon = P/R^2$ slijedi da se sferni eksces mijenja i da je različit kod trokuta različite veličine. Na istoj sferi (R konstantan), sferni eksces raste zajedno s površinom.

Najveći trokut na sferi jest polusfera (točnije granični položaj je polusfera; to možemo zamisliti kao da C' dođe blizu \widehat{AB}). Tada je površina trokuta $2R^2\pi$, pa je sferni eksces 2π i stoga je zbroj kutova $\alpha + \beta + \gamma < 3\pi$. (Formalni dokaz dat ćemo malo kasnije.)

Uzmemo li pak da je P stalan, a R promjenjiv proizlazi da je eksces to manji što je veći polumjer sfere. U graničnom slučaju, kada je R beskonačno velik, tj. $R = \infty$, sfera prelazi u ravninu, sferni trokut postaje (ravninski) trokut, a sferni će eksces uz konačnu površinu P imati eksces jednak nula. To je u skladu s činjenicom da je suma kutova (običnog) trokuta jednaka π (odnosno 180°). Na taj način možemo smatrati da sferna geometrija prelazi u ravninsku.

11.3. Osnovne veze među elementima sfernog trokuta

Sada ćemo izvesti osnovne formule koje vežu elemente bilo kojeg sfernog trokuta.

TEOREM 3 (kosinsov poučak za stranice). *Vrijedi*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

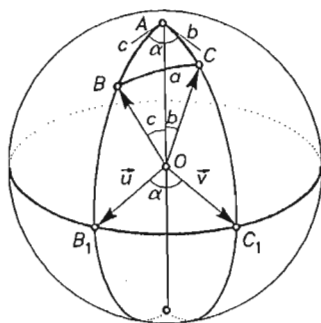
kao i još dvije analogne formule.

Dokaz. Promotrimo standardnu sferu S^2 i uvedimo oznake kao na sl. 85.

Uzmimo da je A "sjeverni pol" i neka velika kružnica kroz A i B , odnosno A i C siječe "ekvator" u točki B_1 , odnosno C_1 . Izrazimo vektore \overrightarrow{OB} i \overrightarrow{OC} pomoću linerno nezavisnih vektora $\vec{u} = \overrightarrow{OB_1}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OC_1}$ i \overrightarrow{OA} . Očito imamo

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cos c + \vec{u} \sin c$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cos b + \vec{v} \sin b.$$



Sl. 85.

Vektor \vec{OA} je okomit na \vec{u} i \vec{v} , pa im je skalarni produkt nula, tj. $\vec{OA} \cdot \vec{u} = \vec{OA} \cdot \vec{v} = 0$, dok je $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos \alpha$. Stoga je

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \vec{OB} \cdot \vec{OC} = (\vec{OA} \cos c + \vec{u} \sin c)(\vec{OA} \cos b + \vec{v} \sin b) = \\ &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha. \end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana. ■

TEOREM 4 (sinusov poučak). *Sinusi kutova sfernog trokuta odnose se kao sinusi nasuprotnih stranica, tj.*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}.$$

Dokaz. Kosinusov poučak daje

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Stoga je (zbog $\alpha \in (0, \pi)$):

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}} = \\ &= \sin a \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c} = K \sin a. \end{aligned}$$

Faktor K je simetrična funkcija u varijablama a, b, c , pa taj isti faktor dobivamo i za $\sin \beta$ i $\sin \gamma$. Odatle slijedi tvrdnja. ■

Dokažimo sada nejednakost trokuta i $a + b + c < 2\pi$. Iz kosinusovog poučka slijedi

$$|\cos \alpha| = \left| \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right|.$$

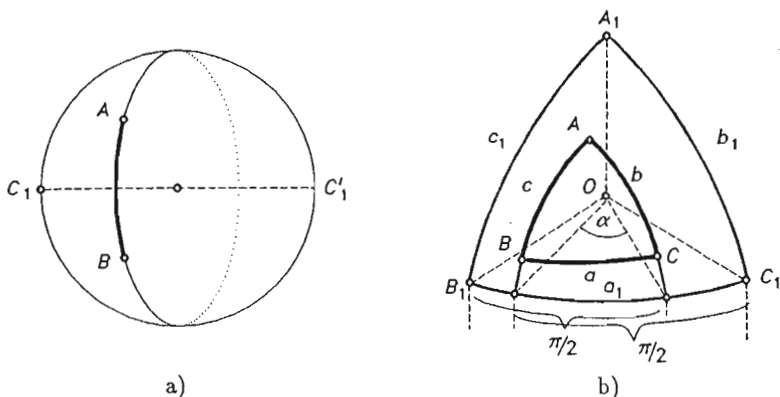
Zbog $|\cos \alpha| < 1$, to je ekvivalentno (zbog adicionog teorema) s nejednakošću

$$\cos(b+c) < \cos a < \cos(b-c).$$

Iz lijeve nejednakosti zbog $a, b, c \in (0, \pi)$, slijedi $a < b+c < 2\pi - a$, a odavde $a+b+c < 2\pi$. Iz desne nejednakosti dobivamo $|b-c| < a$.

Iz sinusovog poučka sada se odmah vidi $a = b \iff \alpha = \beta$ i $a < b \iff \alpha < \beta$.

Da dokažemo ostale nejednakosti iz Teorema 1, treba nam pojam polarnog trokuta. Ako je \widehat{AB} luk velike kružnice na sferi, onda se krajevi C_1 i C'_1 dijametra $\overline{C_1C'_1}$ sfere koji je okomit na ravninu te velike kružnice zovu polovi luka \widehat{AB} (sl. 86a).



Sl. 86.

Neka je $\triangle ABC$ sferni trokut. Neka su A_1, B_1, C_1 polovi lukova $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$ i to tako da su A, A_1 s iste strane ravnine luka \widehat{BC} itd. Tada se $\triangle A_1B_1C_1$ zove **polarni trokut** od $\triangle ABC$. Njegove elemente označimo sa $a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ (sl. 86b). Tada nije teško dokazati (učinite to sami) da vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha + a_1 = \pi, & \quad \alpha_1 + a = \pi, & \quad \beta + b_1 = \pi, \\ \beta_1 + b = \pi, & \quad \gamma + c_1 = \pi, & \quad \gamma_1 + c = \pi. \end{aligned}$$

Da za svaki sferni trokut $\triangle ABC$ vrijedi $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ slijedi sada iz već dokazane nejednakosti $0 < a+b+c < 2\pi$ primijenjene na polarni trokut $\triangle A_1B_1C_1$. No, $\alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ slijedi iz toga da su $\alpha, \beta, \gamma < \pi$, a možemo je izvesti i iz toga da je površina sfernog trokuta manja od površine polusfere, pa je $P = R^2 \varepsilon < 2R^2\pi$, tj. $\varepsilon < 2\pi$, odakle je $\alpha + \beta + \gamma < 3\pi$. Nejednakost $\alpha + \beta < \gamma + \pi$ slijedi iz nejednakosti trokuta $a_1 < b_1 + c_1$. Time su sve tvrdnje iz Teorema 1. potpuno dokazane.

TEOREM 5 (kosinusov poučak za kutove). *U sfernom trokutu vrijedi*

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a,$$

kao i još dvije analogne formule.

Dokaz. Neka je $\Delta A_1 B_1 C_1$ polarni trokut od trokuta ΔABC . Iz kosinusovog poučka za stranice za $\Delta A_1 B_1 C_1$ imamo

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos \alpha_1.$$

Zbog $a_1 = \pi - \alpha$, $b_1 = \pi - \beta$, $c_1 = \pi - \gamma$, $\alpha_1 = \pi - a_1$ slijedi odmah navedena formula. ■

TEOREM 6 (Napierovo⁸ ili kotangensovo pravilo). *U sfernom trokutu ΔABC vrijedi*

$$\sin c \operatorname{ctg} a - \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha = \cos c \cos \beta,$$

kao i još pet analognih formula.

Dokaz. Prvo dokažimo

$$\sin b \cos \alpha = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta. \quad (*)$$

Napišimo kosinusov poučak za stranice

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Uvrstimo li $\cos b$ iz prve jednakosti u drugu jednakost, pa zamijenimo $\cos^2 a$ sa $1 - \sin^2 a$, nakon skraćivanja dobivamo jednakost ekvivalentnu (*).

Sada iz sinusovog poučka imamo $\sin b \sin \alpha = \sin a \sin \beta$. Podijelimo li svaki član (*) s odgovarajućom stranom ove jednakosti, dobivamo navedenu formulu. ■

11.4. Pravokutni sferni trokut

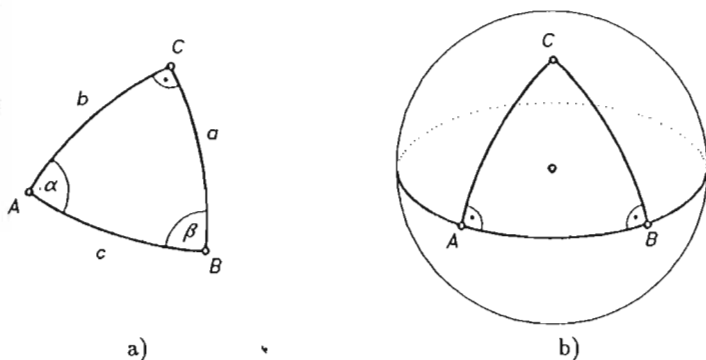
Pravokutni sferni trokut je sferni trokut koji ima bar jedan pravi kut (sl. 87a). Napomenimo da sferni trokut može imati dva, pače i tri prava kuta, npr. kao na sl. 87b, gdje je C "sjeverni pol", a A i B su točke na "ekvatoru".

Iz planimetrije se prenose i nazivi; stranica nasuprot pravog kuta zove se **hipotenuza**, a ostale dvije **katete**.

Ako u kosinusov poučak za stranice stavimo $\gamma = \pi/2$, dobivamo

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

⁸ John Napier (1550-1617), škotski matematičar; uveo prirodne logaritme.



Sl. 87.

Time je hipotenuza pravokutnog trokuta izražena pomoću kateta, pa ta formula igra ulogu Pitagorinog poučka u planimetriji i zove se **sferni Pitagorin poučak**.

Ako u sinusov poučak stavimo $\gamma = \pi/2$, dobivamo

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Riječima: sinus kuta pravokutnog sfernog trokuta jednak je omjeru sinusa nasuprotne katete i sinusa hipotenuze.

Napomena 1. Ako su a , b , c stranice pravokutnog sfernog trokuta na sferi $S^2(O; R)$, onda su $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ tim stranicama pripadni središnji kutovi izraženi u radijanima, pa sferni Pitagorin poučak možemo pisati u obliku

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cdot \cos \frac{b}{R}.$$

Koristeći razvoj u red $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$, dobivamo

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{c}{R}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{c}{R}\right)^4 - \dots = \\ & = \left(1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{a}{R}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{a}{R}\right)^4 - \dots\right) \left(1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{b}{R}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{b}{R}\right)^4 - \dots\right), \end{aligned}$$

što nakon množenja i sređivanja daje

$$c^2 - \frac{1}{12} \frac{c^4}{R^2} + \dots = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{2R^2} - \frac{a^4}{12R^2} - \frac{b^4}{12R^2} + \dots$$

Uzmemo li da su duljine stranica trokuta čvrste, a središte kugle se pomiče sve dalje i dalje, tj. pustimo li da $R \rightarrow \infty$, gornja formula pokazuje da na limesu dobivamo

obični Pitagorin poučak. Slično se vidi i da formula $\sin \alpha \sin \frac{c}{R} = \sin \frac{a}{R}$ prelazi na limesu za $R \rightarrow \infty$ u formulu $c \sin \alpha = a$. ■

Sve formule za sferni pravokutni trokut sada možemo napisati (izvedite ih sami) u obliku tzv. "deset formula":

$$\left. \begin{array}{l} \cos c = \cos a \cos b, \\ \sin a = \sin c \sin \alpha \\ \sin b = \sin c \sin \beta \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \cos \beta = \cos b \sin \alpha \\ \cos \alpha = \cos a \sin \beta \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta, \\ \cos \beta = \operatorname{ctg} c \operatorname{tg} a, \\ \sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} \alpha, \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} c \\ \sin a = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \end{array} \right\}.$$

Zgodno matematičko pravilo za pamćenje ovih formula je tzv. **Napierovo pravilo** koje glasi.

Zamijenimo elemente a i b redom s $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} - b$ i napišimo deset formula u obliku

$$\left. \begin{array}{l} \cos c = \sin \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - b \right), \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right) = \sin c \sin \alpha \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} - b \right) = \sin c \sin \beta \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \beta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - b \right) \sin \alpha \\ \cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \sin \beta \end{array} \right\},$$

$$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \beta = \operatorname{ctg} c \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - a \right), \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} - b \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \operatorname{ctg} \alpha, \\ \cos \alpha = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - b \right) \operatorname{ctg} c \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - b \right) \operatorname{ctg} \beta \end{array} \right\}.$$

Sada nacrtamo pravokutni trokut (ravni) $\triangle ABC$ i označimo mu hipotenuzu sa c , a katete sa $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} - b$ i kutove α i β (pravi kut ne označujemo jer je poznat), (sl. 88). Za svaki od pet elementa na slici imamo dva susjedna i dva nesusjedna elementa, npr. za element α susjedni su $\frac{\pi}{2} - b$ i c , a nesusjedni β i $\frac{\pi}{2} - a$.

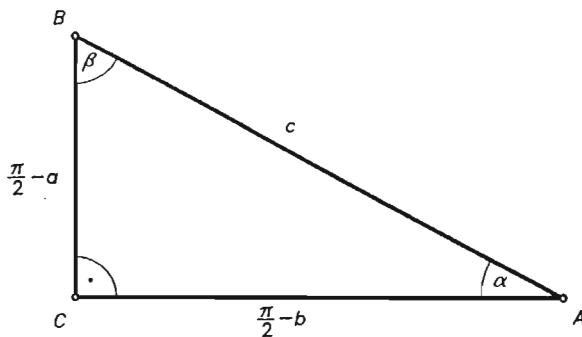
Napierovo pravilo. Kosinus svakog elementa jednak je produktu kotangensa susjednih elemenata, a također je jednak produktu sinusa nesusjednih elemenata.

Sve ove formule služe za "razrješavanje" sfernog pravokutnog trokuta kojemu su zadana dva elementa.

Primjer 1. Zadane su kateta b i nasuprotni kut β sfernog pravokutnog trokuta. Treba naći c , a i α .

Rješenje. Iz deset formula (ili Napierova pravila) slijedi

$$\sin c = \frac{\sin b}{\sin \beta}, \quad \sin a = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} \beta}, \quad \sin \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos b},$$



Sl. 88.

pri čemu je $0 < c < \pi$, $0 < a < \pi$, $0 < \alpha < \pi$. Prva jednakost ima rješenja ako je $\sin b \leq \sin \beta$ i zbog $0 < b, \beta < \pi$ slijedi da je ili $b \leq \beta \leq \pi/2$ ili $\pi/2 \leq \beta \leq b$. U svakom slučaju, zadatak ima rješenje ako je β između b i $\pi/2$. Tada ove jednostavne trigonometrijske jednačbe imaju općenito dva rješenja. Iz prve jednačbe dobivamo

$$c_1 = \arcsin \frac{\sin b}{\sin \beta} \quad \text{i} \quad c_2 = \pi - \arcsin \frac{\sin b}{\sin \beta}.$$

Pretpostavimo da su te vrijednosti različite i $c_1 < \pi/2 < c_2$ (jednakost $c_1 = c_2 = \pi/2$ vrijedi za $\sin b = \sin \beta$). Za $c = c_1 < \pi/2$, katete i kutovi su svi ili u prvom ili svi u drugom kvadrantu. Stoga od dvaju rješenja druge (i treće) jednačbe treba uzeti ona koja se nalaze u jednom kvadrantu s katetom b (i kutom β). Za $a = a_2 > \pi/2$ katete i kutovi su u raznim kvadrantima, pa od dva rješenja druge (i treće) jednačbe treba uzeti ona koja su u različitim kvadrantima s katetom b (i kutom β). U općem slučaju, dakle, zadatak ima dva različita rješenja. ■

11.5. Neki načini rješavanja sfernih trokuta i primjene

Kada se kaže "riješiti" trokut, to znači da iz tri elementa odredimo ostale elemente. Na primjer, ako zadamo trokut sa tri stranice a, b, c , onda kutove α, β, γ možemo izračunati iz kosinusova poučka za stranice, a ako su zadani kutovi α, β, γ , onda stranice možemo izračunati koristeći kosinusov poučak za kutove itd.

Primjer 2. Zadani su elementi sfernog trokuta a, b, α . Odredite ostale elemente c, β, γ .

Rješenje. Prvo nađimo β , koristeći sinusov poučak. Dobivamo

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a} \sin \alpha.$$

Sada kad imamo a, b, α, β , stranicu c izračunamo kao rješenje jednačbe tipa (*) u dokazu Napierovog pravila:

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha.$$

Da bismo izračunali kut γ , iskoristimo opet takvu formulu (tj. jednačbu) u kojoj sada znamo a, b, c, β :

$$\sin c \cos \beta = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos \gamma. \quad \blacksquare$$

Primjer 3. Dokažite D'Alambertove⁹ formule za sferni trokut $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cos \frac{\gamma}{2}, & \sin \frac{\alpha - \beta}{2} &= \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ \cos \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin \frac{\gamma}{2}, & \cos \frac{\alpha - \beta}{2} &= \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Rješenje. Pođimo od kosinusovog poučka za stranice

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Ako $\cos \alpha$ odavde uvrstimo u formule

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

uz oznake $2s = a + b + c$ (opseg), poslije elementarnih transformacija dobivamo

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}} \quad (*)$$

Za izvod prve od D'Alambertovih formula pođimo od

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}.$$

U ovu formulu uvrstimo (*) (i slične izraze za $\beta/2$). Nakon lakih transformacija dobivamo

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{\sin(s-b) + \sin(s-a)}{\sin c} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\sin c} \cos \frac{\gamma}{2} = \\ &= \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Analogno se dokazuju druge D'Alambertove formule. ■

Primjer 4. Dokažite da za sferni trokut $\triangle ABC$ vrijede tzv. Napierove analogije:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}, & \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} &= \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} &= \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}, & \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} &= \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Rješenje. Dokaz ovih formula slijedi neposredno iz D'Alambertovih formula tako da se podijele odgovarajuće formule. ■

⁹ Jean D'Alambert (1717-1783), francuski matematičar, fizičar i filozof.

Napierove analogije igraju istu ulogu kao i Molweidove formule u običnoj trigonometriji trokuta. One se često koriste da se "riješi" sferni trokut naročito logaritmiranjem. Odgovarajućim dijeljenjem Napierovih analogija dobiva se sferni tangensov poučak.

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a - b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a + b}{2}}.$$

Primjer 5. Ako su zadane stranice, a time i opseg $2s = a + b + c$ sfernog trokuta, dokažite da je eksces ϵ dan formulom

$$\operatorname{tg} \frac{\epsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2}}. \quad (\text{L'Huilierova}^{10} \text{ formula})$$

Rješenje. U D'Alambertovim formulama za $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ i $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ pišemo $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma - \epsilon}{2}$, pa te formule pišemo u obliku

$$\frac{\cos \frac{\gamma - \epsilon}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a - b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}, \quad \frac{\sin \frac{\gamma - \epsilon}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a + b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}.$$

Oдавде neposredno slijedi (zbog $\frac{x}{y} = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} = \frac{u-v}{u+v}$):

$$\frac{\cos \frac{\gamma - \epsilon}{2} - \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma - \epsilon}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a - b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a - b}{2} + \cos \frac{c}{2}}, \quad \frac{\sin \frac{\gamma - \epsilon}{2} - \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma - \epsilon}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a + b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a + b}{2} + \cos \frac{c}{2}}.$$

Pretvorbom brojnika i nazivnika ovih izraza u produkte, nakon malo transformiranja dobivamo (učinite to!):

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\epsilon}{4} \right) \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{4} = \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-a}{2}, \quad \operatorname{ctg} \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\epsilon}{4} \right) \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{4} = \operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2}.$$

Izmnožimo li ove jednakosti dobivamo

$$\operatorname{tg} \frac{\epsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2}}.$$

Uočimo da smo uzeli predznak + pred korijenom, jer zbog $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ slijedi $\frac{\epsilon}{4} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{4} < \frac{\pi}{2}$. ■

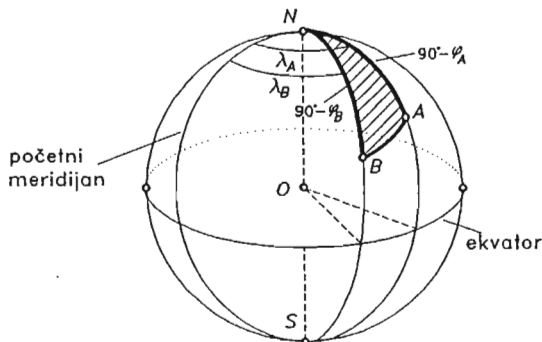
Mnogobrojne su primjene sferne trigonometrije u geodeziji, jer se zamišlja da je površina Zemlje sfera radijusa $R \approx 6370$ km. Te primjene su to pogodnije što se promatraju veći dijelovi zemaljske površine, jer se u tim slučajevima ne može izbjeći

¹⁰Simon A. J. L'Huilier (1750-1840), švicarski matematičar.

njena zakrivljenost. Isto tako, sferna trigonometrija igra važnu ulogu u teorijskoj i praktičnoj astronomiji. Evo par primjera.

Primjer 6. Poznate su geografske koordinate dvaju mjesta A i B na Zemljinoj površini. Treba odrediti njihovu udaljenost.

Rješenje. Neka su φ_A i φ_B geografske širine, a λ_A , λ_B geografske dužine mjesta A i B (sl. 89).



Sl. 89.

Udaljenost između A i B mjeri se duljinom luka velike kružnice Zemlje. Neka je d lučna mjera luka \widehat{AB} (izražena u radijanima ili stupnjevima). Neka su N i S sjeverni i južni polovi Zemlje. Promotrimo sferni trokut $\triangle NAB$. Njegove stranice NA i NB su redom $\frac{\pi}{2} - \varphi_A$ i $\frac{\pi}{2} - \varphi_B$, a kut među njima je $|\lambda_A - \lambda_B|$. Prema kosinusovom poučku za stranice dobivamo

$$\cos d = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_B\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_B\right) \cos(\lambda_A - \lambda_B),$$

odnosno

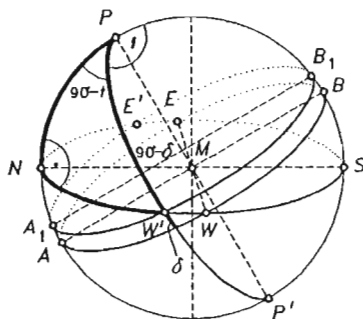
$$\cos d = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos(\lambda_A - \lambda_B).$$

Tražena udaljenost je jednaka Rd , gdje je d radijanska mjera luka \widehat{AB} , a R Zemljin radijus.

Tako, npr., Zagreb ima koordinate $\varphi_A = 45^\circ 48' 54''$ sjeverne širine, $\lambda_A = 15^\circ 58' 59''$ istočne duljine, a New York $\varphi_B = 40^\circ 42' 44''$, a $\lambda_B = 74^\circ 0' 24''$ zapadne duljine (tj. $\lambda_B = = -74^\circ 0' 24''$). Dobiva se $\cos d = 0,4678341$, pa je udaljenost od Zagreba do New Yorka jednaka $6\,370 \cdot \arccos 0,4678341 = 6\,904,8$ km. ■

Primjer 7. Neka se odredi kada izlazi i zalazi Sunce u Zagrebu i kolika je duljina dana 21. lipnja.

Rješenje. Neka je M naše motrilište, ono je u središtu nebeske sfere. Nebeski svod prividno rotira oko pravca koji spaja nebeske polove P i P' . Pravac PP' zove se svjetska os. Na sl. 90 nacrtani su meridijan $PNP'S$ motrilišta, horizont $NWSE$ i nebeski ekvator $AWBE$. Točke N , W , S , E su redom sjeverna, zapadna, južna i istočna točka. Kut $\sphericalangle NMP$ zove se visina pola. Očito je visina pola jednaka geografskoj širini φ motrilišta M . Na dane 21. ožujka i 21. rujna Sunce se prividno giba po nebeskom ekvatoru $AWBE$ i izlazi u istočnoj točki E , a zalazi u zapadnoj točki W . U ostale dane Sunce opisuje kružnice paralelne s nebeskim ekvatorom. Te se kružnice zovu nebeske paralele. Najveće



Sl. 90.

kružnice nebeske sfere koje idu točkama P i P' zovu se satne kružnice (satni krugovi) ili deklinacioni krugovi. Iz rečenoga slijedi da je meridijan satni krug na kojemu se Sunce nalazi točno u podne. Središnji kut koji pripada luku deklinacionog kruga između Sunca i nebeskog ekvatora zove se deklinacija Sunca i označava sa δ . Deklinacija se računa od ekvatora prema Suncu. Dakle 21. ožujka i 23. rujna $\delta = 0^\circ$. Između 21. ožujka i 23. rujna Sunce je iznad nebeskog ekvatora, pa se uzima da je deklinacija pozitivna. U ostale dane deklinacija je negativna jer je Sunce ispod nebeskog ekvatora. Deklinacija je najveća 21. lipnja, tada je $\delta \approx 23^\circ 27'$. Maksimalna deklinacija označava se sa ϵ , jer se tada ona podudara s kutom ekliptike i nebeskog ekvatora. Naš je zadatak da odredimo duljinu dana. U tu svrhu treba odrediti kada toga dana Sunce izlazi i kada zalazi. Mi znamo za taj dan deklinaciju Sunca δ i geografsku širinu mjesta. Toga dana Sunce opisuje paralelni krug $A_1W'B_1E'$ i izlazi u točki E' , a zalazi u točki W' . $E'B'W$ je tzv. dnevni luk Sunca, a $W'A'E'$ noćni luk. Kut između ravnine meridijana i ravnine deklinacionog kruga Sunca je satni kut t Sunca. Na slici je nacrtan satni kut zalaska Sunca. Sada iz pravokutnog trokuta $\triangle PNW'$ (pravi je kut pri vrhu N) po Napierovom pravilu nalazimo da je $\cos(180^\circ - t) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - \delta)$, dakle

$$\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta.$$

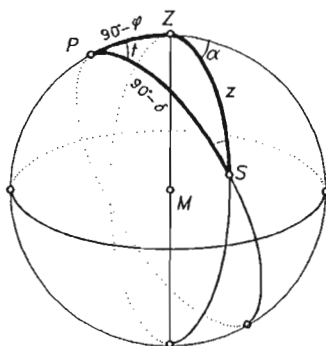
Ova nam formula omogućuje da odredimo duljinu dana.

U našem je slučaju $\varphi = 45^\circ 48' 54''$, $\delta = 23^\circ 27'$, pa slijedi $t = 116^\circ 30' 21''$. Ako satni kut izrazimo u vremenu ($24^{\text{h}} = 360^\circ$) nalazimo $t = 7^{\text{h}} 46^{\text{m}} 1^{\text{s}}$. Dakle Sunce izlazi u $12^{\text{h}} - 7^{\text{h}} 46^{\text{m}} 1^{\text{s}} = 4^{\text{h}} 13^{\text{m}} 59^{\text{s}}$, a zalazi u $12^{\text{h}} + 7^{\text{h}} 46^{\text{m}} 1^{\text{s}} = 19^{\text{h}} 46^{\text{m}} 1^{\text{s}}$. Duljina dana iznosi $19^{\text{h}} 46^{\text{m}} 1^{\text{s}} - 4^{\text{h}} 13^{\text{m}} 59^{\text{s}} = 15^{\text{h}} 32^{\text{m}} 2^{\text{s}}$. (Napomenimo da smo se ovdje koristili "astronomskim" vremenom Zagreba, a ne službenim srednjeeuropskim vremenom.) ■

Primjer 8. U Zagrebu je opažena zvijezda pod satnim kutom $t = 49^\circ 20' 36''$ i azimutom $\alpha = 87^\circ 36' 20''$. Odredite njenu zenitnu udaljenost i deklinaciju ako je geografska širina Zagreba $\varphi = 45^\circ 48' 54''$.

Rješenje. Neka je M naše motrište, P nebeski pol (vidite prethodni primjer), Z točka nadira (zenita) i S položaj zvijezde na nebeskoj sferi.

Luk \widehat{ZS} zove se zenitna udaljenost zvijezde, a na sl. 91 je označen i azimut α . Napierove analogije za trokut $\triangle PZS$ daju



Sl. 91.

$$\operatorname{tg} \frac{z + (90^\circ - \delta)}{2} = \frac{\cos \frac{t - (180^\circ - \alpha)}{2}}{\cos \frac{t + (180^\circ - \alpha)}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{z - (90^\circ - \delta)}{2} = \frac{\sin \frac{t - (180^\circ - \alpha)}{2}}{\sin \frac{t + (180^\circ - \alpha)}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2}.$$

Uvrstimo li ovamo konkretne vrijednosti, dobit ćemo

$$\frac{z + (90^\circ - \delta)}{2} = 42^\circ 43' 32'', \quad \frac{z - (90^\circ - \delta)}{2} = 9^\circ 16' 7''.$$

Oдавде je $z = 33^\circ 27' 25''$, $\delta = 38^\circ 0' 21''$. ■

§ 12. Analitička teorija trigonometrijskih funkcija

12.1. Aksiomatsko zasnivanje trigonometrijskih funkcija

U ovoj ćemo točki dati aksiomatsku karakterizaciju trigonometrijskih funkcija. Neka su $C, S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije koje zadovoljavaju ova svojstva (aksiome):

A1. C i S zadovoljavaju funkcionalnu jednadžbu

$$C(x - y) = C(x)C(y) + S(x)S(y), \quad (C_{x-y})$$

tj. ova jednakost vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

A2. Postoji broj $\lambda > 0$, tako da je za $x \in \langle 0, \lambda \rangle$, $C(x), S(x) > 0$.

A3. $C(0) = S(\lambda) = 1$.

Funkcije C i S zovu se redom **analitički kosinus**, odnosno **sinus**.

Naš cilj je dokazati egzistenciju i jedinstvenost takvih funkcija, tj. da za svako $\lambda > 0$ postoje jedinstvene funkcije $C = C_\lambda$ i $S = S_\lambda$ koje zadovoljavaju A1 - A3.

Prema tome, ovo je jedan od načina kako možemo uvesti trigonometrijske funkcije. (Trebalo bi imati na umu da će za $\lambda = \pi/2$ biti $C_{\pi/2} = \cos$, $S_{\pi/2} = \sin$, a za $\lambda > 0$,

$C_\lambda(x) = \cos \frac{\pi}{2\lambda}x$, $S_\lambda(x) = \sin \frac{\pi}{2\lambda}x$.) Mi ćemo prvo dokazati jedinstvenost, ali ćemo najprije iz aksioma A1 - A3 izvesti niz jednostavnih svojstava tih funkcija.

1. Vrijedi $S(0) = C(\lambda) = 0$.

Dokaz. Stavimo li u jednakost C_{x-y} u aksiomu A1 $x = y = 0$, dobivamo $C(0) = C^2(0) + S^2(0)$. Zbog A3 odavde slijedi da je $1 = 1 + S^2(0) \Rightarrow S(0) = 0$. Ako pak u A1 stavimo $x = y = \lambda$, dobivamo $C(0) = C^2(\lambda) + S^2(\lambda) \Rightarrow 1 + C^2(\lambda) = 1 \Rightarrow C(\lambda) = 0$. ■

2. Vrijedi $C^2(x) + S^2(x) = 1$.

Dokaz. Stavimo li u A1 $x = y$, tvrdnja odmah slijedi zbog A3. ■

Posljedica. C i S su omeđene funkcije; točnije $|C(x)|, |S(x)| \leq 1$. ■

3. Vrijedi $C(\lambda - x) = S(x)$, $S(\lambda - x) = C(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. U A1 zamijenimo x sa λ , a y sa x . Tada dobivamo zbog A3 i svojstva

1:

$$C(\lambda - x) = C(\lambda)C(x) + S(\lambda)S(x) = S(x).$$

Ako ovdje zamijenimo x sa $\lambda - x$, dobivamo

$$C(x) = S(\lambda - x). \quad \blacksquare$$

4. Za svako $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x). \quad (S_{x+y})$$

Dokaz. Koristeći A1 i svojstvo 3 imamo

$$\begin{aligned} S(x+y) &= C[\lambda - (x+y)] = C[(\lambda - x) - y] = C(\lambda - x)C(y) + S(\lambda - x)S(y) = \\ &= S(x)C(y) + C(x)S(y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5. C je parna, a S neparna funkcija.

Dokaz. Uvrstimo u A1 $x = 0$. Koristeći A3 i svojstvo 1 slijedi

$$C(-y) = C(0)C(y) + S(0)S(y) = C(y).$$

Dakle, C je parna funkcija.

Stavimo $y = -x$ u formulu (S_{x+y}) . Dobivamo

$$0 = S(x - x) = S(x)C(-x) + C(x)S(-x) = C(x)[S(x) + S(-x)] = 0.$$

Imamo dvije mogućnosti.

Slučaj a) $C(x) \neq 0$. Tada je $S(x) + S(-x) = 0$, tj. $S(-x) = -S(x)$.

Slučaj b) $C(x) = 0$. Neka je y bilo koji element iz $\langle 0, \lambda \rangle$. Zbog $C(-x) = C(x) = 0$ imamo

$$C(x+y) = C[x - (-y)] = C(x)C(-y) + S(x)S(-y) = S(x)S(-y), \quad (1)$$

$$C(y+x) = C[y - (-x)] = C(y)C(-x) + S(y)S(-x) = S(y)S(-x). \quad (2)$$

Prema A2, $C(y), S(y) > 0$, pa prema slučaju a) imamo $S(y) = -S(-y)$. Iz-jednačavanjem desnih strana u (1) i (2) slijedi

$$S(x)S(-y) = S(y)S(-x) \implies -S(x)S(y) = S(y)S(-x).$$

Kako je $S(y) \neq 0$ slijedi da i u slučaju b) vrijedi $S(x) = -S(-x)$. ■

6. Vrijede ove adicione formule

$$C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y), \quad (C_{x-y})$$

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y), \quad (C_{x+y})$$

$$S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x), \quad (S_{x+y})$$

$$S(x-y) = S(x)C(y) - S(y)C(x). \quad (S_{x-y})$$

Dokaz. Prva formula je aksiom A1, a treću smo dokazali (svojstvo 4.). Druga i četvrta formula slijede iz prve i treće iz parnosti i neparnosti (svojstvo 5.) supsticijom $-y$ umjesto y . ■

7. Vrijede formule

$$\left. \begin{aligned} C(x)C(y) &= \frac{C(x+y) + C(x-y)}{2} \\ C(x)S(y) &= \frac{S(x+y) - S(x-y)}{2} \\ S(x)S(y) &= \frac{C(x-y) - C(x+y)}{2} \end{aligned} \right\}, \quad (A)$$

$$\left. \begin{aligned} C(x) + C(y) &= 2C\left(\frac{x+y}{2}\right) C\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ C(x) - C(y) &= 2S\left(\frac{x+y}{2}\right) S\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ S(x) + S(y) &= 2S\left(\frac{x+y}{2}\right) C\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ S(x) - S(y) &= 2C\left(\frac{x+y}{2}\right) S\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (B)$$

$$\left. \begin{aligned} S(2x) &= 2S(x)C(x) \\ C(2x) &= C^2(x) - S^2(x) \end{aligned} \right\}. \quad (C)$$

Dokaz. Formule (A) pretvaraju produkt u sumu i dobivaju se iz adicijonih formula (svojstvo 6.) iz zbrajanja i oduzimanja odgovarajućih formula.

Slično i formule (B) koje pretvaraju sumu u produkt slijede iz adicijonih formula, npr.

$$\begin{aligned} C(x) + C(y) &= C\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + C\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \\ &= C\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right) - S\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{x-y}{2}\right) + \\ &+ C\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right) + S\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{x-y}{2}\right) = \\ &= 2C\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

Formule (C) dvostrukog argumenta slijede iz (C_{x+y}) , (S_{x+y}) za $x = y$. ■

8. Vrijede formule polovičnog argumenta

$$C\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+C(x)}{2}}, \quad S\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-C(x)}{2}}.$$

Dokaz. To slijedi iz svojstava 2. i 7. (formula (C)):

$$C^2\left(\frac{x}{2}\right) + S^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1, \quad C^2\left(\frac{x}{2}\right) - S^2\left(\frac{x}{2}\right) = C(x). \quad \blacksquare$$

9. Vrijede formule redukcije:

$$\begin{array}{lll} C(x+\lambda) = -S(x), & S(x+\lambda) = C(x) & [x+\lambda] \\ C(x+2\lambda) = -C(x), & S(x+2\lambda) = -S(x) & [x+2\lambda] \\ C(x+3\lambda) = S(x), & S(x+3\lambda) = -C(x) & [x+3\lambda] \\ C(x+4\lambda) = C(x), & S(x+4\lambda) = S(x). & [x+4\lambda] \end{array}$$

Dokaz. Izračunajmo prvo vrijednost funkcija C i S u točkama λ , 2λ , 3λ , 4λ . Imamo (koristeći prethodna svojstva):

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= 0, \quad S(\lambda) = 1, \\ C(2\lambda) &= C^2(\lambda) - S^2(\lambda) = -1, \quad S(2\lambda) = 0, \\ C(3\lambda) &= C(\lambda)C(2\lambda) - S(\lambda)S(2\lambda) = 0, \quad S(3\lambda) = S(\lambda)C(2\lambda) + S(2\lambda)C(\lambda) = -1, \\ C(4\lambda) &= C^2(2\lambda) - S^2(2\lambda) = 1, \quad S(4\lambda) = 2S(2\lambda)C(2\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Formule redukcije sada slijede iz adicijonih teorema. Na primjer,

$$C(x+\lambda) = C(x)C(\lambda) - S(x)S(\lambda) = -S(x). \quad \blacksquare$$

Posljedica. Funkcije C i S su periodičke s periodom 4λ . ■

10. Funkcije C i S imaju konstantan predznak na svakom intervalu oblika $\langle k\lambda, (k+1)\lambda \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.

Dokaz. Zbog periodičnosti, dovoljno je dokazati tvrdnju na intervalima $\langle 0, \lambda \rangle$, $\langle \lambda, 2\lambda \rangle$, $\langle 2\lambda, 3\lambda \rangle$, $\langle 3\lambda, 4\lambda \rangle$.

Na intervalu $\langle 0, \lambda \rangle$ su prema A2 obje funkcije C i S pozitivne. Za $x \in \langle \lambda, 2\lambda \rangle$ je $C(x) < 0$, a $S(x) > 0$. Naime, tada se x može zapisati kao $x = \lambda + \alpha$, $0 < \alpha < \lambda$, pa iz formula redukcije slijedi $C(x) = -S(\alpha) < 0$, $S(x) = C(\alpha) > 0$. Dalje se na sličan način vidi da je za $x \in \langle 2\lambda, 3\lambda \rangle$ $C(x) < 0$, $S(x) < 0$ i konačno za $x \in \langle 3\lambda, 4\lambda \rangle$ $C(x) > 0$, $S(x) < 0$. ■

Posljedica. Za $x \in \langle 0, 2\lambda \rangle$ je $S(x) > 0$, a za $x \in \langle 2\lambda, 4\lambda \rangle$ je $S(x) < 0$. Stoga je zbog periodičnosti $S(x) > 0$ za $x \in \langle 4k\lambda, (4k+2)\lambda \rangle$, a $S(x) < 0$ za $x \in \langle (4k+2)\lambda, (4k+4)\lambda \rangle$, za sve $k \in \mathbf{Z}$. Posebno je $S(x) < 0$ za $x \in \langle -2\lambda, 0 \rangle$.

Zbog parnosti funkcije C , ona je pozitivna na $\langle -\lambda, 0 \rangle$. Zato je $C(x) > 0$ za $x \in \langle -\lambda, \lambda \rangle$ i $C(x) < 0$ za $x \in \langle \lambda, 3\lambda \rangle$. Odavde, zbog periodičnosti, slijedi da je $C(x) > 0$ za $x \in \langle (4k-1)\lambda, (4k+1)\lambda \rangle$, a $C(x) < 0$ za $x \in \langle (4k+1)\lambda, (4k+3)\lambda \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$. ■

11. Restrikcija $C|_{\langle 0, 2\lambda \rangle}$ je strogo padajuća, a $C|_{\langle 2\lambda, 4\lambda \rangle}$ strogo rastuća. $S|_{\langle -\lambda, \lambda \rangle}$ je strogo rastuća, a $S|_{\langle \lambda, 3\lambda \rangle}$ strogo padajuća. Posebno $C|_{\langle 0, \lambda \rangle}$ je strogo padajuća, a $S|_{\langle 0, \lambda \rangle}$ strogo rastuća.

Dokaz. Neka je $0 < x_1 < x_2 < 2\lambda$. Tada je $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \lambda$ i $0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < 2\lambda$. Prema formuli (B) u 7. imamo

$$C(x_2) - C(x_1) = -2S\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Prema prethodnoj posljedici je $S\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right), S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$, pa je zato $C(x_2) < C(x_1)$, tj. C strogo pada na $\langle 0, 2\lambda \rangle$. Ako je $2\lambda \leq x_1 < x_2 < 4\lambda$, onda je $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \lambda$, a $2\lambda < \frac{x_1 + x_2}{2} < 4\lambda$. Tada je $S\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$, a $S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$, pa je $C(x_1) < C(x_2)$, tj. $C|_{\langle 2\lambda, 4\lambda \rangle}$ je strogo rastuća.

Slično se dokazuju ostale tvrdnje. ■

12. Funkcije $C, S: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ su neprekidne.

Prvo dokažimo jednu lemu.

LEMA 1. Funkcija C je neprekidna u točki $x = 0$, a isto tako i S .

Dokaz. Kako je $C(0) = 1$, dovoljno je dokazati da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = 1.$$

U tu svrhu dovoljno je promotriti desni limes $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x)$, tj. promotriti samo $x > 0$, jer ako postoji desni limes, onda zbog parnosti imamo $C(-x) = C(x)$, pa postoji i lijevi limes i ima istu vrijednost u točki 0.

Kako je restrikcija $C|_{(0,\lambda)}$ monotona (padajuća) i omeđena, sledi da postoji desni limes od $C(x)$, pa stoga postoji i $\lim_{x \rightarrow 0} C(x)$. Neka je

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = l.$$

Da izračunamo vrijednost l tog limesa, dovoljno je naći neki niz brojeva (x_n) koji teži k nuli, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ i izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} C(x_n)$. Uzmimo sljedeći niz

$$x_0 = \lambda, x_1 = \frac{\lambda}{2}, x_2 = \frac{\lambda}{2^2}, \dots, x_n = \frac{\lambda}{2^n}, \dots$$

Iz formule za polovične kutove (svojstvo 8.) imamo redom

$$C(x_0) = 0, \quad C(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad C(x_2) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \quad C(x_3) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}, \dots$$

i općenito (indukcija!):

$$C(x_n) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n \text{ korijena}).$$

Neka je, dakle, (s_n) niz definiran rekurzijom $s_n = \sqrt{2 + s_{n-1}}$ s početnim članom $s_1 = \sqrt{2}$. Taj niz je očito rastući. Pokažimo da je strogo omeđen. Prvo $s_1 < 2$ i $s_2 = \sqrt{2 + s_1} < 2$. Pretpostavimo da je $s_{n-1} < 2$. Tada je i $s_n = \sqrt{2 + s_{n-1}} < 2$. Rastući i odozgo omeđen niz je konvergentan, pa neka je $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. Iz $s_n^2 = 2 + s_{n-1}$ sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2 = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1}$, tj. $s^2 - s - 2 = 0$, odakle je $s = 2$, pa je $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 2$.

Stoga je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{2} = 1.$$

Prema tome, imamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(x_n) = 1 = C(0),$$

pa je funkcija C neprekidna u točki $x = 0$. Za funkciju S imamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\pm \sqrt{1 - C^2(x)} \right) = \pm \sqrt{1 - \lim_{x \rightarrow 0} C^2(x)} = 0$$

(ovdje smo koristili neka jednostavna svojstva limesa - izvedite ih sami). Kako je $S(0) = 0$, imamo konačno

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 0 = S(0),$$

pa je i S neprekidna u točki $x = 0$. Time je lema dokazana.

Sada dokažimo da je C neprekidna u bilo kojoj točki $x \in \mathbb{R}$. Zbog $C(x+h) = C(x)C(h) - S(x)S(h)$ imamo da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} C(x+h) = C(x) \lim_{h \rightarrow 0} C(h) - S(x) \lim_{h \rightarrow 0} S(h) = C(x).$$

Slično se dokaže da je $\lim_{h \rightarrow 0} S(x+h) = S(x)$. ■

13. Restrikcija $C|_{[0,2\lambda]} : [0, 2\lambda] \rightarrow \mathbf{R}$ je strogo padajuća bijekcija, čija je slika segment $[-1, 1]$, a $C|_{[2\lambda,4\lambda]}$ je strogo rastuća od -1 do 1 . Nadalje, $S|_{[-\lambda,\lambda]}$ strogo raste od -1 do 1 , a $S|_{[\lambda,3\lambda]}$ strogo pada od 1 do -1 .

Dokaz. Kao prvo, prema svojstvu 11 znamo da je $C|_{(0,2\lambda)}$ strogo padajuća. Također znamo da je $C(0) = 1$, $C(2\lambda) = -1$. Neka je y bilo koji broj iz intervala $(-1, 1)$. Kako je (prema 12.) C neprekidna na $(0, 2\lambda)$, funkcija C poprima vrijednost y u nekoj točki $x \in (0, 2\lambda)$. Zbog monotonosti, taj x je jedinstven. Time je prva tvrdnja dokazana. Sasvim analogno se dokazuje druga tvrdnja. ■

14. Broj 4λ je temeljni period funkcija C i S .

Dokaz. Prema posljedici svojstva 9 znamo da je 4λ period od C i S . Neka je τ temeljni period funkcije C (ako postoji). Tada je

$$C(\tau) = C(0) = 1.$$

U točkama $0, \pm 4\lambda, \pm 8\lambda, \dots, 4k\lambda, \dots$ funkcija C također poprima vrijednost 1 . Zbog svojstva 13 slijedi da je najmanja pozitivna vrijednost od τ moguća jedino za $\tau = 4\lambda$.

Analogno imamo za funkciju S .

$$S(\lambda + \tau) = S(\lambda) = 1.$$

Kako je i $S(\lambda + 4k\lambda) = S(\lambda) = 1$, $k \in \mathbf{Z}$, slijedi da je najmanja pozitivna vrijednost $\tau = 4\lambda$. ■

Analički tangens T i analitički kotangens CT se definiraju formulama

$$T(x) = \frac{S(x)}{C(x)}, \quad \text{i} \quad CT(x) = \frac{C(x)}{S(x)}.$$

Njihova svojstva se sada bez većih problema mogu izvesti iz gornjih svojstava za C i S (kao što smo to uradili u § 1.4.).

TEOREM 1 (jedinstvenost). *Za svako $\lambda > 0$ postoji najviše jedan par funkcija C i S koje zadovoljavaju aksiome A1 - A3.*

Dokaz. Neka je zadan $\lambda > 0$, te neka su C, S i C_1, S_1 dva para funkcija koje zadovoljavaju A1 - A3. Dokazat ćemo da je $C = C_1$ i $S = S_1$, tj. $C(x) = C_1(x)$ i $S(x) = S_1(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Prvo pokažimo da se C i C_1 podudaraju u točkama

$$\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2^2}, \dots, \frac{\lambda}{2^n}, \dots$$

Prema A3 imamo da je $C(\lambda) = 0$ i $C_1(\lambda) = 0$. Sada višestrukom primjenom formule polovičnog kuta (svojstvo 8.) imamo

$$C\left(\frac{\lambda}{2}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad C\left(\frac{\lambda}{2^2}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2^2}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

i općenito

$$C\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \frac{s_n}{2},$$

gdje je $s_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ (n korijena). Isto tako se vidi da vrijedi

$$S\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2-s_{n-1}}}{2}.$$

Neka su sada $m \in \mathbf{Z}$ i $n \in \mathbf{N}$ bilo koji brojevi. Pokažimo da se C i C_1 (a isto tako S i S_1) podudaraju u svim točkama oblika $\frac{m}{2^n}\lambda$. Neka je prvo $m > 0$. Za $m = 1$ smo to već dokazali

$$C\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) \quad \text{i} \quad S\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right).$$

Pretpostavimo da za neko $m \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$C\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right) = C_1\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right) \quad \text{i} \quad S\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right) = S_1\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right), \quad (*)$$

pa dokazimo da vrijedi i za $m+1$. Prema adicionim formulama (svojstvo 6.) tada imamo

$$\begin{aligned} C\left(\frac{m+1}{2^n}\lambda\right) &= C\left(\frac{m}{2^n}\lambda + \frac{\lambda}{2^n}\right) = C\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right)C\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) - S\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right)S\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \\ &= C_1\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right)C_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) - S_1\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right)S_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{m+1}{2^n}\lambda\right). \end{aligned}$$

Na isti se način (*) dokazuje i za funkcije S, S_1 . Time smo indukcijom dokazali (*) za sve $m \in \mathbf{N}$.

Za $m = 0$, prema A3 i svojstvu 1 također vrijedi

$$C\left(\frac{0 \cdot \lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{0 \cdot \lambda}{2^n}\right) = 1, \quad S\left(\frac{0 \cdot \lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{0 \cdot \lambda}{2^n}\right) = 0.$$

Za $m < 0$, $m \in \mathbf{Z}$, (*) također vrijedi zbog parnosti odnosno neparnosti (svojstvo 5.). Na primjer,

$$C\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right) = C\left(\frac{-m}{2^n}\lambda\right) = C_1\left(\frac{-m}{2^n}\lambda\right) = C_1\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right).$$

Sada pokažimo da je $C(x) = C_1(x)$ (i $S(x) = S_1(x)$) u bilo kojoj točki $x \in \mathbf{R}$. Dovoljno je uzeti $x > 0$, jer će tada za $x < 0$ to opet slijediti iz parnosti i neparnosti.

Napišimo $\frac{x}{\lambda}$ u binarnom sustavu (v. pogl. II), tj. neka je

$$\frac{x}{\lambda} = b_0 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \dots, \quad \text{odnosno} \quad x = b_0\lambda + \frac{b_1\lambda}{2} + \frac{b_2\lambda}{2^2} + \dots + \frac{b_n\lambda}{2^n} + \dots,$$

gdje je b_0 cijeli broj, a $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ binarni brojevi (bitovi), tj. $b_k = 0$ ili $b_k = 1$. Ako je taj binarni razlomak konačan, tj. za neko n je $b_n \neq 0$, a $b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = 0$, onda je x oblika $\frac{m}{2^n}\lambda$ i u tom slučaju smo već dokazali našu tvrdnju. Sada uzmimo da je binarni razlomak beskonačan. Neka je

$$x_n = b_0\lambda + \frac{b_1\lambda}{2} + \dots + \frac{b_n\lambda}{2^n}.$$

Tada je $C(x_n) = C_1(x_n)$ prema već dokazanome. Kako je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, onda zbog neprekidnosti (svojstvo 13.) imamo

$$C(x) = C\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_1(x_n) = C_1\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = C_1(x).$$

Slično se dokaže da je $S(x) = S_1(x)$. ■

Napomena 1. Skup $S \subseteq \mathbf{R}$ je **svuda gust** ako se svaki $x \in \mathbf{R}$ može napisati kao limes niza elemenata iz S . Gornji dokaz odražava poznatu činjenicu iz matematičke analize. Ako su $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dvije neprekidne funkcije koje se podudaraju na svuda gustom podskupu $S \subseteq \mathbf{R}$, tj. $f|_S = g|_S$, onda se one podudaraju svuda, tj. $f = g$.

U gornjem slučaju je $f = C$, $g = C_1$, a $S = \left\{ \frac{m}{2^n}\lambda \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$.

U dosadašnjim razmatranjima proučavali smo funkcije C i S pod pretpostavkom da za neko $\lambda > 0$ postoje pripadne funkcije $C = C_\lambda$ i $S = S_\lambda$. Ako su dvjema različitim vrijednostima $\lambda = \lambda_1$ i $\lambda = \lambda_2$ pridruženi parovi $(C_{\lambda_1}, S_{\lambda_1})$ i $(C_{\lambda_2}, S_{\lambda_2})$, onda su oni različiti, jer npr. za $\lambda_1 < \lambda_2$ imamo $C_{\lambda_2}(\lambda_1) > 0$, dok je $C_{\lambda_1}(\lambda_1) = 0$. Drugim riječima, pridruživanje $\lambda \mapsto (C_\lambda, S_\lambda)$ je injekcija.

TEOREM 2. *Ako za neko $\lambda = \lambda_0$ postoji pridruženi par funkcija $(C_{\lambda_0}, S_{\lambda_0})$, koji zadovoljava aksiome A1 - A3, onda i za svako $\lambda > 0$ postoji jedinstveni par (C_λ, S_λ) koji zadovoljava A1 - A3.*

Dokaz. Stavimo

$$C_\lambda(x) = C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0 x}{\lambda}\right), \quad S_\lambda(x) = S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0 x}{\lambda}\right).$$

Prvo, jasno je da su C_λ i S_λ definirane na čitavom \mathbf{R} . Provjerimo A1. Imamo

$$\begin{aligned}
 C_\lambda(x-y) &= C_{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} x - \frac{\lambda_0}{\lambda} y \right) = \\
 &= C_{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} x \right) C_{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} y \right) + S_{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} x \right) S_{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} y \right) = \\
 &= C_\lambda(x) C_\lambda(y) + S_\lambda(x) S_\lambda(y).
 \end{aligned}$$

Za provjeru A2, neka je $0 < x < \lambda$. Tada je $0 < \frac{\lambda_0}{\lambda} x < \lambda_0$, pa je

$$C_\lambda(x) = C_{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} x \right) > 0, \quad \text{a} \quad S_\lambda(x) = S_{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} x \right) > 0.$$

Konačno, A3 slijedi odmah: $C_\lambda(0) = C_{\lambda_0}(0) = 1$, $S_\lambda(\lambda) = S_{\lambda_0}(\lambda_0) = 1$. Iz teorema jedinstvenosti slijedi da osim funkcija $x \mapsto C_{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} x \right)$ i $x \mapsto S_{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} x \right)$ nema drugih funkcija C_λ i S_λ . ■

12.2. Egzistencija trigonometrijskih funkcija

U ovoj točki ćemo dokazati egzistenciju funkcija C i S koje zadovoljavaju aksiome A1 - A3. Dat ćemo dva dokaza. Jedan se odnosi na geometrijsku teoriju trigonometrijskih funkcija, a drugi na redove.

Geometrijsku teoriju trigonometrijskih funkcija smo detaljno razradili u § 1-4. Geometrijski definirani kosinus i sinus su $C_{\pi/2}$ i $S_{\pi/2}$, tj.

$$\cos x = C_{\pi/2}(x), \quad \sin x = S_{\pi/2}(x),$$

a funkcije C_λ i S_λ su

$$C_\lambda(x) = \cos \frac{\pi}{2\lambda} x, \quad S_\lambda(x) = \sin \frac{\pi}{2\lambda} x.$$

Iz geometrijske teorije znamo da ove funkcije zadovoljavaju A1 - A3, a zbog teorema jedinstvenosti to su i jedine funkcije koje zadovoljavaju aksiome A1 - A3.

Kao što znamo, jednadžba jedinične kružnice se može parametarski napisati kao

$$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

gdje parametar t ima značenje duljine luka od točke $A(1, 0)$ do točke $T(x, y)$ na kružnici. Za $\lambda \neq \pi/2$, ta se kružnica parametarski može zapisati kao (v. narednu lemu):

$$x = \cos_\lambda t, \quad y = \sin_\lambda t, \quad \text{tj.} \quad x = \cos \frac{\pi}{2\lambda} t, \quad y = \sin \frac{\pi}{2\lambda} t.$$

Duljina luka $s = |\widehat{AT}|$ je jednaka $s = \frac{\pi}{2\lambda} t$, odakle je $t = \frac{2\lambda}{\pi} s$, tj. parametar t je proporcionalan duljini luka s koeficijentom proporcionalnosti različitim od 1.

Trigonometrijske funkcije kao redovi potencija

Definirajmo dvije funkcije f i g redovima potencija

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ovi redovi potencija konvergiraju za svako $x \in \mathbf{R}$ (u to se najlakše možemo uvjeriti primjenom D'Alambertovog kriterija). Oдавde nije teško pokazati da tada ti redovi konvergiraju i apsolutno za svako $x \in \mathbf{R}$, kao i uniformno (usp. S. Kurepa, *Matematička analiza II*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1981). Sume tih redova su neprekidne funkcije definirane na čitavom \mathbf{R} i, štoviše, derivabilne su, a njihove derivacije možemo računati član po član.

Dokažimo sada da f i g zadovoljavaju aksiom A1, tj. da vrijedi

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y). \quad (*)$$

Na lijevoj strani imamo

$$f(x-y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}.$$

Opći n -ti član prvog sumanda $f(x)f(y)$ je jednak

$$(-1)^n \left[\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n-2}y^2}{(2n-2)!2!} + \dots + \frac{x^{2n-2k}y^{2k}}{(2n-2k)!(2k)!} + \dots + \frac{y^{2n}}{(2n)!} \right],$$

a n -ti član drugog sumanda $g(x)g(y)$ je jednak

$$(-1)^{n-1} \left[\frac{x^{2n-1}y}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n-3}y^3}{(2n-3)!3!} + \dots + \frac{x^{2n-2k+1}y^{2k-1}}{(2n-2k+1)!(2k-1)!} + \dots + \frac{xy^{2n-1}}{(2n-1)!} \right].$$

Zbrajanjem $f(x)f(y) + g(x)g(y)$ dobivamo red s n -tim članom

$$(-1)^n \left[\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-1}y}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n-2}y^2}{(2n-2)!2!} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2n-k}y^k}{(2n-k)!k!} + \dots + \frac{y^{2n}}{(2n)!} \right].$$

Iz binomne formule slijedi da je on jednak $(-1)^n \frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}$. Time smo dokazali (*), odnosno A1.

Sada dokažimo da funkcije f i g zadovoljavaju A2 i A3. U tu svrhu pokažimo njihovu monotonost i konstantnost predznaka u nekoj desnoj okolini točke 0. Napišimo $g(x)$ ovako.

$$g(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} \right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7} \right) + \dots$$

Za dovoljno male pozitivne x svi članovi ovako napisanog reda su pozitivni, pa je i $g(x) > 0$. To možemo postići npr. za $0 < x < 2$. Stoga je na intervalu $(0, 2)$ funkcija g pozitivna. Pokažimo da na tom intervalu f strogo pada. Da se to vidi, dovoljno je pokazati da joj je derivacija negativna. Imamo

$$f'(x) = -x + \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = -g(x) < 0$$

za $x \in (0, 2)$.

Pogledajmo vrijednosti $f(0)$ i $f(2)$. Očito je $f(0) = 1$.

$$f(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \dots = -\frac{1}{3} - \frac{2^6}{6!} \left(1 - \frac{4}{7 \cdot 8}\right) - \frac{2^{10}}{10!} \left(1 - \frac{4}{11 \cdot 12}\right) - \dots < 0.$$

Dakle, na krajevima segmenta $[0, 2]$ funkcija f ima suprotne predznake: $f(0) > 0$ i $f(2) < 0$. Zbog neprekidnosti i monotonosti od f na $[0, 2]$ slijedi da postoji jedinstveni $x = \lambda$, $0 < \lambda < 2$, tako da je $f(\lambda) = 0$. Pri tom je $f(x) > 0$ za $0 < x < \lambda$. Prema tome, f i g zadovoljavaju aksiom A2, jer su obje pozitivne na intervalu $(0, \lambda)$.

Stavimo li u (*) $x = y = \lambda$, dobivamo

$$f(0) = f^2(\lambda) + g^2(\lambda), \quad \text{tj.} \quad g^2(\lambda) = 1.$$

Zbog $g(\lambda) > 0$ slijedi da je $g(\lambda) = 1$.

Dakle, $f(0) = g(\lambda) = 1$, pa f i g zadovoljavaju aksiom A3.

Iz teorema jedinstvenosti slijedi dakle da je

$$f(x) = C_\lambda(x), \quad g(x) = S_\lambda(x).$$

Sada pokažimo da se funkcije f i g , tj. funkcije C_λ i S_λ definirane redovima

$$C_\lambda(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \text{i} \quad S_\lambda(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

podudaraju s geometrijski definiranim kosinusom i sinusom iz § 1. Prvo nam treba jedna lema.

LEMA 2. Sustav $x = C_\lambda(t)$, $y = S_\lambda(t)$, $0 \leq t \leq 4\lambda$, predočuje parametarske jednadžbe jedinične kružnice.

Dokaz. Funkcije C_λ i S_λ na segmentu $[0, \lambda]$ su neprekidne i strogo monotone, pa je slika funkcije $t \mapsto (C_\lambda(t), S_\lambda(t))$ sa $[0, \lambda]$ u \mathbf{R}^2 jednostavni luk. Za $t \in [0, \lambda]$, pripadna točka leži na prvom kvadrantu jedinične kružnice, jer je

$$x^2 + y^2 = [C_\lambda(t)]^2 + [S_\lambda(t)]^2 = 1, \quad C_\lambda(t), S_\lambda(t) \geq 0.$$

Obratno, neka je $T = (x, y)$ točka na prvom kvadrantu jedinične kružnice. Tada je

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ta točka odgovara vrijednosti parametra $t \in [0, \lambda]$ za koju je $C_\lambda(t) = x$.

Krajevi tog luka su točke

$$\begin{aligned} t = 0, & \quad x = C_\lambda(0) = 1, & \quad y = S_\lambda(0) = 0 \\ t = \lambda, & \quad x = C_\lambda(\lambda) = 0, & \quad y = S_\lambda(\lambda) = 1. \end{aligned}$$

Na isti se način pokaže da se segment $[\lambda, 2\lambda]$ preslika na drugi kvadrant jedinične kružnice, $[2\lambda, 3\lambda]$ na treći, a $[3\lambda, 4\lambda]$ na četvrti kvadrant. ■

Promotrimo, dakle, parametarske jednadžbe jedinične kružnice

$$x = C_\lambda(t), \quad y = S_\lambda(t).$$

Neka je $\sigma = \widehat{AT}$ luk te kružnice među točkama $A = (1, 0)$ i $T = (x, y)$ i točki T neka odgovara vrijednost parametra $t \in [0, 4\lambda]$. Pokažimo da je duljina luka \widehat{AT} jednaka t (sl. 92). Podijelimo segment $[0, t]$ na n jednakih dijelova djelišnim točkama

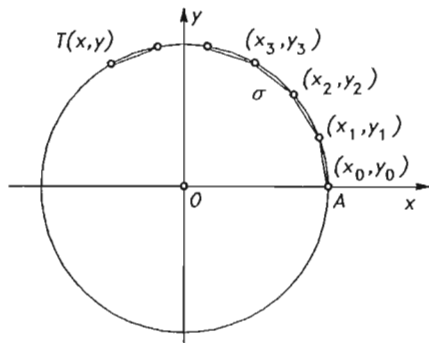
$$0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \dots, \frac{kt}{n}, \dots, \frac{(n-1)t}{n}, t.$$

Toj subdiviziji segmenta $[0, t]$ odgovara subdivizija luka σ na n lukova. Izračunajmo duljine tetiva tih lukova. k -ti luk ima koordinate krajeva

$$x_{k-1} = f\left(\frac{(k-1)t}{n}\right), y_{k-1} = g\left(\frac{(k-1)t}{n}\right) \quad \text{i} \quad x_k = f\left(\frac{kt}{n}\right), y_k = g\left(\frac{kt}{n}\right).$$

Duljina k -te tetive je jednaka

$$\begin{aligned} d_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \\ &= \sqrt{\left[C_\lambda\left(\frac{kt}{n}\right) - C_\lambda\left(\frac{(k-1)t}{n}\right)\right]^2 + \left[S_\lambda\left(\frac{kt}{n}\right) - S_\lambda\left(\frac{(k-1)t}{n}\right)\right]^2} = \\ &= \sqrt{2\left[1 - C_\lambda\left(\frac{t}{n}\right)\right]} = \sqrt{4S_\lambda^2\left(\frac{t}{2n}\right)} = 2\left|S_\lambda\left(\frac{t}{2n}\right)\right| = 2S_\lambda\left(\frac{t}{2n}\right). \end{aligned}$$



Sl. 92.

(Posljednja jednakost vrijedi, jer je za velike n , broj $\frac{t}{2n} \in \langle 0, \lambda \rangle$, a u tom intervalu je $S_\lambda(x) > 0$.)

Stoga je duljina upisane izlomljene linije jednaka $2nS_\lambda\left(\frac{t}{2n}\right)$. No duljina luka \widehat{AT} jednaka je limesu takvog niza duljina upisanih izlomljenih linija. Zato imamo

$$\begin{aligned}\sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2nS_\lambda\left(\frac{t}{2n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left(\frac{t}{2n} - \frac{t^3}{2^3 \cdot 3!n^3} + \frac{t^5}{2^5 \cdot 5!n^5} - \dots \right) = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{2^3 \cdot 3!n^2} + \dots \right) = t.\end{aligned}$$

Prema tome, $C_\lambda(t)$ i $S_\lambda(t)$ su koordinate krajnje točke luka duljine $\sigma = t$ jedinične kružnice s početnom točkom $(1,0)$. Iz geometrijske definicije kosinusa i sinusa slijedi da je

$$C_\lambda(t) = \cos t, \quad S_\lambda(t) = \sin t.$$

Stavimo li ovdje $t = \lambda$, dobivamo prvi kvadrant luka, pa je stoga $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

12.3. Još neke aksiomatike trigonometrijskih funkcija

Osim navedene aksiomatike, postoje i druge aksiomatike za trigonometrijske funkcije. U ovoj ćemo točki navesti neke od njih, ali prije toga komentirajmo još malo A1 - A3.

Ovu aksiomatiku možemo još malo oslabiti, tako da u aksiomu A2 zahtijevamo pozitivnost samo jedne od funkcija C ili S na $\langle 0, \lambda \rangle$. Ako, npr., zahtijevamo samo da je $C(x) > 0$ za $x \in \langle 0, \lambda \rangle$, onda iz $0 < x < \lambda$ slijedi $0 < \lambda - x < \lambda$, pa je (zbog svojstva 3)

$$S(x) = C(\lambda - x) > 0.$$

Kao druga aksiomatika trigonometrijskih funkcija može poslužiti i ova.

Neka su $C, S : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funkcije s ovim svojstvima:

B1. Vrijede adicione formule

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y), \quad C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y).$$

B2. Vrijedi identitet $C^2(x) + S^2(x) = 1$.

B3. Postoji $\lambda > 0$, tako da je $S(x) > 0$ za $x \in \langle 0, \lambda \rangle$.

B4. $C(0) = 1$, $C(\lambda) = 0$.

Jasno je da A1 - A3 povlače B1 - B4 (v. svojstva 1,2, ...). Pokažimo da i B1 - B4 povlače A1 - A3. Prvo, ako u B2 stavimo $x = 0$, dobivamo $C^2(0) + S^2(0) = 1$, odakle zbog B4 slijedi $S(0) = 0$. Stavimo li u B1 $y = -x$ dobivamo (zbog B4)

$$0 = S(x)C(-x) + C(x)S(-x), \quad 1 = C(x)C(-x) - S(x)S(-x).$$

Odavde nalazimo (slično dokazu svojstva 5) da je

$$S(-x) = -S(x), \quad C(x) = C(-x).$$

Dakle, C je parna, a S neparna funkcija.

Ako u drugoj jednakosti zamijenimo y s $-y$, onda iz parnosti i neparnosti dobivamo

$$C(x - y) = C(x)C(y) + S(x)S(y),$$

pa vrijedi A1.

Stavimo u B2 $x = \lambda$, onda zbog B4 slijedi $S^2(\lambda) = 1$, odakle zbog B3 slijedi $S(\lambda) = 1$. Dakle vrijedi A3. Konačno, iz $x \in (0, \lambda)$ slijedi $\lambda - x \in (0, \lambda)$, pa je zbog B3 i $S(\lambda - x) > 0$. Stoga u intervalu $(0, \lambda)$ imamo

$$C(x) = S(\lambda)C(x) - C(\lambda)S(x) = S(\lambda - x) > 0,$$

pa vrijedi i aksiom A2.

Dakle, aksiomatika A1 - A3 je ekvivalentna s B1 - B4.

U svezi s aksiomatikom A1 - A3 spomenimo i ovu zanimljivost. Zamijenimo aksiom A1 aksiomom

$$A1'. \quad S(x + y) = S(x)C(y) + C(x)S(y).$$

Uzmimo, jednostavnosti radi, da je $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Tada funkcije \cos i \sin zadovoljavaju A1', A2 i A3. No, nije teško pokazati da te aksiome, osim \cos i \sin , zadovoljavaju i funkcije

$$C(x) = a^x \cos x, \quad S(x) = a^{x - \frac{\pi}{2}} \sin x.$$

Za razne vrijednosti od a dobivamo i različite odgovarajuće funkcije C i S . Za $a = 1$ to su obične trigonometrijske funkcije. Prema tome, A1', A2 i A3 zadovoljava beskonačno mnogo različitih funkcija. Stoga A1' ne može zamijeniti aksiom A1.

Na kraju spomenimo aksiomatiku koja govori o samo jednoj funkciji.

Neka je $C : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funkcija koja zadovoljava ove aksiome

C1. Funkcija C je neprekidna.

C2. C zadovoljava funkcionalnu jednadžbu

$$C(x + y) + C(x - y) = C(x)C(y).$$

C3. Postoji najmanji pozitivni korijen λ jednadžbe $C(x) = 0$, tj. postoji $\lambda > 0$, tako da je $C(\lambda) = 0$, a $C(x) \neq 0$ za $0 < x < \lambda$.

C4. $C(0) > 0$.

Sada se, slično kao iz A1 - A3, može pokazati da postoji jedinstvena funkcija C koja zadovoljava C1 - C4. Ta funkcija je dana formulom

$$C(x) = C_\lambda(x) = \cos \frac{\pi}{2\lambda} x.$$

Slična aksiomatika postoji i za funkciju S .

12.4. Transcendentnost trigonometrijskih funkcija

Za realnu funkciju $x \mapsto y = f(x)$ kažemo da je transcendentna ako ne postoji polinom $P(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ različit od nul-polinoma takav da je $P(x, f(x)) = 0$, za svako x .

TEOREM 3. *Trigonometrijske funkcije su transcendentne.*

Dokaz. Pokažimo da je funkcija $f(x) = \sin x$ transcendentna, tj. da ne postoji polinom dviju varijabli $P(x, y)$, različit od nul-polinoma takav da za svako $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x, \sin x) = 0. \quad (1)$$

Pretpostavimo suprotno da takav polinom $P(x, y)$ postoji. Po definiciji polinoma dviju varijabli možemo ga tada prikazati u obliku

$$P(x, y) = f_n(y)x^n + f_{n-1}(y)x^{n-1} + \dots + f_1(y)x + f_0(y), \quad (2)$$

gdje su $f_i(y)$, $i = 0, 1, \dots, n$ polinomi u varijabli y . Neka je sada $\xi \in [-1, 1]$ bilo koji realni broj. Tada postoji beskonačno mnogo realnih brojeva $\eta_k = \arcsin \xi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ takvih da je $\xi = \sin \eta_k$. Uvrstimo u (2) $y = \xi$. Dobivamo

$$f_n(\xi)x^n + f_{n-1}(\xi)x^{n-1} + \dots + f_1(\xi)x + f_0(\xi) = 0.$$

Ova jednadžba tada ima beskonačno mnogo korijena $x_k = \eta_k$, $k \in \mathbb{Z}$, a kako je ona konačnog stupnja, to je moguće samo ako je

$$f_n(\xi) = f_{n-1}(\xi) = \dots = f_1(\xi) = f_0(\xi) = 0.$$

Dakle, svaki je realni broj $\xi \in [-1, 1]$ korijen svake od jednadžbi

$$f_n(y) = 0, \dots, f_0(y) = 0,$$

a to je moguće samo onda ako su svi polinomi f_k , $k = 0, \dots, n$ nul-polinomi. Iz (2) tada slijedi da je $P(x, y)$ nul-polinom, stoga ne postoji polinom $P(x, y)$, različit od nul-polinoma takav da vrijedi (1).

Transcendentnost ostalih trigonometrijskih funkcija dokazuje se analogno. ■

Napomena 2. Odavde slijedi da se nijedna trigonometrijska funkcija ne može izraziti pomoću algebarskih operacija nad argumentom, jer kada bi postojala algebarska funkcija, u kojoj se pojavljuju samo četiri osnovne operacije, potenciranje i korjenovanje, takva da je npr. $y = \sin x = f(x)$, tada bi ona zadovoljavala algebarsku jednadžbu $P(x, y) = 0$, što je prema dokazanom teoremu nemoguće. Uočimo da poznati razvoj u red funkcije $y = \sin x$ zapravo sadrži operaciju graničnog prijelaza.

Može se pokazati da su i eksponencijalne i logaritamske funkcije transcendentne.

12.5. Izračunavanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija

Činjenica da su trigonometrijske funkcije transcendentne ukazuje među ostalim, i na to da se vrijednosti trigonometrijskih funkcija ne mogu točno izračunati, osim nekih iznimaka, npr. $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$ itd. Zato moramo pribjeći nekim aproksimativnim metodama. Najvažnije među njima su redovi. Kao što znamo, dovoljno je izračunati vrijednosti funkcija brojeva $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, odnosno u stupnjevima za $0^\circ \leq x \leq 45^\circ$.

Vrijednosti sinusa i kosinusa su dani redovima

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

To su alternirani redovi, a zbog $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ slijedi $0 \leq x \leq 1$, pa članovi tog reda po apsolutnoj vrijednosti padaju i teže k nuli. Poznato je iz teorije redova da se tada suma reda nalazi između susjednih članova parcijalnih suma tog reda. Stoga imamo da je

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x,$$

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

itd.

Analogne jednakosti vrijede i za funkciju kosinus.

Lako se vidi da ako želimo izračunati vrijednosti funkcije sin na 5 decimala točno, onda treba uzeti polinomsku aproksimaciju

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!},$$

i tada je greška najviše $\frac{x^9}{9!}$. Kako je $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} < 0,8$, to je pogreška najviše

$$\frac{x^9}{9!} < \frac{(0,8)^9}{9!} < \frac{0,2}{362880} < 0,000001.$$

Primjer 1. Izračunajte s točnošću od 5 decimala $\cos 24^\circ 30'$.

Rješenje. Kut od $24^\circ 30'$ u radijanima iznosi 0,427606. Vrijednost $\cos x$ izračunati ćemo pomoću

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

Greška pri tom računanju je manja od

$$\frac{x^8}{8!} < \frac{(0,5)^8}{8!} = \frac{5^8}{8!10^8} < 0,000005.$$

Dobiva se, dakle, $\cos 24^\circ 30' \approx 0,90996$ i ovih pet decimala je tačno. ■

Još bolje aproksimacije se dobivaju pomoću Čebiševljevih polinoma (v. §6.3). Tako se tom metodom dobiva da je za $t \in [-1, 1]$

$$\sin \frac{\pi}{2} t = 1,1336 t - 0,1381 t^3 + 0,0045 t^5,$$

s tačnošću na 3 decimale.

Ova razmatranja su podloga za sve tablice vrijednosti trigonometrijskih funkcija (npr. u logaritamskim tablicama), kao i za sve softverske pakete s time u vezi. Prve precizne logaritamske i trigonometrijske tablice, sastavio je Vega¹¹.

12.6. Hiperbolne i ostale elementarne funkcije

Uz trigonometrijske funkcije često se promatraju i tzv. hiperbolne ili hiperboličke funkcije. Kosinus hiperbolni ch , sinus hiperbolni sh , tangens hiperbolni th i kotangens hiperbolni cth definiraju se pomoću eksponencijalnih funkcija ovako:

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \text{cth } x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Osnovne veze među hiperbolnim funkcijama su ove:

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}, \quad \text{cth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}, \quad \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1.$$

Iz posljednje jednakosti dolazi naziv "hiperbolne", jer za razliku od trigonometrijskih funkcija $\cos t$, $\sin t$, koje su koordinate točke na jediničnoj kružnici $x^2 + y^2 = 1$, hiperbolne funkcije $\text{ch } t$, $\text{sh } t$ su koordinate točke na hiperboli $x^2 - y^2 = 1$.

Prirodna veza između trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija slijedi iz ovih razmatranja. Definiramo eksponencijalnu funkciju kompleksne varijable formulom

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ta funkcija očito proširuje eksponencijalnu funkciju definiranu na realnim brojevima (v. pogl. II, § 5). S druge strane, ako je z čisto imaginaran broj, tj. oblika $z = iz$ ($x \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$), onda odvajanjem realnog i imaginarnog dijela imamo

¹¹ Jurij Vega (1756–1802), slovenski matematičar.

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) + \\
 &+ i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) = \\
 &= \cos x + i \sin x.
 \end{aligned}$$

Dakle,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

što je čuvena **Eulerova formula**. Odavde slijedi da je $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, pa zbrajanjem i oduzimanjem tih jednakosti slijedi

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

To nas motivira da definiramo **kompleksne trigonometrijske funkcije**, tj. $\cos, \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ formulama

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Odavde za $z = ix$ dobivamo vezu hiperbolnih i trigonometrijskih funkcija

$$\operatorname{ch} x = \cos ix, \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{i} \sin ix.$$

Iz ovih formula i svojstava eksponencijalnih funkcija lako dobivamo da vrijede **adicione formule za hiperbolne funkcije**:

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Isto tako, iz svojstava eksponencijalne funkcije lako se vidi da su sh , th , cth neparne funkcije, a ch parna funkcija, te da su sh , ch i th strogo rastuće funkcije, th strogo padajuća funkcija na skupu pozitivnih brojeva.

Točnije $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je strogo rastuća funkcija čija je slika čitav \mathbb{R} , pa ima inverznu funkciju $\operatorname{sh}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ta funkcija se zove **area-sinus** i obilježava sa Arsh . Dakle, $y = \operatorname{Arsh} x \iff x = \operatorname{sh} y$. Iz definicije imamo

$$x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \implies e^y - e^{-y} - 2x = 0 \implies u^2 - 2ux - 1 = 0,$$

gdje je $u = e^y$. Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobivamo

$$u = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

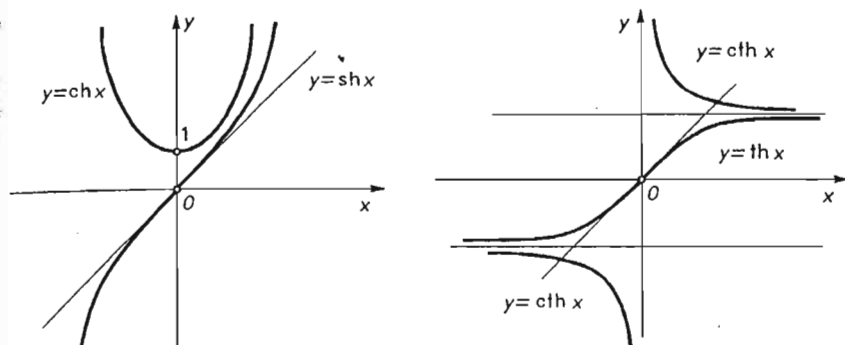
Kako je $x < \sqrt{x^2 + 1}$, te $u = e^y > 0$, slijedi da je

$$\begin{aligned}
 u &= x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad \text{tj.} \quad e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \implies \\
 y &= \operatorname{Arsh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Nadalje, kako je $\operatorname{ch} |_{[0, \infty)}$ strogo rastuća, njen inverz se označava sa Arch i zove **area-kosinus**. Kako je slika $\operatorname{ch} [0, \infty) = \{y \in \mathbf{R} \mid y \geq 1\}$, onda sličnim razmatranjima kao gore dobivamo

$$y = \operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1.$$

Slično se dobivaju formule za Arth i Arcth . Iz definicije tih funkcija i grafova funkcija $y = e^x$ i $y = e^{-x}$ lako se vidi da grafovi hiperbolnih funkcija izgledaju ovako:



Sl. 93.

Graf funkcije $x \mapsto \operatorname{ch} x$ zove se još i "**lančanica**", jer slobodno obješeni lanac ima oblik te krivulje.

Napomenimo još da su sh , ch , th i cth derivabilne funkcije te da je $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Pogledajmo i geometrijsko značenje hiperbolnih funkcija. Točnije, ustanovimo geometrijsko značenje varijable t u jednadžbama

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t, \quad (1)$$

tj. u kakvom su one odnosu s obzirom na točku $T = (x, y)$ na jednakostraničnoj hiperboli

$$x^2 - y^2 = 1. \quad (2)$$

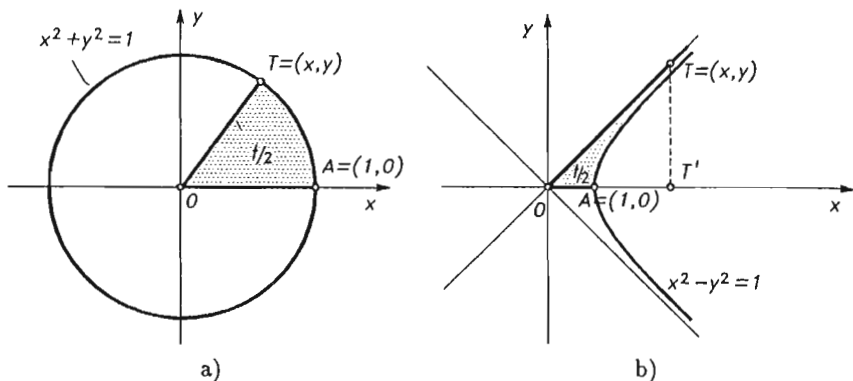
U trigonometrijskom slučaju imamo $x = \cos t$, $y = \sin t$ i kružnicu $x^2 + y^2 = 1$, pa jednadžbe $x = \cos t$, $y = \sin t$ zovemo parametarskim jednadžbama kružnice.

Kao što znamo, t je radijanska mjera kuta $\sphericalangle AOT$ (sl. 94a), tj. $t = |\widehat{AT}|/|OA|$. No površina kružnog isječka kruga radijusa r i središnjeg kuta t je jednaka $\frac{1}{2} r^2 t$.

Kako je u našem slučaju $r = 1$, to je površina tog isječka $\frac{1}{2} t$. Stoga je

$$t = \text{dvostruka površina kružnog isječka } AOT.$$

(Naravno, negativnu vrijednost od t interpretiramo kao odgovarajuća površina koju prebriše radij-vektor OT , gibajući se u smjeru kazaljke na satu od položaja OA .)



Sl. 94.

Sada pokažimo analognu interpretaciju za jednadžbu (2). Izračunajmo površinu "hiperbolnog isječka" AOT (sl. 94b). Pomoću integralnog računa imamo

$$\begin{aligned}
 p(\text{isječak } AOT) &= p(\triangle OTT') - p(\text{odsječak } ATT') = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \int_A^T y \, dx = \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \int_A^T \operatorname{sh} t \, d(\operatorname{ch} t) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} \int_0^t (\operatorname{ch} 2t - 1) \, dt = \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t - t \right]_{t=0}^{t=t} = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}.
 \end{aligned}$$

Dakle,

t = dvostruka površina hiperbolnog isječka AOT .

Jednadžbe (1) zovemo **parametarskim jednadžbama hiperbole** (2).

Napomenimo da se vrlo važna klasa funkcija s kojima se u praksi najčešće manipulira zove zajedničkim imenom klasa **elementarnih funkcija**. To su funkcije koje se dobivaju iz polinoma, eksponencijalnih, trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija i njima inverznih funkcija (tj. racionalnih, logaritamskih, ciklotometrijskih i area-funkcija) primjenom konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja, potenciranja, korjenovanja i komponiranja.

Na kraju, pogledajmo malo поближе kompleksne trigonometrijske funkcije. Pogledajmo, npr. preslikavanje

$$z \mapsto w = \cos z.$$

Ako je $z = x + iy$, a $w = u + iv$, onda možemo na to preslikavanje gledati kao na preslikavanje iz kompleksne Oxy -ravnine u kompleksnu Ouv -ravninu. Prvo imamo

$$\begin{aligned} \cos z = \cos(x + iy) &= \frac{e^{(x+iy)i} + e^{-(x+iy)i}}{2} = \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{2} = \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin y) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} = \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \\ &- i \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

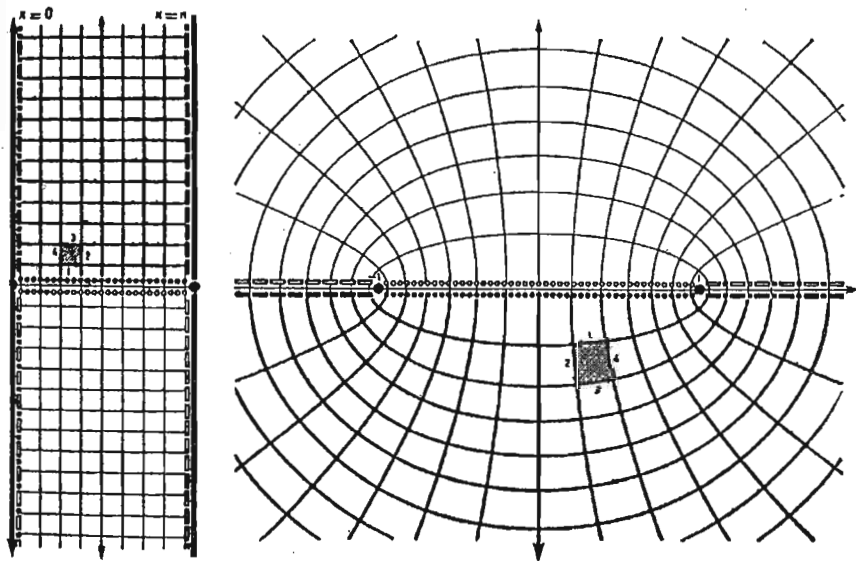
Prema tome dobivamo $u = \cos x \operatorname{ch} y$, $v = -\sin x \operatorname{sh} y$.

Zbog periodičnosti dovoljno je promatrati $\cos z$ samo u traci $-\pi \leq x \leq \pi$, a zbog parnosti, tj. $\cos z = \cos(-z)$, dovoljno je promatrati $\cos z$ samo za $0 \leq x \leq \pi$. Za $x = 0$ je $u = \cos iy = \operatorname{ch} y$, $v = 0$. Za $-\infty < y \leq 0$ funkcija $y \mapsto \operatorname{ch} y$ pada od $+\infty$ do 1, a za $0 \leq y < \infty$ raste od 1 do $+\infty$, pa imaginarnoj osi Oy u Ouv -ravnini korespondira dva puta pokrivena realna os $1 \leq u < \infty$, $v = 0$. Za $x = \pi$ je $u = -\operatorname{ch} y$, $v = 0$, pa pravcu $x = \pi$ odgovara u Ouv -ravnini zraka (dva puta pokrivena) $-\infty < u \leq -1$, $v = 0$.

Dužini $y = c$, $0 \leq x \leq \pi$, $c \neq 0$, paralelnoj realnoj osi odgovara krivulja $u = \operatorname{ch} c \cos x$, $v = -\operatorname{sh} c \sin x$. Lako se vidi da je to luk elipse (v. pogl. VI)

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 c} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 c} = 1.$$

Za $c > 0$ je $v < 0$, a za $c < 0$ je $v > 0$, pa se za $c > 0$ dobiva donja, a za $c < 0$ gornja



Sl. 95.

polovina elipse. Za $c = 0$ elipsa degenerira u dužinu na realnoj osi $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$. Dužini $x = c$, $0 \leq c \leq \pi$, $c \neq \frac{\pi}{2}$, paralelnoj imaginarnoj osi odgovara krivulja $u = \cos c \operatorname{ch} y$, $v = -\sin c \operatorname{sh} y$, što je grana hiperbole (v. pogl. VI)

$$\frac{u^2}{\cos^2 c} - \frac{v^2}{\sin^2 c} = 1.$$

Za $0 < c < \frac{\pi}{2}$ se dobiva desna grana jer je $u > 0$, a za $\frac{\pi}{2} < c < \pi$ lijeva grana, jer je tada $u < 0$. Za $c = \frac{\pi}{2}$ hiperbola degenerira na imaginarnu os $u = 0$.

Iz svega rečenog slijedi da se pravokutna mreža u Kartezijevom sustavu Oxy preslikavanjem $z \mapsto \cos z$ preslikava u mrežu elipsa i hiperbola u Ouv -ravnini s fokusima u točkama ± 1 (provjerite to) kao na sl. 95. Uočite da je mreža tzv. konfokalnih elipsa i hiperbola opet pravokutna mreža, pa se tu radi o konformnom preslikavanju.

V. STEREOMETRIJA – GEOMETRIJA PROSTORA

§ 1. Aksiomi stereometrije. Paralelnost i okomitost pravca i ravnine

Osnovni objekti (euklidske) geometrije u prostoru su točke, pravci i ravnine. Sve se ostale geometrijske tvorevine iz njih izgrađuju. Točke, pravci i ravnine se ne definiraju, već su ti objekti neizravno definirani pomoću svojih svojstava, a ta su svojstva opisana aksiomima, slično kako je to učinjeno i u geometriji ravnine (prvi dio, pogl. III).

1.1. Aksiomi euklidske geometrije prostora

Euklidskim prostorom (ili kraće prostorom) zovemo skup M_3 čije elemente zovemo točkama, a neke istaknute podskupove pravcima i ravninama. Točke ćemo označavati velikim latinskim slovima A, B, C, \dots , pravce malim latinskim slovima a, b, c, \dots , a ravnine malim slovima grčkog alfabeta $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Pri tome točke i pravci zadovoljavaju aksiome planimetrije (prvi dio, pogl. III) i tim aksiomima još dodajemo tri aksioma geometrije prostora i aksiom S_4 kojim se uvodi metrika.

S_1 . Za svaku ravninu $\alpha \subset M_3$ postoje točke prostora koje joj pripadaju i koje joj ne pripadaju, tj. α je pravi podskup prostora M_3 . Kaže se još da α sadrži te točke ili da je ravnina α **incidentna** s tim točkama ili da leže u njoj, a ako neka točka ne pripada ravnini α , kaže se da ta točka **nije incidentna** s ravninom α .

S_2 . Ako dvije različite ravnine imaju zajedničku točku, onda one imaju zajednički i čitav pravac. (Kaže se još da se tada te ravnine **sijeku** u pravcu, ili da je taj pravac **presječnica** tih ravnina.)

S_3 . Ako dva različita pravca imaju zajedničku točku, onda postoji jedna i samo jedna ravnina, koja sadrži te pravce. (Kaže se još da je tada ta ravnina određena tim pravcima.)

S_4 . Postoji funkcija $d : M_3 \times M_3 \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

$$1. d(A, B) \geq 0, \quad \forall A, B \in M_3, \quad d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$2. d(A, B) = d(B, A), \quad \forall A, B \in M_3$$

$$3. d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \quad \forall A, B, C \in M_3$$

i pri tome znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $C \in \overline{AB}$.

U daljnjem tekstu umjesto oznake $d(A, B)$ često ćemo koristiti oznaku $|AB|$.

Drugim riječima, M_3 je **metrički prostor**. Funkcija d zove se **udaljenost** ili **metrika**.

Prema tome sustav aksioma geometrije prostora sastoji se od aksioma planimetrije i dodatnih aksioma $S_1 - S_4$. Pri tome valja naglasiti da aksiome planimetrije I_1 i I_3 treba utočiti, tj. preformulirati. Naime, aksiom I_1 izricao je tvrdnju da kroz svake dvije različite točke ravnine prolazi jedinstven pravac. Odavde ne slijedi da je to istina za svake dvije različite točke prostora. Slično je s aksiomom I_3 . Zato ćemo te aksiome preformulirati ovako:

P_1 . Kroz svake dvije različite točke prostora prolazi jedan i samo jedan pravac.

P_2 . Za svaki pravac postoje točke koje mu pripadaju i koje mu ne pripadaju.

Sada se, analogno kao i u ravnini, geometrija prostora razvija polazeći od tog sustava aksioma, ne pozivajući se pri tome na zor. Mi ćemo uz svaki dokaz crtati skice, ali iz njih ništa nećemo zaključivati, već one služe samo kao ilustracija toka našeg razmišljanja.

Istaknimo da smo sustav aksioma mogli i drugačije odabrati. Mogli smo, na primjer, uzeti umjesto aksioma $S_1 - S_3$ ekvivalentan sustav:

S'_1 . Ako su dane tri točke, onda postoji barem jedna ravnina koja sadrži te točke.

S'_2 . Postoje četiri točke koje ne pripadaju istoj ravnini.

$S'_3 = S_3$.

No u tom slučaju nema potrebe da se I_1 preformulira, već je P_1 posljedica (teorem) takvog sustava aksioma.

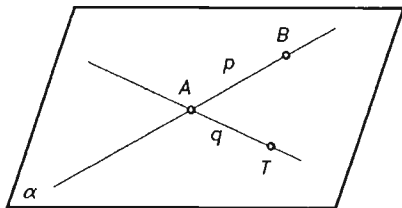
1.2. Prve posljedice aksioma stereometrije

PROPOZICIJA 1. *Postoji jedinstvena ravnina incidentna sa zadanim pravcem i točkom izvan njega.*

Dokaz. Drugim riječima, zadanim pravcem i točkom izvan njega može se položiti jedna jedina ravnina.

Dokažimo najprije egzistenciju takve ravnine. Neka je p zadani pravac i T točka koja ne leži na tom pravcu. Prema P_2 na pravcu p postoje dvije različite točke A i B (sl. 96).

Kako je $T \neq A$, to prema P_1 postoji pravac q kroz A i T . Pravci p i q su različiti i imaju zajedničku točku A , pa prema S_3 postoji ravnina α koja sadrži te pravce. Ovim je egzistencija ravnine koja sadrži pravac p i točku T dokazana. Naglasimo da aksiom S_3 govori da je ravnina određena sa p i q jedinstvena, no to ne znači da smo dokazali jedinstvenost ravnine koja sadrži p i T ; mi smo, naime, na p mogli umjesto točaka A i B odabrati drugi par točaka A' i B' i tko nam garantira da ćemo takvom konstrukcijom dobiti istu ravninu α . Stoga je nužno da se dokaže jedinstvenost.



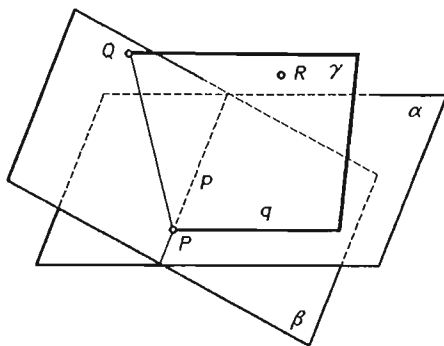
Sl. 96.

Dokaz jedinstvenosti provodi se kontradikcijom. Pretpostavimo da postoji druga ravnina α' koja prolazi pravcem p i točkom T . Prema aksiomu S_2 ravnine α i α' sijeku se u pravcu. Slijedi da tada i točka T mora ležati na pravcu p , a to je kontradikcija s izborom točke T . ■

Primijetimo da se u formulaciji aksioma P_2 kaže da postoje točke prostora koje ne leže na nekom zadanom pravcu. Ako taj pravac leži u nekoj ravnini, onda ne znamo postoji li u toj ravnini točka koja ne leži na tom pravcu. Dokazat ćemo da takve točke postoje.

PROPOZICIJA 2. *Ako je α ravnina i p pravac koji leži u njoj, onda postoje točke ravnine α , koje ne leže na p .*

Dokaz. Odaberimo na p bilo koju točku P i neka je Q točka koja ne leži na α . Pravcem p i točkom Q prema Propoziciji 1 prolazi jedinstvena ravnina β . Neka je R točka koja ne leži u β , a takva postoji zbog S_1 . Prema Propoziciji 1 postoji ravnina



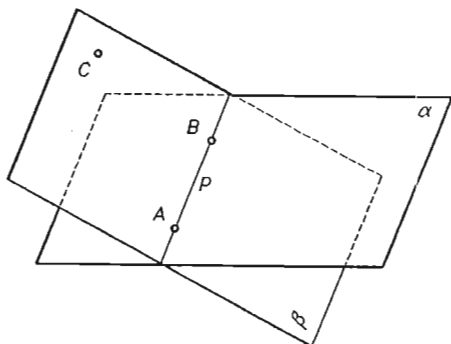
Sl. 97.

γ određena pravcem PQ i točkom R . Ravnine α i γ sijeku se u pravcu q koji prolazi kroz P i različit je od pravca p . Točke pravca q različite od P zadovoljavaju uvjete propozicije (v. sl. 97). ■

Izvest ćemo sada uvjet da pravac leži u ravnini.

PROPOZICIJA 3. *Ako dvije točke nekog pravca leže u ravnini, onda čitav pravac leži u toj ravnini.*

Dokaz. Neka je p pravac i neka njegove dvije točke A i B leže u α . Prema aksiomu P_2 postoji točka C koja ne leži na p . Prema Propoziciji 1 postoji ravnina β određena točkom C i pravcem p (v. sl. 98). Ako se ravnine α i β podudaraju,



Sl. 98.

onda p leži u α i tvrdnja je dokazana. Ako su α i β različite ravnine, onda se one sijeku u nekom pravcu q koji sigurno leži u α . Pravac q prolazi točkama A i B , pa p i q imaju dvije točke zajedničke, pa se prema P_1 ti pravci podudaraju. Slijedi da p leži u α . ■

KOROLAR 1. *Ako pravac ne leži u nekoj ravnini, onda on s tom ravninom ima ili jednu ili nijednu zajedničku točku.* ■

Ako pravac ima s ravninom samo jednu zajedničku točku, onda kažemo da on probada ravninu. Ta se točka zove **probodište** pravca i ravnine. Ako pravac i ravnina nemaju zajedničkih točaka, onda kažemo da je pravac **paralelan** (usporedan) s ravninom. Da je pravac p paralelan s ravninom α označavamo sa $p \parallel \alpha$.

KOROLAR 2. *Ako se dva različita pravca sijeku, onda svi pravci koji sijeku i jedan i drugi pravac i ne prolaze njihovim sjecištem leže u ravnini određenoj s ta dva pravca.* ■

PROPOZICIJA 4. *Postoji jedinstvena ravnina incidentna sa tri nekolinearne točke.*

Dokaz. Egzistencija. Neka su A , B i C tri nekolinearne točke. Tada su $p = AB$ i $q = AC$ dva različita pravca, koji se sijeku u točki A , pa prema S_3 postoji ravnina α koja sadrži te pravce. Ta je ravnina očito incidentna s točkama A , B i C .

Jedinstvenost. Svaka ravnina koja sadrži točke A , B i C prema Propoziciji 3 sadrži i pravce $p = AB$, $q = AC$, pa je takva ravnina prema S_3 jedinstvena. ■

Za ravninu incidentnu sa tri nekolinearne točke kažemo da je određena ili razapeta s te tri točke.

Napomena 1. Lako se vidi da postoji ravnina incidentna s tri kolinearne točke, ali takva ravnina nije jednoznačno određena.

Neka je α zadana ravnina i T točka prostora koja ne leži u α . Rastavimo skup svih točaka prostora na dvije klase. Za točku X reći ćemo da pripada prvoj klasi ako dužina \overline{TX} nema zajedničku točku sa α , a ako α i \overline{TX} imaju zajedničku točku, onda kažemo da X pripada drugoj klasi. Prema tome svaka točka prostora, koja ne leži u α , pripada samo jednoj od tih klasa. Svaku od tih klasa zovemo **otvorenim poluprostorom** određenim ravninom α . Dakle svaka ravnina dijeli prostor na dva otvorena poluprostora.

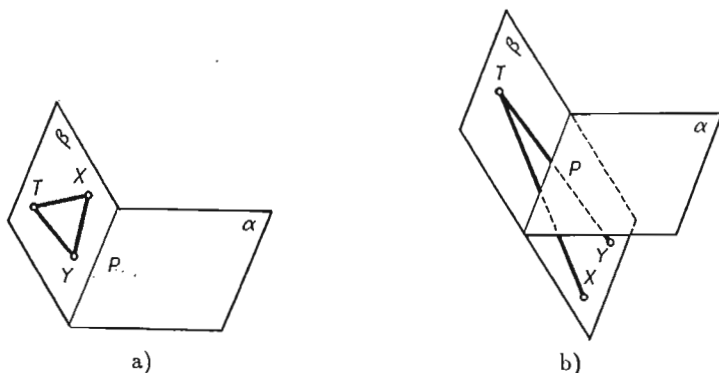
Uniju poluprostora i ravnine α zovemo **zatvorenim poluprostorom**.

Za točke koje pripadaju istom poluprostoru određenom ravninom α kažemo da su s iste strane ravnine α . Za točke različitih poluprostora kažemo da su s različitih strana ravnine α .

Da ova definicija ne ovisi o izboru točke T pokazat ćemo tako da dokažemo:

TEOREM 1 (o poluprostoru). *Ako točke X i Y pripadaju istom otvorenom poluprostoru obzirom na neku ravninu α , onda dužina \overline{XY} nema točku zajedničku sa α , a ako su X i Y iz različitih poluprostora, onda \overline{XY} probada ravninu α .*

Dokaz. Zaista, pretpostavimo da točke X i Y pripadaju prvom poluprostoru, tj. \overline{TX} i \overline{TY} nemaju zajedničkih točaka sa α . Neka je β ravnina određena točkama T, X, Y . Ako β ne siječe α , onda \overline{XY} nema zajedničkih točaka s α i tvrdnja je dokazana. Ako β siječe α , onda je presječnica neki pravac p , jer su α i β različite



Sl. 99.

ravnine (v. sl. 99a). Pravac p rastavlja ravninu β na dvije poluravnine. Točke X i Y su u onoj od tih poluravnina u kojoj leži T , pa stoga \overline{XY} ne siječe p (v. Prvi dio str. 181), pa ni α .

Ako točke X i Y pripadaju drugom poluprostoru, onda \overline{TX} i \overline{TY} imaju zajedničkih točaka sa α , pa β siječe α i stoga X i Y leže u drugoj poluravnini (v. sl. 99b), pa opet \overline{XY} ne siječe p , pa ni α .

Ako su X i Y u različitim poluprostorima, onda β siječe α i X i Y su u raznim poluravninama od β , pa \overline{XY} siječe α . ■

Drugim riječima poluprostor je konveksan skup.

1.3. Paralelnost pravaca i ravnina

Za dva pravca p i q u prostoru kažemo da su **paralelni (usporedni)** ako se oni podudaraju ili ako leže u istoj ravnini i ne sijeku se. Pišemo $p \parallel q$.

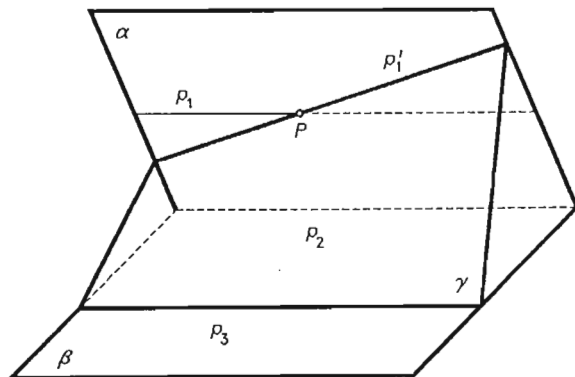
Ako se dva pravca ne sijeku i ne leže u istoj ravnini, onda kažemo da su oni **mimoilazni (ili mimosmjerni)**.

PROPOZICIJA 5. *Zadanom točkom izvan zadanog pravca prolazi samo jedan pravac paralelan sa zadanim.*

Dokaz. Neka je p pravac i T točka koja ne leži na p . Prema Propoziciji 1 postoji jedinstvena ravnina α incidentna s p i T . Prema aksiomu o paralelama (prvi dio str. 200) postoji u α pravac $q \parallel p$ koji prolazi točkom T . Dokažimo jedinstvenost pravca q . Pretpostavimo da postoji još jedan pravac $q' \parallel p$, koji prolazi točkom T . Prema aksiomu S_3 postoji ravnina β određena ukrštenim pravcima p i q' . Ravnina β sadrži pravac p i točku T , pa je prema Propoziciji 1 $\alpha = \beta$. Prema aksiomu o paralelama je tada $q = q'$. ■

PROPOZICIJA 6. *Relacija "biti paralelan" je relacija ekvivalencije u skupu svih pravaca prostora.*

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost te relacije su očigledni. Dokažimo tranzitivnost. U tu svrhu uzmimo tri pravca p_1, p_2, p_3 takva da je $p_1 \parallel p_2$ i $p_2 \parallel p_3$. Treba



Sl. 100.

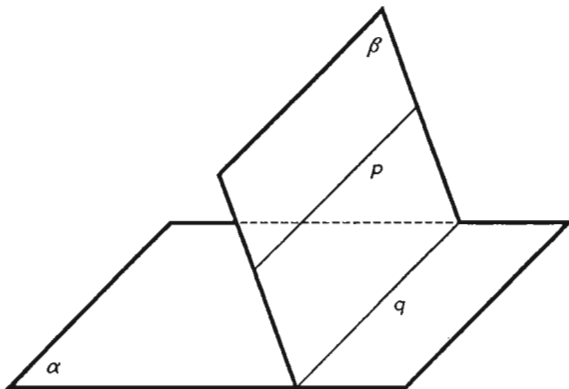
vidjeti da je tada i $p_1 \parallel p_3$. Pretpostavimo da svi ti pravci leže u istoj ravnini. Taj je slučaj razmatran u planimetriji. Neka je α ravnina u kojoj leže pravci p_1 i p_2 i β ravnina u kojoj leže p_2 i p_3 (sl. 100). Ravnine α i β su različite. Uzmimo sada na pravcu p_1 bilo koju točku P , i neka je γ ravnina određena točkom P i pravcem p_3 . γ postoji prema Propoziciji 1. Prema S_2 , γ siječe α u nekom pravcu p'_1 . Pravac p'_1 ne probada ravninu β . Kada bi naime pravac p'_1 probadao β , onda bi to probodište moralo ležati na p_2 (jer p'_1 i p_2 leže u istoj ravnini α) i na p_3 (jer p'_1 i p_3 leže u istoj ravnini γ), pa bi se pravci p_2 i p_3 morali sjeći, što je u suprotnosti s pretpostavkom $p_2 \parallel p_3$. Dakle je $p'_1 \parallel p_2$, pa prema aksiomu o paralelama, $p'_1 = p_1$. Dakle, p_1 leži u γ i $p_1 \parallel p_3$. ■

Ako je p neki pravac prostora, onda klasu ekvivalencije kojoj pripada p zovemo smjerom koji je određen pravcem p .

Izvedimo sada i uvjet paralelnosti pravca i ravnine.

PROPOZICIJA 7. *Ako pravac p ne leži u ravnini α i ako je on paralelan s nekim pravcem q ravnine α , onda je pravac p paralelan s α .*

Dokaz. Neka je α ravnina i q pravac ravnine α takav da je $q \parallel p$. Označimo sa β ravninu u kojoj leže p i q . Ravnine α i β se tada sijeku u pravcu q . Ako bi



Sl. 101.

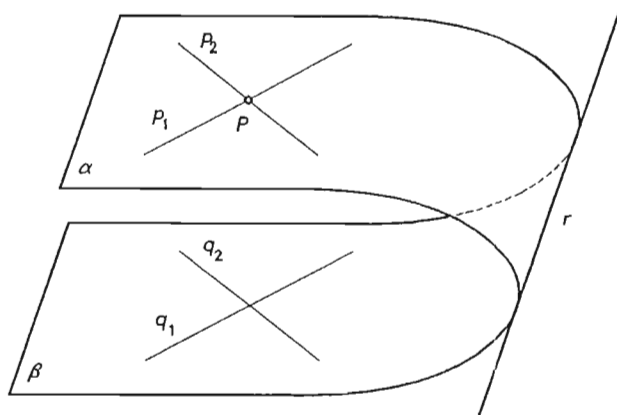
pravac p imao s ravninom α neku zajedničku točku, onda bi ta točka morala ležati na q , a to je nemoguće jer je $p \parallel q$. Slijedi $p \parallel \alpha$. ■

Za dvije ravnine kažemo da su **paralelne** ako se podudaraju ili ako nemaju zajedničkih točaka. Da su α i β paralelne ravnine označavamo sa $\alpha \parallel \beta$.

Izvedimo sada kriterij paralelnosti dviju ravnina.

PROPOZICIJA 8. *Ako su dva ukrštena pravca neke ravnine paralelna sa dva pravca druge ravnine, onda su te dvije ravnine paralelne.*

Dokaz. Neka su α i β dvije ravnine, p_1 i p_2 pravci ravnine α i neka se oni sijeku u točki P . Neka su dalje $q_1 \parallel p_1$, $q_2 \parallel p_2$ pravci ravnine β (sl. 102). Pretpostavimo



Sl. 102.

obrnuto da ravnine α i β nisu paralelne i da se sijeku u nekom pravcu r . Prema Propoziciji 7 $p_1 \parallel q_1$ i $p_2 \parallel q_2$ povlači $p_1 \parallel \beta$ i $p_2 \parallel \beta$. Kako r leži u β to je $p_1 \parallel r$ i $p_2 \parallel r$, pa bi u ravnini α točkom P prolazila dva pravca (p_1 i p_2) koji su paralelni sa r , a to je u kontradikciji s aksiomom o paralelama. ■

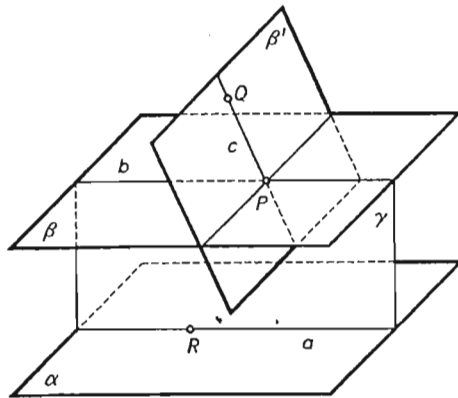
PROPOZICIJA 9. *Zadanom točkom P izvan zadane ravnine α prolazi jedinstvena ravnina β paralelna s ravninom α .*

Dokaz. Uzmimo u ravnini α bilo koja dva ukrštena pravca q_1 i q_2 . Točkom P povucimo pravce $p_1 \parallel q_1$ i $p_2 \parallel q_2$. Prema aksiomu S_3 postoji ravnina β određena tim pravcima. Prema Propoziciji 8 ravnine α i β su paralelne. Ovim je dokazana egzistencija takve ravnine.

Dokažimo jedinstvenost. Pretpostavimo obrnuto da točkom P prolazi još jedna ravnina $\beta' \parallel \alpha$. Uzmimo sada u ravnini β' bilo koju točku Q , koja ne leži u β . Takva postoji prema aksiomu S_1 . Odaberimo u α bilo koju točku R i označimo sa γ ravninu određenu točkama P, Q, R . Takva ravnina postoji prema Propoziciji 4. Neka γ siječe ravnine α, β, β' redom u pravcima a, b i c . Pravci b i c ne sijeku a , jer ne probadaju α i to zbog $\beta \parallel \alpha, \beta' \parallel \alpha, b \subset \beta$ i $c \subset \beta'$. Prema tome je $b \parallel a$ i $c \parallel a$, pa točkom P u ravnini γ prolaze dva pravca (b i c) paralelna s pravcem a te ravnine, što je u suprotnosti s aksiomom o paralelama. ■

KOROLAR 3. *Relacija "biti paralelan" je relacija ekvivalencije u skupu svih ravnina prostora.*

Dokaz. Treba dokazati samo tranzitivnost. U tom smislu treba dokazati da $\alpha \parallel \beta$ i $\beta \parallel \gamma$ povlači $\alpha \parallel \gamma$. Pretpostavimo obrnuto da se α i γ sijeku i uzmimo točku na njihovoj presječnici. Tada bi tom točkom prolazile dvije ravnine paralelne sa β , što je u suprotnosti s Propozicijom 9. ■



Sl. 103.

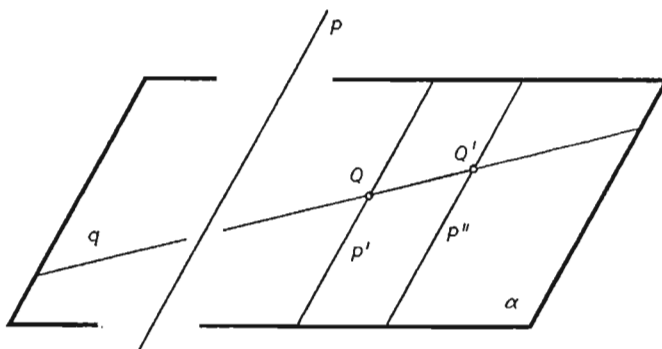
PROPOZICIJA 10. *Ako dvije paralelne ravnine siječemo trećom, onda su tako dobivene presječne paralelne.*

Dokaz. Neka su α i β paralelne ravnine i presijecimo ih trećom ravninom γ . Označimo $a = \alpha \cap \gamma$ i $b = \beta \cap \gamma$. Kada bi presječnice a i b imale zajedničku točku onda bi se ravnine α i β sjekle, obrnuto pretpostavci da je $\alpha \parallel \beta$. Kako a i b leže u istoj ravnini γ i nemaju zajedničkih točaka, to su one paralelne. ■

Iz do sada dokazanih propozicija može se dokazati niz tvrdnji o paralelnosti pravaca i ravnina. Mi to nećemo ovdje detaljno provesti, već navodimo samo dva primjera.

Primjer 1. Zadani su mimoilazni pravci p i q . Dokažite da postoji jedinstvena ravnina koja sadrži pravac q i paralelna je s pravcem p .

Rješenje. Odaberimo na q bilo koju točku Q i povucimo tom točkom pravac $p' \parallel p$. Pravci q i p' prema aksiomu S_3 određuju neku ravninu α , koja je prema Propoziciji 7 paralelna s pravcem p . Ovim je egzistencija takve ravnine dokazana. Treba dokazati

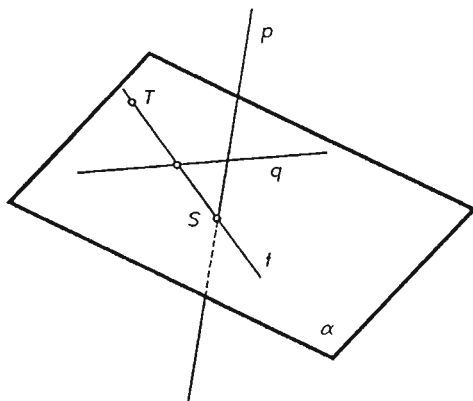


Sl. 104.

jedinstvenost, tj. da α ne ovisi o izboru točke Q . Uzmemo li na pravcu q neku drugu točku Q' i njome povučemo pravac $p'' \parallel p$ (sl. 104), onda je $p' \parallel p''$, pa p'' i q određuju istu ravninu. ■

Primjer 2. Zadana su dva mimoilazna pravca p, q i točka T , koja ne leži ni na jednom od njih. Nađite uvjete kada postoji pravac t koji prolazi točkom T i siječe pravce p i q . Pravac t zove se **transverzala (priječnica)** pravaca p i q .

Rješenje. Točkom T i pravcem q položimo ravninu α . Takva ravnina postoji prema Propoziciji 1.



Sl. 105.

Neka je S probodište pravca p sa α . Tada je pravac $t = ST$ tražena transverzala (sl. 105). Očito je, dakle, da transverzala t postoji ako i samo ako p probada α . ■

1.4. Okomitost pravaca i ravnina

Ako se pravci p i q sijeku, onda oni prema aksiomu S_3 leže u jednoj ravnini, pa iz planimetrije znamo što znači da su oni **okomiti**.

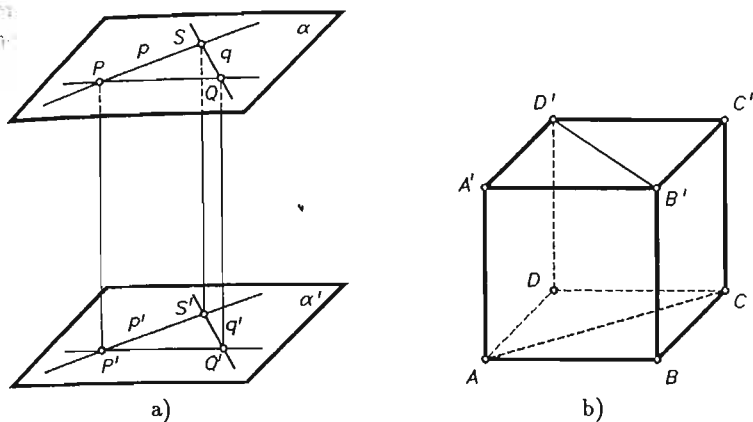
Ako su p i q mimoilazni pravci, onda odaberimo na jednom od njih, recimo q bilo koju točku Q i povucimo tom točkom pravac $p' \parallel p$. Za mimoilazne pravce p i q kažemo da su **okomiti** ako su ukršteni pravci p' i q okomiti. Da su p i q okomiti označavamo sa $p \perp q$.

Lako se vidi da ova definicija ne ovisi o izboru točke Q .

Međutim nije jasno da definicija okomitosti mimoilaznih pravaca ne ovisi o izboru pravca, tj. što je onda ako na pravcu p odaberemo točku P i izvršimo analognu konstrukciju? Da definicija okomitosti ne ovisi o izboru pravca neposredna je posljedica valjanosti sljedeće propozicije:

PROPOZICIJA 11. *Ako su ukršteni pravci p i q redom paralelni s ukrštenim okomitim pravcima p' i q' , onda su i pravci p i q okomiti.*

Dokaz. Uzmimo parove pravaca kao u iskazu propozicije. Ako pravci p, q, p', q' leže u istoj ravnini, onda je tvrdnja istinita, jer su to onda kutovi s paralelnim kracima. Pretpostavimo stoga da ti pravci ne leže u istoj ravnini i neka pravci p i q leže u ravnini α , a p' i q' u α' (sl. 106a). Prema Propoziciji 8 ravnine α i α'



Sl. 106.

su paralelne. Neka se pravci p i q sijeku u točki S , a p' i q' u S' . Povucimo sada u ravnini određenoj paralelnim pravcima p i p' bilo koju paralelu sa SS' i neka ona siječe p u P i p' u P' . Nadalje, u ravnini određenoj pravcima q i q' povucimo paralelu sa SS' i neka ona siječe q u Q i q' u Q' . Tada su četverokuti $P'S'SP$ i $S'Q'QS$ paralelogrami, pa je $PP' \parallel QQ'$. Ravnina određena pravcima PP' i QQ' siječe α i α' u paralelnim pravcima PQ i $P'Q'$ (Propozicija 10), pa je i $P'Q'QP$ paralelogram, pa je $|PQ| = |P'Q'|$. Kako su $P'S'SP$ i $S'Q'QS$ paralelogrami to je i $|PS| = |P'S'|$, $|QS| = |Q'S'|$. Dakle su trokuti $\triangle PQS$ i $\triangle P'Q'S'$ sukladni, pa $\sphericalangle(p', q') = \frac{\pi}{2}$ povlači $\sphericalangle(p, q) = \frac{\pi}{2}$. ■

Odavde odmah slijedi:

KOROLAR 4. Ako je $p \perp q$ i $q \parallel r$, onda je $p \perp r$. ■

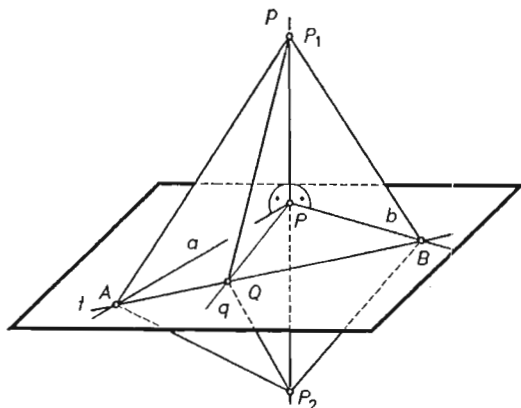
Dobro je uočiti da su u kocki $ABCD A'B'C'D'$ (sl. 106b) mimoilazni pravci AB i CC' okomiti, kao što su to i plošne dijagonale AC i $B'D'$.

Sada možemo definirati okomitost pravca i ravnine. Pravac je okomit na ravninu ako je on okomit na svaki pravac te ravnine. Da je pravac p okomit na ravninu α označavamo sa $p \perp \alpha$. Ako je $p \perp \alpha$, onda još kažemo da je i ravnina α okomita na p i pišemo $\alpha \perp p$.

Definicija okomitosti pravca i ravnine nije učinkovita jer je praktički nemoguće provjeriti je li neki pravac okomit na sve pravce ravnine. Stoga je koristan kriterij okomitosti dan ovom propozicijom:

PROPOZICIJA 12. *Pravac je okomit na ravninu ako je okomit na bilo koja dva neparalelna pravca te ravnine.*

Dokaz. Uzmimo ravninu α i pravac p koji je okomit na dva neparalelna pravca a i b ravnine α . Prema Korolaru 2 možemo pretpostaviti da pravci a i b prolaze probodištem P pravca p i ravnine α (sl. 107). Dovoljno je pokazati da je pravac

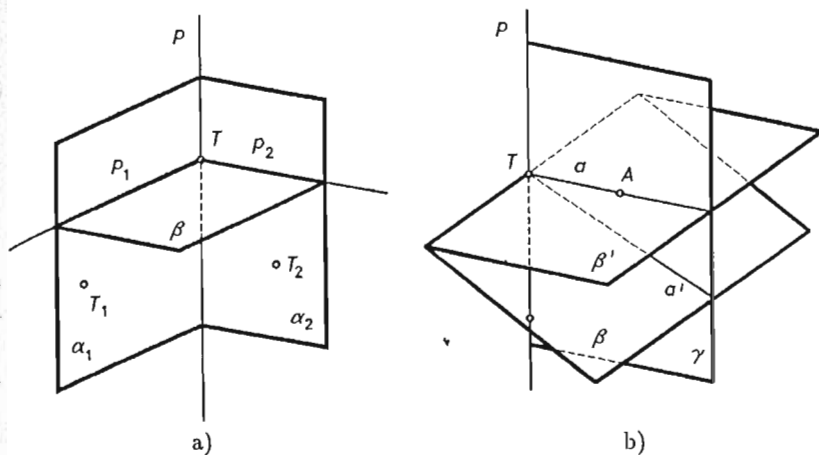


Sl. 107.

p okomit na svaki pravac ravnine α koji prolazi točkom P . Neka je q bilo koji pravac ravnine α kroz P i t pravac u α koji siječe pravce a, b, q redom u točkama A, B, Q . Konstruirajmo na p točke P_1 i P_2 tako da je $|PP_1| = |PP_2|$ i P_1, P_2 su s različitih strana ravnine α . Tada je $\triangle APP_1 \cong \triangle APP_2$ (stranica \overline{AP} im je zajednička, $|PP_1| = |PP_2|$ i $\sphericalangle APP_1 = \sphericalangle APP_2 = \frac{\pi}{2}$). Slijedi $|AP_1| = |AP_2|$. Na isti se način vidi da je i $|BP_1| = |BP_2|$, pa slijedi $\triangle ABP_1 \cong \triangle ABP_2$ (S-S-S). Odavde je $\sphericalangle P_1AQ = \sphericalangle QAP_2$, pa je $\triangle P_1AQ \cong \triangle P_2AQ$ (S-K-S), što povlači $|QP_1| = |QP_2|$. Dakle je trokut $\triangle P_1P_2Q$ jednakokrtačan. Kako je \overline{QP} spojnica vrha tog trokuta s polovištem P njegove osnovice, to je \overline{QP} njegova visina, pa je stoga $p \perp q$. ■

PROPOZICIJA 13. *Svakom točkom zadanog pravca prolazi jedinstvena ravnina okomita na taj pravac.*

Dokaz. Neka je p pravac i T točka na njemu. Pravcem p položimo dvije različite ravnine. Takve ravnine postoje. Dovoljno je, naime, izvan p uzeti točku T_1 (aksiom P_1). Neka je α_1 ravnina određena pravcem p i točkom T_1 (Propozicija 1). Neka je T_2 točka koja ne leži u α (aksiom S_1) i α_2 ravnina određena pravcem p i točkom T_2 (Propozicija 1). Ravnine α_1 i α_2 su različite i obje sadrže pravac p (sl. 108a). Uzmimo u α_1 pravac p_1 okomit na p i u α_2 pravac p_2 okomit na p . Ta dva pravca određuju ravninu β (aksiom S_3). Kako je $p \perp p_1$ i $p \perp p_2$, to je, prema Propoziciji 12, $p \perp \beta$. Ovim je egzistencija takve ravnine dokazana. Dokažimo jedinstvenost.

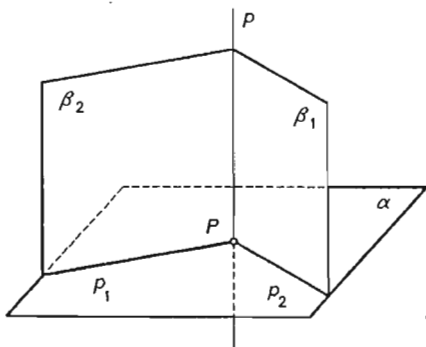


Sl. 108.

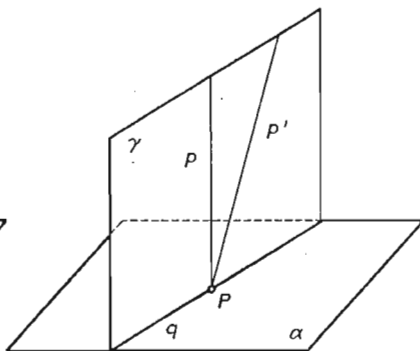
Pretpostavimo da točkom T prolaze dvije različite ravnine β i β' okomite na pravac p . Neka je A točka ravnine β' koja ne leži u β (sl. 108b). Točkom A i pravcem p položimo ravninu γ (Propozicija 1). Ta ravnina siječe ravnine β i β' u dva različita pravca a i a' koji prolaze točkom T i okomiti su na pravac p , a to je nemoguće jer se točkom A u ravnini γ može povući samo jedna okomica na pravac p te ravnine. ■

PROPOZICIJA 14. *Svakom točkom ravnine moguće je položiti samo jedan pravac okomit na tu ravninu.*

Dokaz. Neka je α ravnina i P bilo koja njezina točka. Povucimo točkom P bilo koja dva ukrštena pravca p_1 i p_2 . Neka su β_1 i β_2 ravnine kroz P redom okomite na pravce p_1 i p_2 (Propozicija 13). Te se ravnine sijeku u pravcu p (v. sl. 109) koji je okomit na ravninu α , jer je okomit na dva ukrštena pravca te ravnine. Ovim je



Sl. 109.



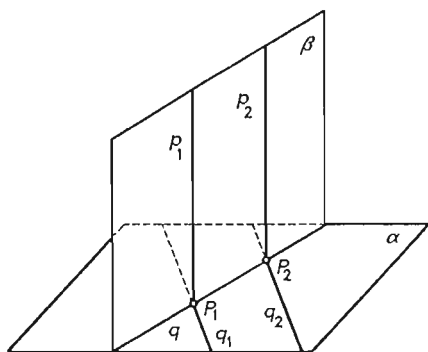
Sl. 110.

egzistencija okomice dokazana. Dokažimo jedinstvenost. Pretpostavimo da postoje dva različita pravca p i p' , koji prolaze točkom P i okomiti su na α (v. sl. 110).

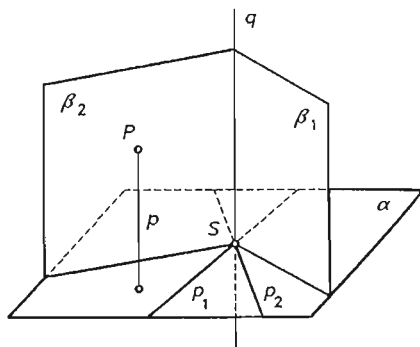
Neka je γ ravnina određena sa p i p' . Ravnina γ siječe α u pravcu q , pa u točki P ravnine γ imamo dva različita pravca p i p' okomita na pravac q te ravnine, što je nemoguće. ■

PROPOZICIJA 15. *Ako su dva pravca paralelna i jedan od njih je okomit na neku ravninu, onda je to i drugi.*

Dokaz. Neka su p_1 i p_2 paralelni pravci, α ravnina i $p_1 \perp \alpha$. Treba vidjeti da je i $p_2 \perp \alpha$. Kako p_1 i p_2 leže u istoj ravnini β (jer je $p_1 \parallel p_2$) i jer β i α imaju zajedničku točku P_1 (probodište pravca p_1 i ravnine α), to se α i β sijeku u nekom pravcu q (sl. 111). Pravci q i p_2 leže u istoj ravnini β , pa se oni sijeku u P_2 . Dakle, pravac p_2 i ravnina α imaju zajedničku točku P_2 . Povucimo točkama P_1 i P_2 paralelne pravce q_1 i q_2 , koji leže u α . Kako je $p_1 \perp \alpha$, to je $p_1 \perp q_1$. Prema



Sl. 111.



Sl. 112.

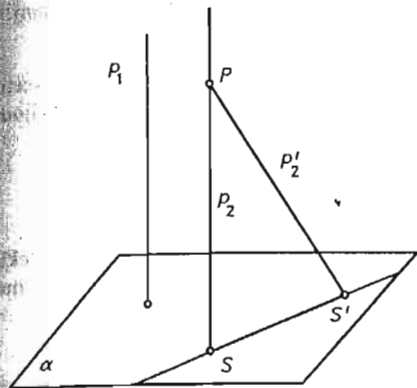
Propoziciji 11 $p_1 \parallel p_2$, $q_1 \parallel q_2$, $p_1 \perp q_1$ povlači $p_2 \perp q_2$. Dakle, pravac p_2 okomit je na svaki pravac ravnine α , pa je prema definiciji i $p_2 \perp \alpha$. ■

PROPOZICIJA 16. *Svakom točkom prostora prolazi jedinstveni pravac okomit na zadanu ravninu.*

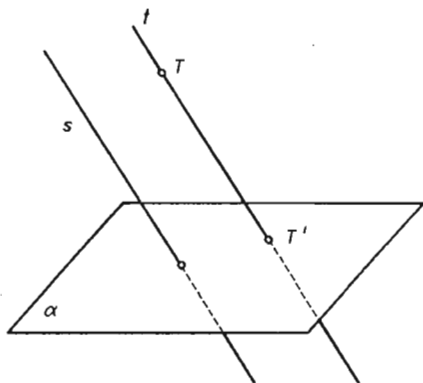
Dokaz. Neka je α zadana ravnina i P bilo koja točka prostora. Povucimo u α bilo koja dva ukrštena pravca p_1 i p_2 (sl. 112). Njihovim sjecištem S položimo ravnine β_1 i β_2 redom okomite na p_1 i p_2 (Propozicija 13). Te se dvije ravnine sijeku u nekom pravcu q . Kako je $q \perp p_1$ i $q \perp p_2$, to je, prema Propoziciji 12, $q \perp \alpha$. Pravac p kroz P paralelan sa q tada je prema Propoziciji 15, okomit na tu ravninu. ■

PROPOZICIJA 17. *Pravci okomiti na istu ravninu su paralelni.*

Dokaz. Neka su p_1 i p_2 pravci okomiti na ravninu α . Pretpostavimo da p_1 i p_2 nisu paralelni. Odaberimo na pravcu p_2 točku P koja ne leži u α (sl. 113). Povucimo točkom P pravac $p'_2 \parallel p_1$. Prema Propoziciji 15 je $p'_2 \perp \alpha$. Neka su S ,



Sl. 113.



Sl. 114.

S' redom probodišta od α s pravcima p_2, p'_2 . Dobili smo pravac SS' okomit na dva ukrštena pravca p_2, p'_2 , što je nemoguće. ■

Sada se lako dokazuju i ostale tvrdnje o okomitosti pravaca i ravnina. Evo jednog primjera.

Primjer 3. Dokažite ako je pravac okomit na dvije ravnine, onda su one paralelne.

Rješenje. Neka je p pravac, α, β dvije ravnine i $\alpha \perp p, \beta \perp p$. Pravcem p položimo bilo koju ravninu γ_1 . Ona siječe α i β redom u pravcima p_1 i p_2 (nacrtajte sliku). Kako su p_1 i p_2 pravci iste ravnine γ_1 , te kako je $p \perp p_1, p_2$, to je $p_1 \parallel p_2$. Položimo li sada pravcem p neku drugu ravninu γ_2 , na isti će način biti paralelni i pravci $q_1 = \gamma_2 \cap \alpha, q_2 = \gamma_2 \cap \beta$, pa zbog Propozicije 8 slijedi $\alpha \parallel \beta$. ■

1.5. Paralelna projekcija prostora na ravninu

Neka je α ravnina i s pravac koji nije paralelan s α . Svakoju točki T prostora M_3 pridružiti ćemo točku T' na sljedeći način. Točkom T povucimo pravac $t \parallel s$. Pravac t probada ravninu α u nekoj točki T' . Preslikavanje $p_{\alpha, s} : M_3 \rightarrow \alpha$ definirano sa $p_{\alpha, s}(T) = T'$ zovemo **paralelnom projekcijom prostora M_3 na ravninu α u smjeru pravca s** , a točku T' zovemo **paralelnom projekcijom točke T u smjeru pravca s na ravninu α** . Smjer pravca s zovemo **smjerom projekcije** (sl. 114).

Svojstva paralelne projekcije dana su sljedećom propozicijom:

PROPOZICIJA 18. a) Paralelna projekcija preslikava pravac, kojemu je smjer različit od smjera projekcije, bijektivno na pravac.

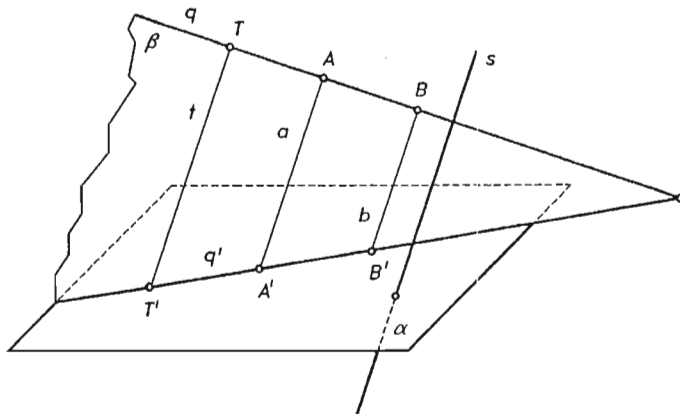
b) Ako su dva paralelna pravca smjera različitog od smjera projekcije, onda je njihova paralelna projekcija par paralelnih pravaca.

c) Omjer duljina dviju dužina, koje leže na paralelnim pravcima, kojih je smjer različit od smjera projekcije, jednak je omjeru duljina projekcija tih dužina.

Dokaz. a) Neka je α dana ravnina, a smjer projekcije neka je određen pravcem s . Neka je dalje q bilo koji pravac prostora M_3 , $q \parallel s$. Pod paralelnom projekcijom pravca q razumijevamo skup

$$p_{\alpha,s}(q) = \bigcup_{T \in q} p_{\alpha,s}(T).$$

Neka je dalje T bilo koja točka pravca q i $T' = p_{\alpha,s}(T)$. Pravci t i q određuju neku ravninu β (sl. 115). Ravnina β siječe ravninu α u nekom pravcu q' . Dokazat ćemo



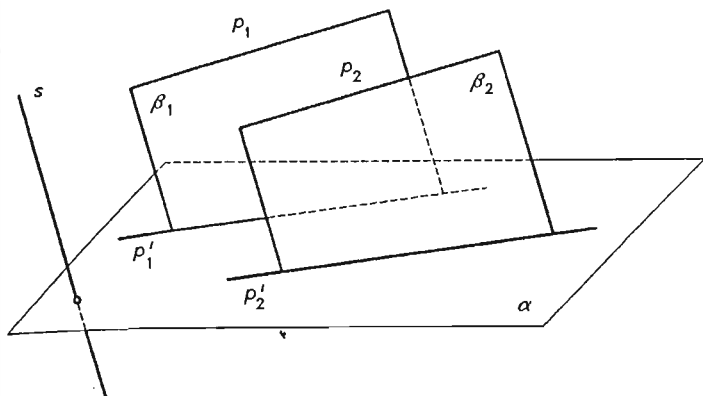
Sl. 115.

da je $p_{\alpha,s}(q) = q'$. U tu svrhu treba dokazati da za svaku točku $A \in q$ vrijedi $p_{\alpha,s}(A) = A' \in q'$ i da za svaku točku $B' \in q'$ postoji točka $B \in q$, takva da je $p_{\alpha,s}(B) = B'$. Najprije je $a = AA' \parallel s$, pa je stoga $a \parallel t$. Zbog $A \in \beta$ slijedi $a \subset \beta$, pa je $A' \in \beta$, a kako je $A' \in \alpha$, to je $A' \in \alpha \cap \beta$, tj. $A' \in q'$.

Sada točkom B' povucimo paralelu b sa s . Tada je $b \parallel t$. Dalje $B' \in \beta$ povlači $b \subset \beta$, pa postoji točka $B = b \cap q$, pa je očito $p_{\alpha,s}(B) = B'$. Odavde slijedi da je paralelna projekcija dužine opet dužina, a polupravca opet polupravac.

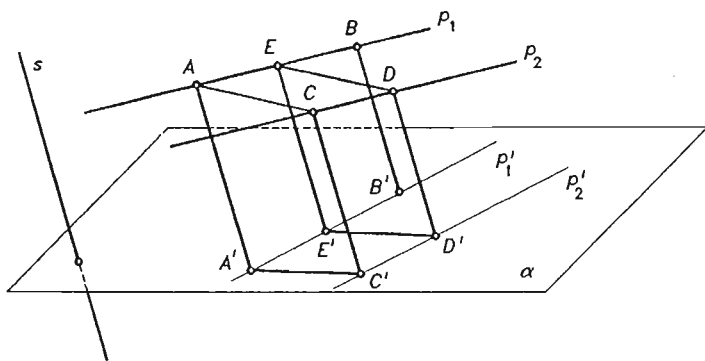
Posebno ako je dužina \overline{AB} paralelna sa α , onda je $|A'B'| = |AB|$.

b) Neka su p_1, p_2 paralelni pravci, koji nisu paralelni sa s . Prema a) ravnine β_1 i β_2 koje sadrže pravce p_1 i p_2 i paralelne su sa pravcem s sijeku α upravo u projekcijama p'_1 i p'_2 tih pravaca (v. sl. 116). Prema dokazu u a), ravnine β_1 i β_2 su paralelne (Propozicija 8), a prema Propoziciji 10 paralelne ravnine sijeku svaku treću ravninu u paru paralelnih pravaca. Stoga je $p'_1 \parallel p'_2$.



Sl. 116.

c) Neka su \overline{AB} i \overline{CD} dužine koje leže na paralelnim pravcima $p_1 = AB$ i $p_2 = CD$, $p_1, p_2 \parallel s$. Označimo $A' = p_{\alpha, s}(A)$, $B' = p_{\alpha, s}(B)$, $C' = p_{\alpha, s}(C)$, $D' = p_{\alpha, s}(D)$. Neka je dalje $p'_1 = p_{\alpha, s}(p_1)$, $p'_2 = p_{\alpha, s}(p_2)$. Prema b) je tada $p'_1 \parallel p'_2$ (v. sl. 117). Neka je E točka polupravca AB takva da je $|AE| = |CD|$. Tada



Sl. 117.

je četverokut $ACDE$ paralelogram. Označimo $E' = p_{\alpha, s}(E)$, pa je četverokut $A'C'D'E'$ paralelogram. Stoga je $|A'E'| = |C'D'|$. Pravci p_1 i p'_1 leže u istoj ravnini i presječeni su paralelnim pravcima AA' , BB' i EE' , pa prema Talesovom poučku o proporcionalnosti (prvi dio, str. 224) vrijedi

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|A'B'|}{|A'E'|}$$

Odavde zbog $|AE| = |CD|$ i $|A'E'| = |C'D'|$ slijedi

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}. \blacksquare$$

Odavde slijedi da je projekcija paralelograma opet paralelogram, dakako uz uvjet da nijedna stranica paralelograma nema smjer projekcije. Specijalno ako paralelogram leži u ravnini paralelnoj s α , onda je njegova projekcija njemu sukladan paralelogram.

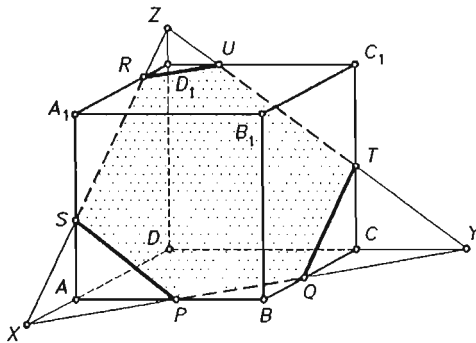
Ako je smjer paralelnog projiciranja okomit na ravninu α , onda govorimo o **ortogonalnom projiciranju prostora na ravninu** α .

Očito Propozicija 18 vrijedi i za taj posebni slučaj.

Razni geometrijski objekti kao npr. likovi i poliedri, mogu se prikazati i tako vizualizirati pomoću paralelnih projekcija na ravninu papira. Svojstva a), b) i c) iz Propozicije 18 služe nam da to korektno učinimo i da riješimo razne zadatke. O geometrijskim tijelima bit će govora kasnije. Da se shvate primjeri koji to ilustriraju dovoljno je intuitivno znanje o poliedrima stečeno u školi. Kako ćemo crtati samo projekcije točkaka, a ne i njihove originale, to nećemo te projekcije označavati sa A' , B' , C' , ..., već sa A , B , C , ...

Primjer 4. Dana je paralelna projekcija kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ i točke $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$, $R \in \overline{A_1 D_1}$. Nacrtajte paralelnu projekciju presjeka kocke ravninom koja je određena točkama P , Q , R .

Rješenje. Nacrtajmo najprije paralelnu projekciju kocke. Na sl. 118 uzeli smo da je strana $ABB_1 A_1$ paralelna s ravninom papira. Prema b) projekcija te strane je kvadrat

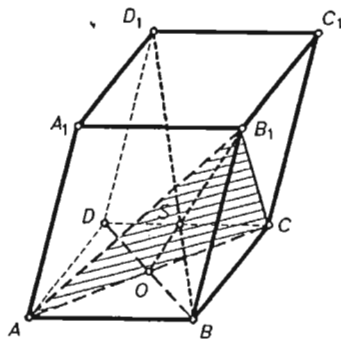


Sl. 118.

$ABB_1 A_1$ kojemu je duljina stranice jednaka duljini brida kocke. Na isti način je i projekcija toj stranici suprotne strane $DCC_1 D_1$ kvadrat. Projekcije ostalih strana kocke su paralelogrami. Pravac PQ leži u ravnini osnovke $ABCD$ (jer P i Q leže u toj ravnini). Kako su PQ i AD pravci iste ravnine i nisu paralelni, to se oni sijeku u točki X koja leži u ravnini strane $ADD_1 A_1$ jer leži na pravcu AD te ravnine. Točka X leži i u ravnini presjeka jer leži na pravcu PQ te ravnine. Kako i točka R leži u toj ravnini, to i pravac XR leži u ravnini te strane, pa on siječe pravac AA_1 te ravnine u točki S . Točka S leži u

ravnini presjeka (jer leži na pravcu XR te ravnine). Dakle, točka je S ona točka brida AA_1 koja leži u ravnini presjeka. Nadalje, pravac SR siječe pravac DD_1 u Z (to su neparalelni pravci iste ravnine ADD_1A_1). Točka Z je točka ravnine presjeka (jer leži na pravcu SR te ravnine). Nadalje, pravac PQ siječe DC u točki Y i Y leži u ravnini presjeka (jer leži na pravcu PQ te ravnine). Kako Y i Z leže u ravnini presjeka i u ravnini DCC_1D_1 , to oni sijeku bridove $\overline{CC_1}$ i $\overline{C_1D_1}$ redom u točkama T i U koji pripadaju presjeku. Presjek je dakle šesterokut $PQTURS$. Uočite ako su P, Q, R polovišta redom bridova $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{D_1A_1}$, onda je presjek pravilni šesterokut. ■

Primjer 5. Dijagonala $\overline{BD_1}$ paralelepipeda $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ probada ravninu trokuta $\triangle ACB_1$ u točki S (v. sl. 119). U kojem omjeru točka S dijeli tu dijagonalu?



Sl. 119.

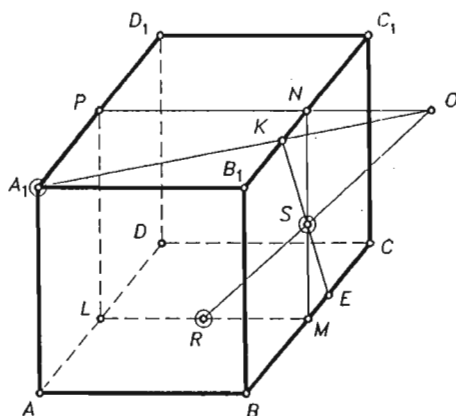
Rješenje. Pravac BD_1 leži u dijagonalnoj ravnini DBB_1D_1 paralelepipeda. Neka je O središte osnovke $ABCD$ tog paralelepipeda. Pravac OB_1 leži u toj ravnini, a kako u njoj leži i BD_1 , to se ta dva pravca sijeku u točki S , i ta je točka traženo probodište. Zbog $DB \parallel D_1B_1$ je $\triangle BOS \sim \triangle D_1B_1S$, pa slijedi $|BS| : |SD_1| = |OB| : |B_1D_1| = |OB| : |BD|$. Kako je O polovište dužine \overline{BD} , to je traženi omjer jednak $1 : 2$. ■

Primjer 6. Zadana je kocka $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Neka su R i S redom središta strana ABB_1A_1 i BCC_1B_1 . Brid \overline{BC} probada ravninu određenu točkama A_1, R, S u točki E . U kojem omjeru dijeli točka E taj brid?

Rješenje. Promotrimo srednji presjek $LMNP$ kocke. Točke R i S leže u ravnini tog presjeka, pa i pravac RS leži u toj ravnini (sl. 120). Kako i pravac PN leži u toj ravnini, to se RS i PN sijeku u nekoj točki O . PN , osim toga, leži u ravnini gornje osnovke, pa stoga i O leži u toj ravnini, pa dakle u njoj leži pravac A_1O , pa taj pravac siječe brid $\overline{B_1C_1}$ u točki K . Točka K je probodište brida $\overline{B_1C_1}$ s ravninom RSA_1 (jer leži na pravcu AO te ravnine). Sada pravac KS siječe brid \overline{BC} u traženom probodištu E . Da je E u ravnini RSA_1 je očito, jer E leži na pravcu KS te ravnine.

Trokuti $\triangle RMS$ i $\triangle ONS$ su trokuti iste ravnine i očito je $\triangle RMS \cong \triangle ONS$. Slijedi da je $|NO| = |MR|$. Označimo li duljinu brida kocke sa a , bit će $|NO| = \frac{1}{2}a$. Dalje je očito $\triangle A_1PO \sim \triangle KNO$, pa slijedi

$$\frac{|A_1P|}{|KN|} = \frac{|PO|}{|NO|}$$



Sl. 120.

Zbog $|A_1P| = \frac{a}{2}$, $|PO| = \frac{3}{2}a$, $|NO| = \frac{a}{2}$ odavde slijedi $|KN| = \frac{1}{6}a$. Nadalje, iz $\triangle SME \cong \triangle SNK$ slijedi $|ME| = |KN| = \frac{1}{6}a$, pa je stoga $|BE| = |BM| + |ME| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}a = \frac{2}{3}a$. Dakle, točka E dijeli brid \overline{BC} u omjeru

$$|BE| : |EC| = \frac{2}{3}a : \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}a\right) = 2 : 1. \blacksquare$$

1.6. Poučak o tri normale

Pri rješavanju stereometrijskih zadataka od osobite je koristi poučak o tri normale.

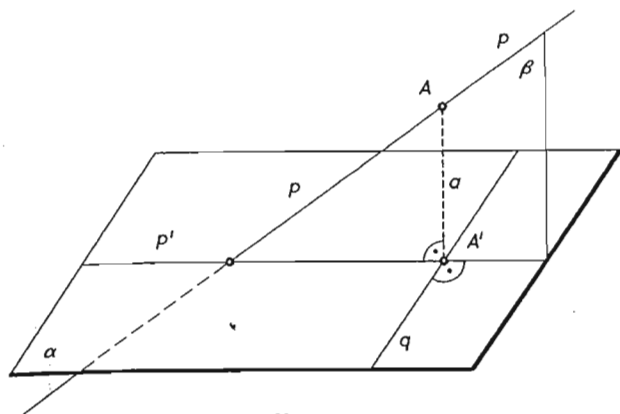
PROPOZICIJA 19 (poučak o tri normale). *Ako je ortogonalna projekcija p' pravca p na ravninu α okomita na neki pravac q te ravnine, onda je i pravac p okomit na q i obrnuto $p \perp q$ povlači $p' \perp q$.*

Dokaz. Neka je $p' \perp q$. Označimo sa A' sjecište pravaca p' i q i sa A onu točku pravca p koja se ortogonalno projicira u A' (sl. 121). Kako je pravac $a = AA' \perp \alpha$ to je $a \perp q$. Neka je β ravnina određena pravcima p i p' . Kako je $q \perp a$ i $q \perp p'$ (pretpostavka), to je q okomit na dva pravca te ravnine, pa onda i na svaki pravac te ravnine, pa je $q \perp p$.

Obrnuto, ako je $q \perp p$, onda, zbog $q \perp a$, slijedi da je q okomit na svaki pravac ravnine β , pa je $q \perp p'$. ■

Primjer 7. Neka je $ABCD$ tetraedar. Dokažite ako je $AB \perp CD$ i $BC \perp AD$ onda je nožište okomice spuštene iz vrha D na ravninu trokuta $\triangle ABC$ ortocentar tog trokuta.

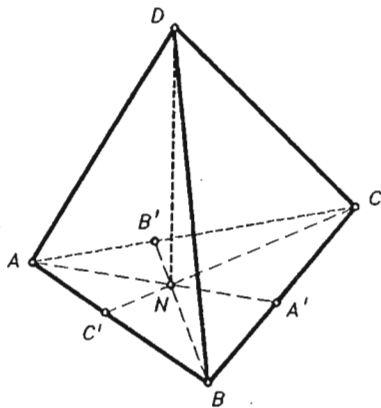
Rješenje. Označimo sa N nožište navedene okomice (v. sl. 122). Treba najprije pokazati da je CC' visina trokuta $\triangle ABC$. Sada $CD \perp AB$, prema poučku o tri normale, povlači da je $CC' \perp AB$. Na isti način $AD \perp BC$ povlači $AA' \perp BC$. Dakle, $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ su visine trokuta $\triangle ABC$, pa je N ortocentar trokuta $\triangle ABC$. ■



Sl. 121.

Primjer 8. Neka su u tetraedru dva para suprotnih bridova okomita. Dokažite da onda to vrijedi i za treći par.

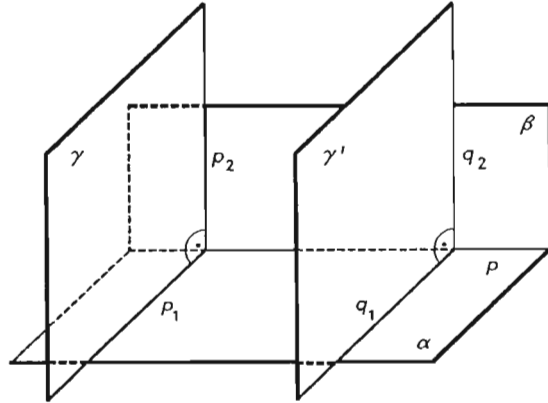
Rješenje. U prethodnom primjeru pokazali smo da je N ortocentar trokuta $\triangle ABC$. Slijedi da je $BB' \perp AC$, pa opet, prema poučku o tri normale zaključujemo da je $AC \perp \perp BD$. Slijedi da su nožišta svih visina takvog tetraedra ortocentri pripadnih strana. Takve tetraedre zovemo ortocentričkim. Pokazali smo, dakle, ako su u tetraedru dva para nasuprotnih bridova okomita, onda je taj tetraedar ortocentrički. ■



Sl. 122.

1.7. Okomitost dviju ravnina

Za dvije ravnine α i β kažemo da su **okomite** ako ih ravnina γ , okomita na njihovu presječnicu, siječe u dva okomita pravca. Najprije treba vidjeti da ta definicija ne ovisi o izboru ravnine γ . Uzmimo još jednu ravninu $\gamma' \perp p$, gdje je $p = \alpha \cap \beta$ (sl. 123). Kako je $p \perp \gamma, \gamma'$, to je $\gamma \parallel \gamma'$ (v. Primjer 3). Neka je $p_1 = \alpha \cap \gamma$,



Sl. 123.

$p_2 = \beta \cap \gamma$, $q_1 = \alpha \cap \gamma'$, $q_2 = \beta \cap \gamma'$. Prema Propoziciji 7 je $p_1 \parallel q_1$ i $p_2 \parallel q_2$, pa prema Propoziciji 11 $p_1 \perp p_2$ povlači $q_1 \perp q_2$ i nezavisnost definicije okomitosti dviju ravnina o izboru ravnine γ je dokazana.

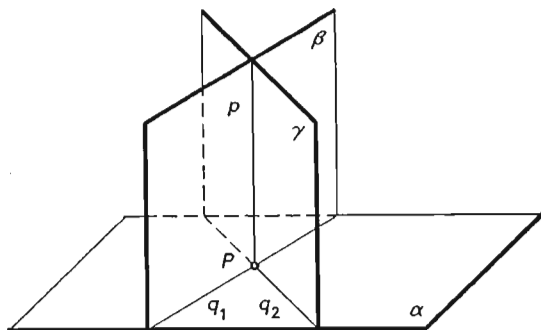
Jedan kriterij okomitosti dviju ravnina dan je sljedećom propozicijom.

PROPOZICIJA 20. *Ako je pravac okomit na ravninu α , onda je svaka ravnina β koja sadrži taj pravac okomita na α .*

Dokaz. Neka je $p \perp \alpha$, a β bilo koja ravnina, koja sadrži p i $q_1 = \beta \cap \alpha$. Neka je dalje q_2 bilo koji pravac, koji prolazi probodištem P pravca p i ravnine α , takav da je $q_1 \perp q_2$. Označimo sa γ ravninu određenu pravcima p i q_2 (sl. 124). Sada $p \perp \alpha$, prema definiciji, povlači $p \perp q_1, q_2$, a po konstrukciji je $q_1 \perp q_2$, pa je prema Propoziciji 12 $q_1 \perp \gamma$, pa po definiciji okomitosti dviju ravnina slijedi $\alpha \perp \beta$. ■

Primjer 9. Neka je α ravnina i p pravac koji nije okomit na α . Dokazite da pravcem p prolazi jedinstvena ravnina β okomita na α .

Rješenje. Razmotrimo najprije slučaj kada p leži u α . Odaberimo na p bilo koju točku P i neka je q pravac kroz P okomit na α (Propozicija 14). Pravci p i q tada određuju neku ravninu β (nacrtajte sliku). Prema Propoziciji 20 ravnina β je okomita na α . Lako se vidi da β ne ovisi o izboru točke $P \in p$. Treba dokazati jedinstvenost. Kada bi postojala ravnina $\beta' \neq \beta$, $\beta' \perp \alpha$ i koja sadrži pravac p , onda bi ravnina γ okomita na presječnicu p tih dviju ravnina sjekla α u nekom pravcu r , a β i β' redom u pravcima n_1, n_2 pa bismo u ravnini γ imali pravac p i točkom P dvije okomice n_1, n_2 na p , što je nemoguće.



Sl. 124.

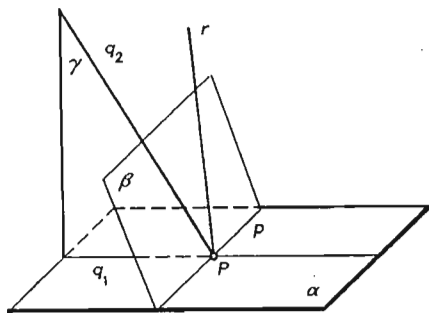
Ako p ne leži u α i nije okomit na α , onda kažemo da je p kos prema α . Takvi se pravci zovu još **priklonice**. U ovom se slučaju uzme točka $P \in p$ i tom točkom povuče pravac $q \perp \alpha$. Tada pravci p i q određuju ravninu $\beta \perp \alpha$. Detalje prepuštamo čitatelju. ■

Primjer 10. Neka je p pravac okomit na ravninu α i $P = p \cap \alpha$. Dokažite da svaki pravac kroz P okomit na p leži u α .

Rješenje. Točkom P povucimo bilo koji pravac $q \perp p$. Neka je β ravnina određena pravcima p i q . Ona siječe α u nekom pravcu q_1 . Zbog $p \perp \alpha$ je $q_1 \perp p$. Kada pravac q ne bi ležao u α , onda bi točkom P u ravnini β prolazila dva pravca okomita na p , što je nemoguće. ■

Primjer 11. Dokažite ako je ravnina γ okomita na presječnicu p ravnina α i β , onda je ona okomita i na α i na β .

Rješenje. Neka je P probodište pravca p i ravnine γ , a $q_1 = \alpha \cap \gamma$, $q_2 = \beta \cap \gamma$. Zbog $\gamma \perp p$ je po definiciji, $q_1, q_2 \perp p$. Povucimo točkom P pravac $r \perp \alpha$ (sl. 125). Prema

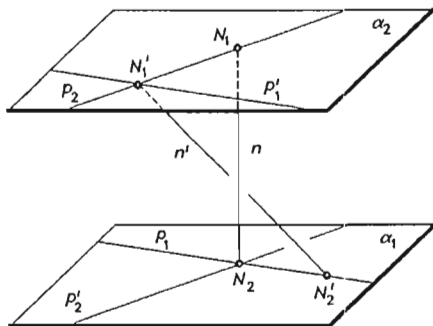


Sl. 125.

prethodnom primjeru r leži u ravnini γ . Prema Propoziciji 20 ravnina γ je okomita na α . Analogno se dokazuje da je $\gamma \perp \beta$. ■

Primjer 12. Dokažite ako su p_1 i p_2 dva mimoilazna pravca, onda uvijek postoji jedinstven pravac n koji siječe i pravac p_1 i p_2 i koji je okomit na svaki od njih. Taj se pravac zove **zajednička normala** tih mimoilaznih pravaca.

Rješenje. Dokažimo najprije egzistenciju zajedničke normale. Prema primjeru 1 iza Propozicije 10 postoji ravnina α_1 koja sadrži pravac p_1 i paralelna je s p_2 i ravnina α_2 koja sadrži p_2 i paralelna je s p_1 . Prema konstrukciji u tom primjeru i Propoziciji 8 je $\alpha_1 \parallel \alpha_2$. Neka je p'_2 ortogonalna projekcija pravca p_2 na ravninu α_1 (sl. 126). Neka je N_2 sjecište pravaca p'_2 i p_1 . Dignemo li u N_2 okomicu na ravninu α_1 , ona siječe p_2 u točki N_1 . Očito je pravac $n = N_1N_2$ tražena zajednička normala.



Sl. 126.

Dokaz jedinstvenosti. Pretpostavimo da p_1 i p_2 osim pravca n , imaju još jednu zajedničku normalu $n' = N'_1N'_2$. Sada $n' \perp p_1$ i p_2 i $p_1 \parallel p'_1$ povlači $n \parallel n'$. Znači da postoji ravnina određena pravcima n i n' , a to povlači da u toj ravnini leže mimoilazni pravci p_1 i p_2 , što je nemoguće. ■

§ 2. Kutovi pravaca i ravnina

2.1. Kut dvaju pravaca

Ako se pravci p_1 i p_2 sijeku, onda oni leže u istoj ravnini, pa iz planimetrije znamo kako se definira i mjeri kut među njima. Neka su sada p_1 i p_2 mimoilazni pravci. Odaberimo na jednome od njih, recimo na p_1 , bilo koju točku P_1 i povucimo točkom P_1 pravac $p'_2 \parallel p_2$.

Kutom između pravaca p_1 i p_2 zovemo tada kut između pravaca p_1 i p'_2 .

Dakle po definiciji je $\sphericalangle(p_1, p_2) = \sphericalangle(p_1, p'_2)$. Da definicija kuta dvaju pravaca ne ovisi o izboru točke $P_1 \in p_1$, a ni o izboru pravca, slijedi neposredno iz sljedeće propozicije.

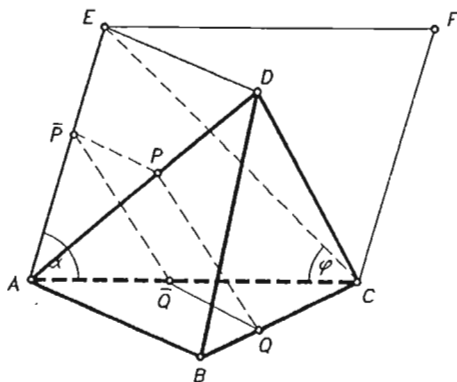
PROPOZICIJA 1. *Ako su ukršteni pravci p i q redom paralelni s ukrštenim pravcima p' i q' , onda je $\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(p', q')$.*

Dokaz. Dokaz je sasvim analogan dokazu Propozicije 11 iz §1 i izostavljamo ga. ■

Primijetimo da smo kut dvaju pravaca p_1 i p_2 mogli definirati i tako da u prostoru odaberemo bilo koju točku P i povučemo tom točkom pravce $p' \parallel p, q' \parallel q$ i stavimo $\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(p', q')$. Uočite da su pravci okomiti ako je kut između njih jednak $\frac{\pi}{2}$.

Primjer 1. Točke P i Q su polovišta bridova \overline{AD} i \overline{BC} tetraedra $ABCD$. Ako je $\sphericalangle(AC, BD) = \alpha$ i $|AC| = |BD|$ odredite $\varphi = \sphericalangle(PQ, AC)$.

Rješenje. AC i BD su mimoilazni pravci. Prema definiciji kuta mimoilaznih pravaca valja jednom točkom pravca AC , recimo točkom A , povući paralelu AE sa BD . Neka je

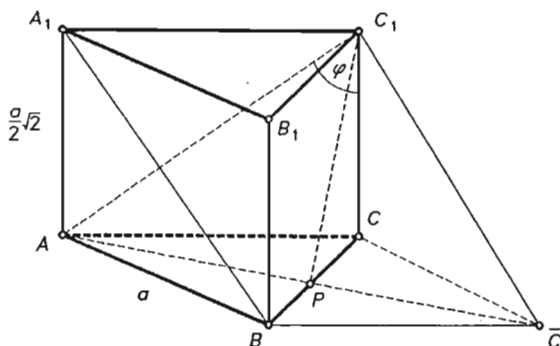


Sl. 127.

točka E takva da je $|AE| = |BD|$. Tada je $\alpha = \sphericalangle(AC, AE)$ (sl. 127). Neka su \overline{P} i \overline{Q} polovišta dužina \overline{AE} i \overline{AC} . Tada je $|Q\overline{Q}| = |P\overline{P}| = \frac{1}{2}|AB|$ i $Q\overline{Q} \parallel AB \parallel P\overline{P}$, pa je $Q\overline{Q}P\overline{P}$ paralelogram. Stoga je $PQ \parallel \overline{P}\overline{Q}$, pa je $\varphi = \sphericalangle(PQ, AC) = \sphericalangle(\overline{P}\overline{Q}, AC)$. Paralelogram $ACEF$ je zbog $|AC| = |BD|$ romb. Dakle $\varphi = \sphericalangle(AC, CE)$. Kako je šiljasti kut tog romba jednak α , dijagonale romba okomite i svaka od njih simetrala kuta romba, to je $\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$. ■

Primjer 2. Visina uspravne pravilne trostrane prizme $ABCA_1B_1C_1$ ima duljinu $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, gdje je a duljina osnovnog brida prizme. Odredite kut φ kojeg zatvaraju plošne dijagonale $\overline{AC_1}$ i $\overline{BA_1}$.

Rješenje. Plošne dijagonale su dužine; ovdje se pod kutom plošnih dijagonala misli na kut pravaca na kojima leže te plošne dijagonale, tj. $\varphi = \sphericalangle(AC_1, BA_1)$ (v. sl. 128). Povucimo točkom C_1 paralelu s A_1B i označimo sa \overline{C} probodište te paralele s ravninom osnovke ABC . Tada je $\varphi = \sphericalangle(AC_1, C_1\overline{C})$. Kako je brid $\overline{A_1B_1}$ paralelan s ravninom osnovke, to je i njegova paralelna projekcija na tu ravninu u smjeru pravca A_1B paralelna s A_1C_1 . Dakle točka \overline{C} se nalazi na pravcu kroz B paralelnom s AC . Dakle, $AB\overline{C}\overline{C}$ je romb. Kako je $B\overline{C}C_1A_1$ paralelogram, to je trokut $\triangle A\overline{C}\overline{C}$ jednakokratan. Slijedi da je sjecište P dijagonala romba $B\overline{C}CA$ ujedno i nožište okomice spuštene iz vrha C_1

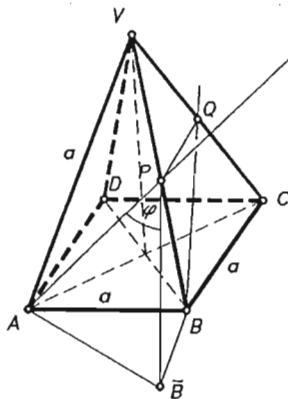


Sl. 128.

na osnovku \overline{AC} trokuta $\triangle ACC_1$. Dakle je $|AP| = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Iz trokuta $\triangle PCC_1$ slijedi, prema Pitagorinom poučku, $|C_1P| = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Slijedi da je trokut $\triangle APC_1$ jednakokrani pravokutni trokut, pa je $\sphericalangle PAC_1 = 45^\circ$, tj. $\frac{\varphi}{2} = 45^\circ$ i konačno $\varphi = 90^\circ$. ■

Primjer 3. Svi bridovi uspravne pravilne četverostrane piramide $ABCDV$ imaju istu duljinu. Neka su P i Q redom polovišta bridova \overline{VB} i \overline{VC} . Odredite kut φ mimoilaznih pravaca AP i BQ .

Rješenje. Povucimo točkom P pravac \overline{PB} paralelan sa BQ i neka je \overline{B} probodište tog pravca s ravninom osnovke piramide (sl. 129). Tada je φ kut pri vrhu P trokuta $\triangle ABP$. Kako pravac \overline{PB} ima točku P zajedničku s ravninom trokuta $\triangle BCV$ i paralelan je s pravcem BQ te ravnine, to on leži u ravnini tog trokuta, pa siječe pravac BC i njihovo sjecište \overline{B} je upravo traženo probodište s ravninom osnovke. Kako je \overline{PQ} srednjica trokuta



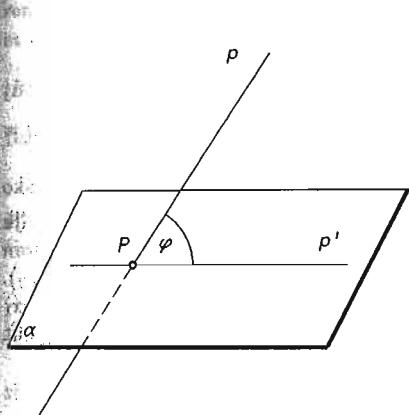
Sl. 129.

$\triangle BGV$ i kako je po konstrukciji \overline{BBQP} paralelogram, to je $|\overline{B\overline{B}}| = \frac{a}{2}$ i $|\overline{P\overline{B}}| = |\overline{BQ}|$. Iz pravokutnog trokuta $\triangle AB\overline{B}$, prema Pitagorinom poučku, dobivamo $|\overline{A\overline{B}}| = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Sada $|\overline{AP}|_{\perp} = |\overline{BQ}|$ (visine sukladnih jednakostraničnih trokuta su jednake) povlači $|\overline{AP}| = |\overline{P\overline{B}}|$. Dakle je trokut $\triangle A\overline{B}P$ jednakokratan. Kako je $|\overline{AP}| = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, to iz tog trokuta nalazimo da je $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{5}{12}$, pa je $\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{7}{12}$ i konačno $\cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{6}$. Dakle je $\varphi = \arccos \frac{1}{6} \approx 80^\circ 24' 21''$. ■

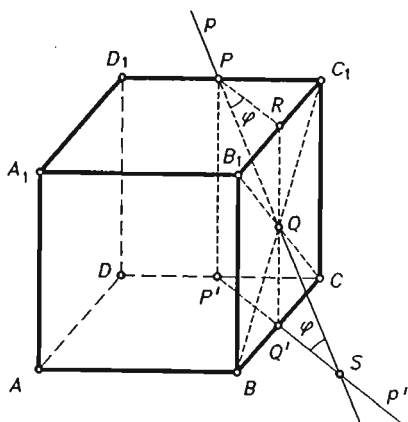
Napomena 1. Prethodna dva primjera kao i zadaci ovoga tipa lakše se rješavaju pomoću skalarnog produkta vektora.

2.2. Kut pravca i ravnine. Kut dviju ravnina

Neka je p pravac koji nije okomit na ravninu α i p' ortogonalna projekcija tog pravca na ravninu. Kutom pravca p i ravnine α zovemo kut između pravca p i p' (sl. 130). Oznaka za kut pravca i ravnine je $\angle(p, \alpha)$.



Sl. 130.



Sl. 131.

Ako pravac p leži u α , onda je po definiciji kut $\angle(p, \alpha) = 0$. Ako je pravac okomit na ravninu, onda stavljamo $\angle(p, \alpha) = \frac{\pi}{2}$ ili $\angle(p, \alpha) = 90^\circ$.

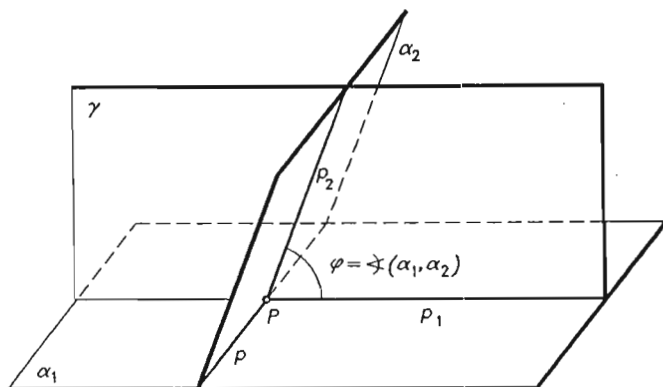
Primjer 4. Zadana je kocka $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Neka je P polovište brida $\overline{C_1 D_1}$ i Q središte strane $BCC_1 B_1$. Odredite kut koji pravac PQ zatvara s ravninom osnovke $ABCD$ te kocke.

Rješenje. Nacrtajmo ortogonalnu projekciju p' pravca $p = PQ$ na ravninu osnovke. Ortogonalne projekcije P' i Q' su očitom redom polovišta bridova $\overline{C_1 D_1}$ i $\overline{B_1 C_1}$ te kocke (v. sl. 131), pa je $p' = P'Q'$. Probodište S pravca p s ravninom osnovke kocke je sjecište pravaca p i p' . Označimo sa R polovišta brida $\overline{B_1 C_1}$. Sada je $\triangle Q'SQ \sim \triangle RQP$, pa je φ kut pri

vrhu P pravokutnog trokuta $\triangle RQP$. Slijedi $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a/2}{a\sqrt{2}/2}$, gdje je a duljina brida kocke.

Odavde je $\varphi = \arctg \sqrt{2} \approx 54^{\circ}44'8''$. ■

Neka se ravnine α_1 i α_2 sijeku u pravcu p . Presjecimo te dvije ravnine bilo kojom ravninom γ koja je okomita na presječnicu p zadanih ravnina. Kutom ravnina α_1 i α_2 zovemo kut između presječnica p_1 i p_2 ravnine γ i ravnina α_1 i α_2 (sl. 132). Kut između dviju ravnina α_1 i α_2 označavamo sa $\sphericalangle(\alpha_1, \alpha_2)$.



Sl. 132.

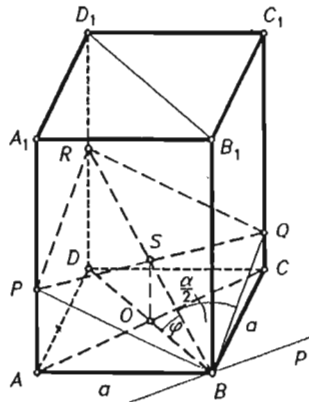
Ako su ravnine α_1 i α_2 paralelne, onda dogovorom smatramo da je $\sphericalangle(\alpha_1, \alpha_2) = 0^{\circ}$.

Iz definicije okomitih ravnina slijedi da je kut okomitih ravnina $\frac{\pi}{2}$, tj. 90° . Kako ravnina γ siječe α_1 i α_2 u pravcima p_1 i p_2 koji su okomiti na p , to smo kut dviju ravnina mogli definirati tako da na p odaberemo bilo koju točku P i povučemo tom točkom okomice p_1 i p_2 koje redom leže u α_1 i α_2 i stavimo $\sphericalangle(\alpha_1, \alpha_2) = \sphericalangle(p_1, p_2)$. Pravci p_1 i p_2 imaju posebna imena. Pravac p_1 zove se **priklonica ravnine α_1 prema ravnini α_2** , a p_2 **priklonica ravnine α_2 prema ravnini α_1** . Dakle kut između dviju ravnina jednak je kutu između njihovih priklonica.

Da kut između dviju ravnina ne ovisi o izboru ravnine γ , neposredno slijedi iz Propozicije 10 §1 i Propozicije 1.

Primjer 5. Osnovka kvadra je kvadrat. Kvarad je presječen ravninom takvom da je presjek romb sa šiljastim kutom α . Odredite kut φ koji ravnina presjeka zatvara sa ravninom osnovke.

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je vrh B jedan vrh romba. Neka su P i Q (sl. 133) dva vrha presjeka. Svaka ravnina kroz B koja siječe sve pobočne bridove kvadra siječe kvarad u paralelogramu. Kako presjek mora biti romb, to je $|AP| = |CQ|$ (jer to povlači $|BP| = |BQ|$). Ako u središtu O osnovke dignemo okomicu na ravninu $ABCD$, ona siječe PQ u točki S . Spojnica BS siječe brid $\overline{DD_1}$ u četvrtom vrhu R romba. Pravac PQ okomit je na dijagonalnu ravninu ACC_1D_1 , pa je okomit i na svaki pravac te ravnine. Dakle je $PQ \perp BR$, pa je presjek zaista romb. Ravnine ABC i PBQ sijeku se u pravcu $p \parallel AC$ (jer ako svakim od paralelnih pravaca položimo ravnine koje

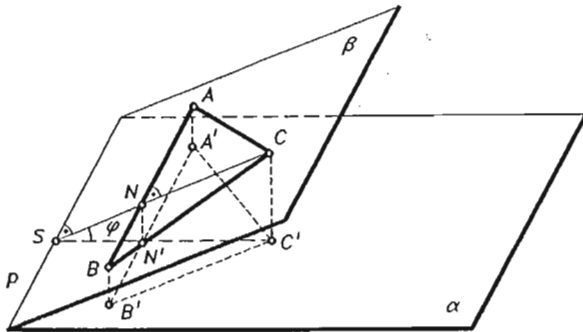


Sl. 133.

se sijeku, onda je presječna tih dviju ravnina paralelna s tim pravcima, dokažite to). Kako je $PQ \perp BR$ to je $BR \perp p$, pa je BR priklonica ravnine romba prema ravnini osnovke kvadra. Očito je i $DB \perp p$, pa je DB priklonica ravnine osnovke prema ravnini romba. Dakle, traženi kut je $\varphi = \sphericalangle RDB$. Označimo duljinu osnovnog brida kvadra sa a . Kako je $|SQ| = |OC| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, to iz pravokutnog trokuta $\triangle BQS$ nalazimo da je $|BS| = \frac{a}{2}\sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Iz pravokutnog trokuta $\triangle RDB$ je $\cos \varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2|BS|}$, pa je $\cos \varphi = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Dakle, konačno je $\varphi = \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$. ■

Primjer 6. Ravnina trokuta površine P zatvara s ravninom α kut $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Neka je P' površina ortogonalne projekcije trokuta na ravninu α . Dokažite da je $P' = P \cdot \cos \varphi$. Generalizirajte!

Rješenje. Pretpostavimo najprije da je jedna stranica, recimo \overline{AB} , zadanog trokuta $\triangle ABC$ paralelna s ravninom α (v. sl. 134). Označimo sa A', B', C' ortogonalne projekcije točaka A, B i C na α . Kako je $AB \parallel A'B'$, to je i $|AB| = |A'B'|$, jer je četverkut

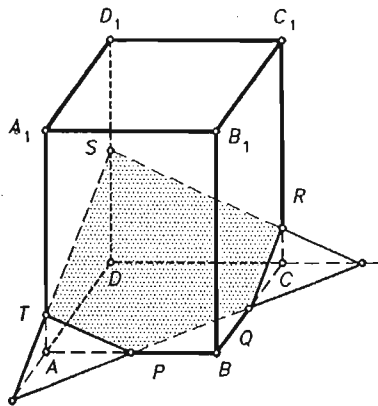


Sl. 134.

$B'A'AB$ pravokutnik. Neka je N nožište okomice spuštene iz vrha C na stranicu \overline{AB} . Tada je CN priklonica ravnine trokuta prema ravnini α . Prema poučku o tri normale, $CN \perp p$ povlači $C'N' \perp p$, pa je $C'N'$ priklonica ravnine α prema ravnini trokuta. Kut tih dviju priklonica je kut φ tih ravnina. Iz pravokutnog trokuta $\triangle SCC'$ lako slijedi da je $|N'C'| = |NC| \cos \varphi$. Dakle je $P' = \frac{1}{2}|A'B'| \cdot |N'C'| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |NC| \cos \varphi$, i konačno $P' = P \cos \varphi$. Ako nijedna stranica trokuta nije paralelna s presječnicom p , onda jednim vrhom trokuta povučemo paralelu sa p i ona ga dijeli na dva trokuta od kojih svaki ima stranicu paralelnu sa p . Ako su P_1 i P_2 površine tih trokuta, onda je $P'_1 = P_1 \cos \varphi$, $P'_2 = P_2 \cos \varphi$, pa je $P' = P'_1 + P'_2 = P_1 \cos \varphi + P_2 \cos \varphi = (P_1 + P_2) \cos \varphi$ pa je zaista $P' = P \cos \varphi$. Lako se vidi da je to istina i za svaki n -terokut. ■

Ovaj primjer se može zgodno iskoristiti pri rješavanju zadataka o presjeku.

Primjer 7. Polovištima dvaju susjednih osnovnih bridova pravilnog kvadra položena je ravnina koja s ravninom osnovke zatvara kut φ . Odredite površinu presjeka kvadra tom ravninom, ako je taj presjek peterokut i ako je duljina osnovnog brida kvadra jednaka a .



Sl. 135.

Rješenje. Označimo sa P i Q polovišta bridova \overline{AB} i \overline{BC} . Ako je presjek peterokut, onda ravnina tog peterokuta mora sjeći pobočne bridove kvadra. Odaberemo li na bridu $\overline{DD_1}$ točku S , bit će ravnina presjeka određena točkama P, Q i S . Konstrukcija peterokuta $PQRST$ jasna je sa slike 135. Označimo sa Δ površinu peterokuta, a sa Δ' njegovu ortogonalnu projekciju na ravninu osnovke. Očito je $\Delta' = \frac{7}{8}a^2$, pa je iz $\Delta' = \Delta \cos \varphi$ slijedi $\Delta = \frac{7a^2}{8 \cos \varphi}$. ■

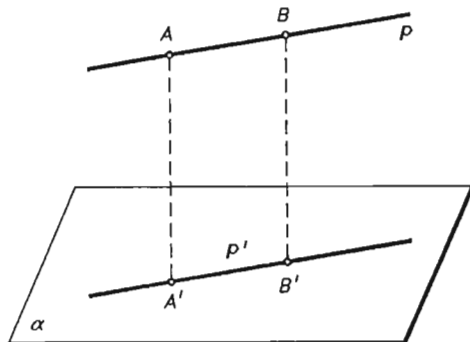
§ 3. Udaljenosti točaka, pravaca i ravnina. Izometrije

3.1. Udaljenost točke od ravnine

Ako je T točka i α ravnina, onda pod udaljenosti točke T od ravnine α razumijevamo udaljenost točke T od njezine ortogonalne projekcije T' na ravninu α , tj. broj $d(T, T')$, gdje je d metrika u M_3 .

Sada možemo definirati udaljenost pravca p , paralelnog s ravninom α od te ravnine.

Udaljenost bilo koje točke pravca p od ravnine α zovemo udaljenost pravca p od ravnine α (v. sl. 136).



Sl. 136.

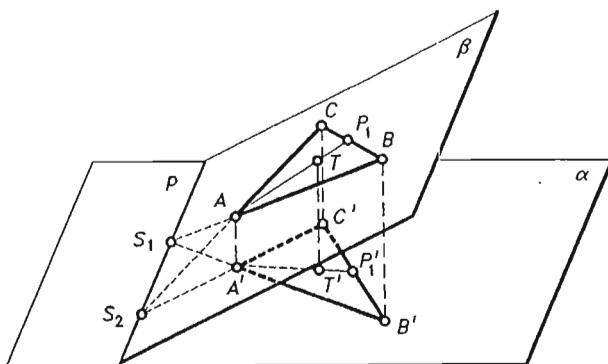
Ova definicija ne ovisi o izboru točke na pravcu p , jer ako su $A, B \in p$ bilo koje dvije točke i A', B' njihove ortogonalne projekcije, onda je $i \parallel p'$ jer p i p' leže u ravnini paralelnih pravaca AA' i BB' (okomice na istu ravninu su paralelne, v. Propoziciju 17 §1) i nemaju zajedničkih točaka jer inače pravac p ne bi bio paralelan s ravninom α . Dakle je četverokut $A'B'BA$ paralelogram sa dva prava kuta, tj. pravokutnik, pa je $d(A, A') = d(B, B')$.

Pod udaljenosti dviju paralelnih ravnina razumijevamo udaljenost bilo koje točke jedne ravnine od druge. Da ona ne ovisi o izboru točke govori sljedeća propozicija, čiji dokaz neposredno slijedi iz gornjih razmatranja.

PROPOZICIJA 1. Udaljenost dviju paralelnih ravnina ne ovisi o izboru točke. ■

Primjer 1. Vrhovi A, B, C trokuta $\triangle ABC$ su od ravnine α redom udaljeni za a, b, c . Kolika je udaljenost težišta trokuta od te ravnine?

Rješenje. Trokut $\triangle ABC$ leži u nekoj ravnini β . Označimo sa p presječnicu, ravnina α i β . Neka su A', B', C' ortogonalne projekcije redom od A, B, C na α . Spojimo li BA do sjecišta sa p i to sjecište S_1 sa A' , na S_1A' leži ortogonalna projekcija B' točke

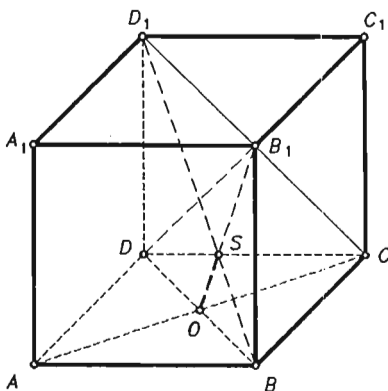


Sl. 137.

B. Slično se konstruira i C' (v. sl. 137). Kako se pri paralelnom projiciranju smjerovi ne mijenjaju (Propozicija 18 §1), to se težište T trokuta $\triangle ABC$ projicira u težište T' njegove ortogonalne projekcije. Neka su P_1 i P_1' polovišta stranica \overline{BC} i $\overline{B'C'}$. Tada je četverokut $C'B'BC$ trapez i $\overline{P_1P_1'}$ njegova srednjica, pa je $|P_1P_1'| = \frac{1}{2}(b+c)$. Kako je $|AA'| = a$ i težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$ to iz dvopravokutnog trapeza lako nalazimo da je $|TT'| = a + \frac{3}{2}|P_1P_1'|$, pa je $|TT'| = \frac{1}{3}(a+b+c)$. ■

Primjer 2. Zadana je kocka $ABCD A_1 C_1 D_1$. Odredite udaljenost vrha D_1 od ravnine ACB_1 , ako je duljina brida kocke jednaka a .

Rješenje. Najprije je $BD \perp AC$. Kako je pravac DB ortogonalna projekcija pravca BD_1 na ravninu osnovke, to je prema poučku o tri normale BD_1 okomit na AC . Na isti se način vidi da je pravac BD_1 okomit na AB_1 , pa je pravac BD_1 okomit na dva pravca ravnine ACB_1 , pa je okomit na nju. Neka je O centar kvadrata $ABCD$. Pravci BD_1 i OB_1 leže u istoj ravnini DBB_1D_1 , pa se sijeku u točki S . $d(D_1, S)$ je tada udaljenost točke D_1 od ravnine ACB_1 . Kako je trokut $\triangle BB_1D_1$ pravokutni i $\overline{B_1S}$ visina, to prema



Sl. 138.

Euklidovom poučkom primijenjenom na taj trokut, dobivamo $|D_1B_1| = \sqrt{|D_1S| \cdot |BD_1|}$ (v. sl. 138). Kako je duljina brida kocke a , to je $|D_1B_1| = a\sqrt{2}$, $|BD_1| = a\sqrt{3}$, pa to uvršteno u prethodnu jednakost daje $|D_1S| = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. ■

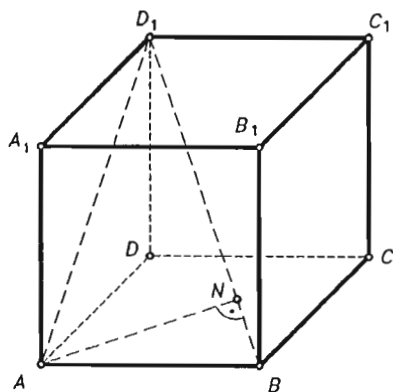
3.2. Udaljenost točke od pravca

Neka je T točka i p pravac. Položimo točkom T ravninu α okomitu na p i neka je S probodište pravca p i ravnine α . Udaljenost $d(T, S)$ zovemo **udaljenost točke T od pravca p** .

Očito je ekvivalentna definicija (a i operativnija) ova: Točkom T i pravcem p položimo ravninu i točkom T povučemo u toj ravnini okomicu na p . Nožište te okomice je tada ista točka S , pa je $d(T, S)$ zaista udaljenost točke T od pravca p .

Primjer 3. Zadana je kocka brida a . Odredite udaljenost jednog njezinog vrha od one prostorne dijagonale koja ne prolazi tim vrhom.

Rješenje. Nađimo udaljenost vrha A od dijagonale BD_1 (v. sl. 139). Ravnina u kojoj leže vrh A i pravac BD_1 je ravnina trokuta $\triangle ABD_1$. Neka je N nožište okomice spuštene



Sl. 139.

iz A na BD_1 . $\triangle ABD_1$ je pravokutni, pravi kut je pri vrhu A . Njegove stranice imaju duljine $|AB| = a$, $|AD_1| = a\sqrt{2}$ i $|BD_1| = a\sqrt{3}$. Njegova je površina u jednu ruku jednaka $\frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2}$, a u drugu $\frac{a\sqrt{3} \cdot |AN|}{2}$. Izjednačavanjem tih izraza nalazimo $|AN| = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$. ■

3.3. Najkraća udaljenost mimoilaznih pravaca

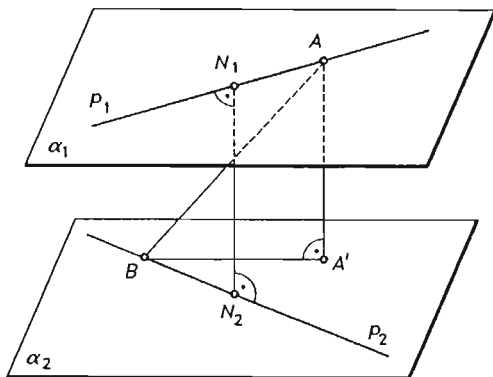
U primjeru 12, §1 pokazano je da uvijek postoji zajednička normala n dvaju mimoilaznih pravaca p_1 i p_2 . Ona siječe p_1 u N_1 i p_2 u N_2 . Udaljenost $d(N_1, N_2)$ zovemo **najkraćom udaljenošću pravaca p_1 i p_2** , ili naprosto **udaljenošću tih pravaca**.

Naziv najkraća udaljenost opravdan je sljedećom propozicijom:

PROPOZICIJA 2. *Najkraća udaljenost d dvaju mimoilaznih pravaca p_1 i p_2 jednaka je*

$$d = \inf \{d(P_1, P_2) \mid P_1 \in p_1, P_2 \in p_2\}.$$

Dokaz. Neka su α_1 i α_2 paralelne ravnine takve da je $p_1 \subset \alpha_1$ i $p_2 \subset \alpha_2$ (primjer 12 §1). Udaljenost tih ravnina je tada jednaka najkraćoj udaljenosti pravaca p_1 i p_2 (sl. 140). Treba pokazati ako odaberemo bilo koje točke $A \in p_1$ i $B \in p_2$,



Sl. 140.

$A \neq N_1$, $B \neq N_2$ da je onda $|AB| > |N_1N_2|$. Neka je A' ortogonalna projekcija točke A na ravninu α_2 . Kako je trokut $\triangle BA'A$ pravokutan s hipotenuzom \overline{AB} to je $|AB| > |AA'|$. Kako su α_1 i α_2 paralelne ravnine, to je $|AA'| = |N_1N_2|$, pa je $|AB| > |N_1N_2|$. ■

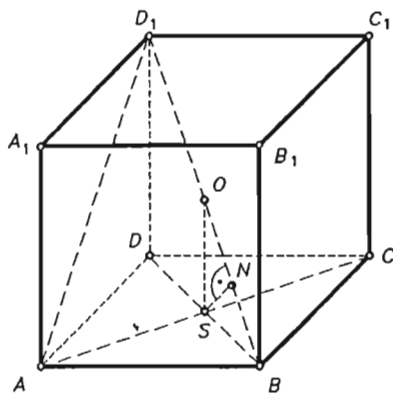
Primjer 4. Odredite najkraću udaljenost prostorne dijagonale kocke od one plošne dijagonale, koja s njome nema zajednički vrh. Duljina brida kocke jednaka je a .

Rješenje. Odredimo najkraću udaljenost dijagonala \overline{AC} i $\overline{BD_1}$, tj. pravaca AC i BD_1 (sl. 141). Neka je S središte osnovke $ABCD$ kocke. Okomica povučena točkom S na ravninu osnovke siječe BD_1 u polovištu O dijagonale BD_1 (srednjica pravokutnog trokuta $\triangle D_1DB$). Neka je N nožište okomice spuštene iz S na BD_1 . Tvrdimo da je pravac SN okomit i na AC i na BD_1 . Na BD_1 je okomit po konstrukciji, a na AC jer leži u ravnini DBB_1D_1 okomitoj na AC . Dakle je $|SN|$ najkraća udaljenost tih dijagonala. U pravokutnom trokutu $\triangle OSB$ je $|OS| = \frac{a}{2}$, $|SB| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ i $|OB| = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Izrazimo li površinu tog trokuta na dva načina, dolazimo do jednakosti

$$|SN| \cdot |OB| = |SB| \cdot |OS|, \text{ tj. } |SN| \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}.$$

Odavde je $|SN| = \frac{a}{6}\sqrt{6}$. ■

Napomena 1. Za određivanje najkraće udaljenosti dvaju mimoilaznih pravaca često se dobro koristi sljedeća dosjetka. Ako su p i q mimoilazni pravci, onda se

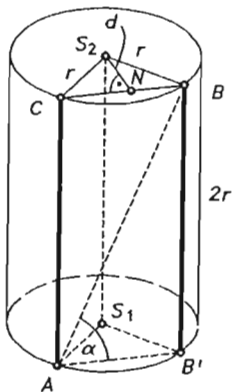


Sl. 141.

jednim od tih pravaca, recimo q položi ravnina α paralelna sa p . Tada je udaljenost bilo koje točke pravca p od ravnine α jednaka najkraćoj udaljenosti pravca p i q .

Primjer 5. Polumjer osnovke jednakostraničnog uspravnog valjka ($v = 2r$) jednak je r . Točka na kružnici gornje osnovke spojena je sa točkom donje osnovke, tako da spojnica tih točaka s ravninom osnovke zatvara kut α . Kolika je najkraća udaljenost d tog pravca od osi valjka?

Rješenje. Odaberimo na donjoj osnovki točku A i na gornjoj točku B . Neka je B' ortogonalna projekcija točke B na ravninu donje osnovke. Tada je $\angle B'AB = \alpha$ kut pravca AB i ravnine donje osnovke (sl. 142). Kako je $BB' \parallel S_1S_2$ to je ravnina $AB'B$ paralelna s osi S_1S_2 . Zbog $AC \parallel B'B$ je $AB'BC$ pravokutnik. Prema prethodnoj napomeni $d = |S_2N|$ (N je nožište okomice spuštene iz S_2 na BC) je najkraća udaljenost pravca AB od osi valjka. Iz trokuta $\triangle AB'B$ nalazimo da je $|AB'| = 2r \operatorname{ctg} \alpha = |BC|$, a iz trokuta $\triangle S_2CB$ je $d^2 = |S_2N|^2 = r^2 - \frac{1}{4}|BC|^2 = r^2(1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha)$. Odavde je $d = \frac{r}{\sin \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}$.



Sl. 142.

3.4. Simetralne ravnine dužine i para ravnina

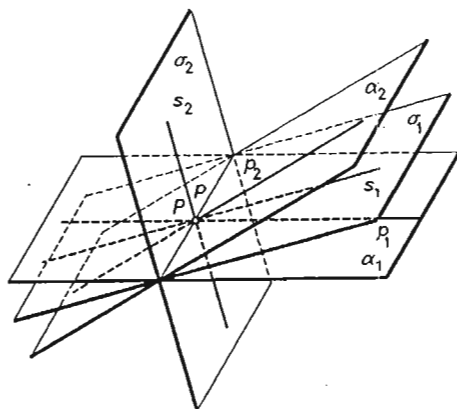
Simetralnom ravninom dužine \overline{AB} zovemo skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od točaka A i B .

PROPOZICIJA 3. *Simetralna ravnina σ dužine \overline{AB} je ravnina koja prolazi polovištem P dužine i okomita je na pravac AB .*

Dokaz. Neka T leži u ravnini koja prolazi točkom P okomito na pravac AB . Tada je $\triangle TPA \cong \triangle TPB$ (S-K-S), pa je $d(T, A) = d(T, B)$, dakle $T \in \sigma$.

Obrnuto, uočimo najprije da polovište P dužine \overline{AB} pripada simetralnoj ravnini σ . Ako je T točka prostora takva da $d(T, A) = d(T, B)$, onda je trokut $\triangle ABT$ jednakokratan, a kako je P polovište dužine \overline{AB} , to se T nalazi na pravcu PT koji ide točkom T i okomit je na pravac AB , pa T leži u ravnini koja prolazi točkom P i okomita je na pravac AB . ■

Neka su α_1 i α_2 ravnine koje se sijeku u pravcu p . Uzmimo na p bilo koju točku P i povucimo tom točkom pravac $p_1 \perp p$, $p_1 \subset \alpha_1$ i $p_2 \perp p$, $p_2 \subset \alpha_2$. Neka su s_1 i s_2 simetrale para pravaca p_1 i p_2 (sl. 143). Tada je očito svaka točka tih pravaca



Sl. 143.

jednako udaljena od ravnina α_1 i α_2 . Dakle, postoje točke prostora koje su jednako udaljene od tih dviju ravnina.

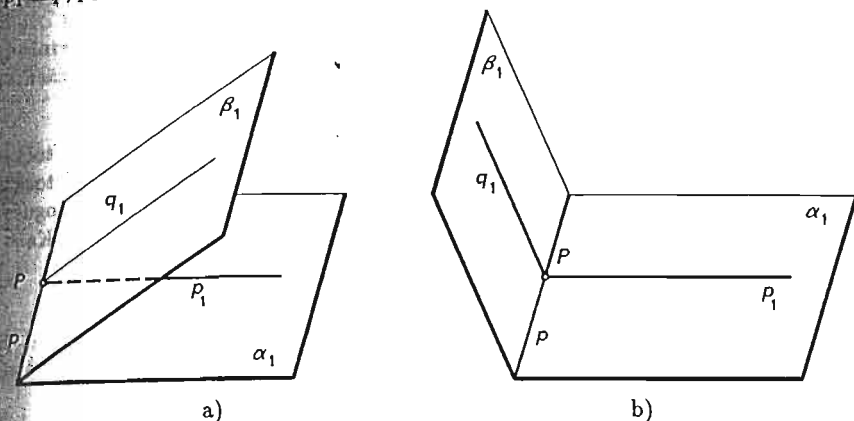
Ravnine σ_1 i σ_2 određene pravcima p_1, s_1 i p_2, s_2 zovemo **simetralnim ravninama para ravnina α_1, α_2** . Očito je par simetralnih ravnina skup svih onih točaka prostora koje su jednako udaljene od ravnina α_1 i α_2 .

3.5. Diedri i triedri

Neka su α i β dvije ravnine koje se sijeku u pravcu p . Pravac p rastavlja svaku od tih ravnina u dvije poluravnine. Odaberimo u svakoj od tih ravnina po jednu poluravninu α_1, β_1 .

Uređeni par poluravnina (α_1, β_1) zovemo **diedrom**, pravac p zovemo **bridom diedra**, a poluravnine α_1, β_1 **stranama diedra**.

Odaberimo na pravcu p bilo koju točku P i tom točkom povucimo polupravac $p_1 \perp p, p_1 \subset \alpha_1$ i polupravac $q_1 \perp p, q_1 \subset \beta_1$ (sl. 144a).



Sl. 144.

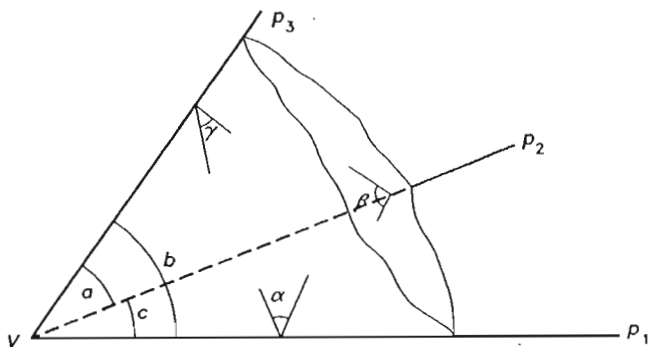
Kut kojeg zatvaraju polupravci p_1 i q_1 zovemo **kutom diedra** (diedralni kut), a još je u upotrebi i naziv **bridni kut**.

Uočite da je kut između dviju ravnina uvijek šiljast, dok kut diedra može biti i tup (sl. 144b). Dakle, za mjeru kuta diedra vrijedi $0^\circ < m(\sphericalangle(\alpha_1, \alpha_2)) < 180^\circ$.

Neka je V točka i $p_i, i = 1, 2, 3$ tri polupravca s početkom u točki V takva da ne leže u istoj ravnini. Uređenu četvorku $(V; p_1, p_2, p_3)$ zovemo **triedrom** ili **trobridom**. V se zove **vrh triedra**, a polupravci p_i njegovim **bridovima**. Kutovi $\sphericalangle(p_i, p_j), i \neq j$ zovu se **kutovi trobrida**. Bridovi p_i i p_j određuju ravninu. Dio te ravnine unutar krakova kuta zove se **strana trobrida** (sl. 145). Kutovi trobrida, kao i njihove mjere, označavaju se malim latinskim slovima kako je to prikazano na sl. 145. Poluravnina određena pravcem p_1 koja sadrži p_2 i poluravnina određena tim istim pravcem p_1 koja sadrži p_3 tvore diedar. Taj diedar zovemo **diedrom trobrida** uz njegov brid p_1 . Na taj način u trobridu imamo tri diedra. Kutove tih diedara označavamo malim grčkim slovima α, β, γ , kako je to prikazano na sl. 145. Ti se kutovi zovu **diedarski kutovi trobrida** ili **bridni kutovi trobrida**.

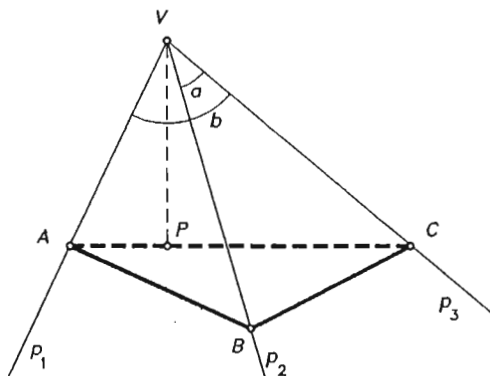
PROPOZICIJA 4. Svaki je kut trobrida manji od zbroja ostalih dvaju.

Dokaz. Ako su kutovi trobrida jednaki, onda je tvrdnja očito istinita.



Sl. 145.

Pretpostavimo stoga da je, na primjer, $a < b$. Odaberimo na p_1, p_2, p_3 točke A, B, C (sl. 146). Dakle, po pretpostavci je $\sphericalangle BVC < \sphericalangle CVA$. Neka je P točka na \overline{AC} takva da je $\sphericalangle CVP = \sphericalangle CVB$ i neka je $|VB| = |VP|$. Očito je moguće odabrati točke A, B, C tako da to bude. Tada je jasno da je $|BC| = |CP|$. Kako



Sl. 146.

je $|AC| < |AB| + |BC|$, to je $|AP| < |AB|$. Zbog toga iz trokuta $\triangle AVP$ i $\triangle AVB$ zaključujemo da je $\sphericalangle AVP < \sphericalangle AVB$. Dodamo li ovoj nejednakosti jednakost $\sphericalangle AVC = \sphericalangle CVB$, slijedi $\sphericalangle AVC < \sphericalangle AVB + \sphericalangle CVB$, tj. $b < a + c$. Analogno se vidi da je i $a < b + c, c < a + b$. ■

PROPOZICIJA 5. Zbroj kutova trobrida uvijek je manji od 360° .

Dokaz. Uzmimo trobrid s vrhom V i bridovima VA, VB, VC . Neka je VA' dopuna polupravca VA do punog pravca (nacrtajte sliku). Primjenom Propozicije 4 na trobrid $(V; VA', VB, VC)$ dobivamo

$$\sphericalangle BVC < \sphericalangle BVA' + \sphericalangle CVA',$$

tj.

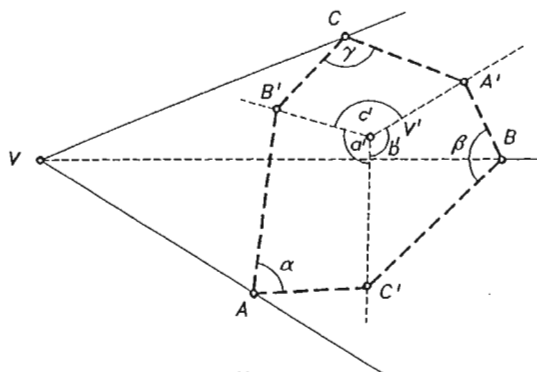
$$\sphericalangle BVC < (180^\circ - \sphericalangle BVA) + (180^\circ - \sphericalangle CVA),$$

odakle

$$\sphericalangle BVC + \sphericalangle BVA + \sphericalangle CVA < 360^\circ,$$

tj. $a + b + c < 360^\circ$. ■

Neka je zadan trobrid $(V; VA, VB, VC)$. Odaberimo unutar trobrida točku V' i spustimo iz nje okomice na strane trobrida. Neka te okomice sijeku strane VBC , VAC i VAB redom u točkama A' , B' i C' . Trobrid $(V'; V'A', V'B', V'C')$ zovemo **polarnim trobridom trobrida** $(V; VA, VB, VC)$. Elemente polarnog trobrida označavamo sa a' , b' , c' , α' , β' , γ' , u skladu sa sl. 147.



Sl. 147.

Nađimo vezu kutova jednog trobrida s bridnim kutovima drugoga.

Kako su bridovi $V'B'$ i $V'C'$ okomiti na ravnine kutova b i c , to su oni okomiti i na brid VA . Slijedi da je ravnina kuta a' okomita na brid VA . Dakle, ravnina kuta a' siječe ravnine kutova c i b u priklonicama tih ravnina. Uzmimo da ta ravnina siječe brid VA baš u točki A . Na isti se način vidi da je $\sphericalangle BA'C = \alpha'$ itd.

U četverokutu $V'B'C'A$ kutovi kod vrhova B' i C' su pravi, pa je $a' + \alpha = 180^\circ$. Na isti način iz četverokuta $V'A'C'B$ i $V'A'B'C$ slijedi $b' + \beta = 180^\circ$ i $c' + \gamma = 180^\circ$. Iz četverokuta $VCBA'$, $VACB'$ i $VABC'$ slijedi $a + \alpha' = 180^\circ$, $b + \beta' = 180^\circ$, $c + \gamma' = 180^\circ$.

Dokazali smo propoziciju.

PROPOZICIJA 6. Kut trobrida suplementaran je s onim bridnim kutom polarnog trobrida kojemu je brid okomit na ravninu tog kuta. ■

Odavde slijedi da za bridne kutove vrijedi:

PROPOZICIJA 7. Zbroj bridnih kutova trobrida veći je 180° , a manji od 540° .

Dokaz. Prema Propoziciji 6 je $a' + \alpha = 180^\circ$, $b' + \beta = 180^\circ$, $c' + \gamma = 180^\circ$. Prema Propoziciji 5 vrijedi $0^\circ < a' + b' + c' < 360^\circ$. Iz ovih relacija odmah slijedi

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ. \blacksquare$$

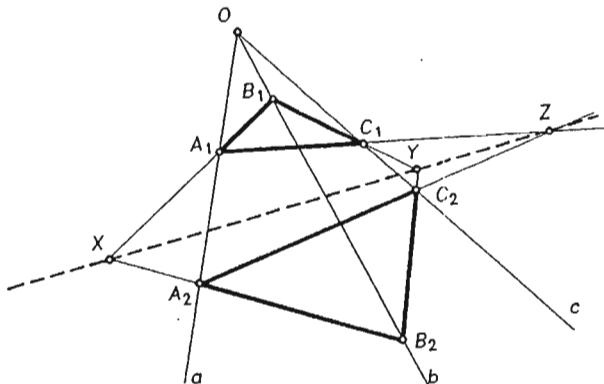
Ako oko vrha trobrida opišemo sferu, onda trobrid iz sfere isijeca sferni trokut (v. pogl. IV, §11 Sferna trigonometrija). Iz Propozicije 5 slijedi da je zbroj stranica sfernog trokuta manji od 360° , a iz Propozicije 7 da je zbroj kutova sfernog trokuta veći od 180° , a manji od 540° .

Iz Propozicije 4 slijedi da je u svakom sfernom trokutu zbroj dviju stranica uvijek veći od treće.

Prema tome, ovo su alternativni dokazi ("čisto stereometrijski") raznih nejednakosti koje smo izveli u pogl. IV, §11 o sfernoj trigonometriji.

3.6. "Izlet u prostor"

Pri rješavanju nekih planimetrijskih zadataka često je zgodno napraviti "izlet u prostor". Karakteristične primjere takvog "izleta" imamo kod Desarguesovog i Brianchonovog teorema.



Sl. 148.

Primjer 6. (Desarguesov¹ teorem). Točkom O u ravnini ili prostoru prolaze tri pravca a , b , c . Na pravcu a zadane su točke A_1 i A_2 , na b točke B_1 i B_2 , a na c točke C_1 i C_2 . Dokažite da su točke presjeka $X = A_1B_1 \cap A_2B_2$, $Y = B_1C_1 \cap B_2C_2$ i $Z = C_1A_1 \cap C_2A_2$ tri kolinearne točke. (Pri tom pretpostavljamo da ovi presjeci postoje, tj. da navedeni pravci nisu paralelni.)

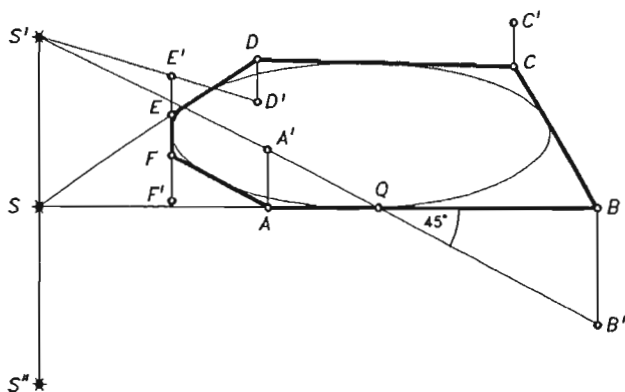
¹Girard Desargues (1591 – 1661), francuski arhitekt i matematičar. Jedan od utemeljitelja projektivne i nacrtne geometrije.

Rješenje. Intuitivno govoreći, na ravninski slučaj možemo gledati kao na projekciju prostornog trobrida koji je presječen s dvjema ravninama, pa su navedene točke kolinearne, jer leže na presječnosti tih dviju ravnina.

Formalno i točnije, odaberemo točke C'_1 i C'_2 u prostoru van naše ravnine α koje se nekom paralelnom projekcijom π projiciraju redom u C_1 i C_2 . To možemo učiniti i tako da kroz C_1 i C_2 uzmemo paralelne ravnine γ_1 i γ_2 i presječemo ih nekim pravcem kroz O . π je tada projiciranje na α paralelno sa $C_1C'_1$. Tada je $\pi(A_1C'_1 \cap A_2C'_2) = A_1C_1 \cap A_2C_2$ i $\pi(B_1C'_1 \cap B_2C'_2) = B_1C_1 \cap B_2C_2$. Prema tome, navedene točke leže na projekciji presječnosti ravnina $A_1B_1C'_1$ i $A_2B_2C'_2$, tj. na $\pi(A_1B_1C'_1 \cap A_2B_2C'_2)$. ■

Primjer 7. (Brianchonov² teorem). Dijagonale koje spajaju nasuprotne vrhove tangencijalnog šesterokuta sijeku se u jednoj točki. Dokažite!

Rješenje. Kroz svaki vrh šesterokuta $ABCDEF$ podignimo normalu na ravninu šesterokuta i na normalama odmjerimo redom dužine $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, ..., $\overline{FF'}$ čije su duljine jednake odgovarajućim duljinama tangenata na kružnicu. Pri tom uzmimo da su vrhovi A, C', E' s jedne strane, a B', D', F' s druge strane ravnine (sl. 149).

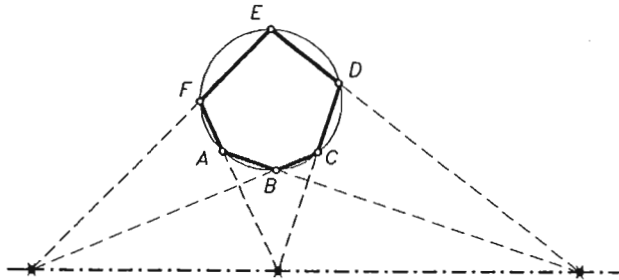


Sl. 149.

Dokažimo da pravci $A'B'$ i $E'D'$ leže u jednoj ravnini. Ako je $AB \parallel ED$, onda je očito i $A'B' \parallel E'D'$. Pretpostavimo da je $AB \cap ED = S$. Točkom S povucimo normalu na ravninu i na njoj uzmimo točke S' i S'' , tako da su duljine od $\overline{SS'}$ i $\overline{SS''}$ jednake duljini tangente iz S na kružnicu. Neka je Q diralište kružnice na stranici \overline{AB} . Dužine $\overline{S'Q}$, $\overline{S''Q}$, $\overline{A'Q}$ i $\overline{B'Q}$ s pravcem AB zatvaraju kut 45° i leže u ravnini kroz AB okomitom na polaznu ravninu. Stoga pravac $A'B'$ prolazi ili kroz S' ili kroz S'' . Slično se vidi da i $E'D'$ prolazi kroz istu točku. Dakle, pravci $A'B'$ i $E'D'$ se sijeku, pa se stoga i pravci $A'D'$ i $B'E'$ također sijeku (zbog položaja obzirom na ravninu).

Analogno se dokazuje da se pravci $A'D'$, $B'E'$ i $C'F'$ sijeku u parovima. Kako ti pravci ne leže u jednoj ravnini, to se oni moraju sijeći u jednoj točki. Zbog toga se i njihove ortogonalne projekcije, tj. pravci AD , BE i CF moraju sijeći u jednoj točki. ■

²Charles J. Brianchon (1785 – 1864), francuski matematičar.



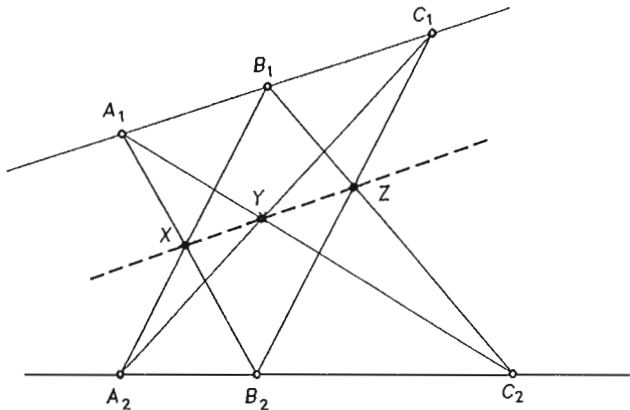
Sl. 150.

Desarguesov teorem igra važnu ulogu u aksiomatskoj izgradnji tzv. **projektivne geometrije ravnine**. Na temelju te geometrije taj se teorem ne može dokazati, pa se onda uzima kao aksiom te geometrije. Zanimljivo je da u geometriji projektivne ravnine vrijedi tzv. **princip dualnosti**: Ako u nekom teoremu prevedemo riječi prema rječniku

- točka \longleftrightarrow pravac
 prolazi kroz \longleftrightarrow leži na
 spajanje \longleftrightarrow sječenje
 točka na kružnici \longleftrightarrow tangenta na kružnicu,

onda dobivamo opet istinit teorem te geometrije. Tako je, na primjer, dualni teorem Desarguesovog teorema njegov obrat. Dualni teorem Brianchonovog teorema tada glasi ovako: spojnice sjecišta parova nasuprotnih stranica šesterokuta upisanog u kružnicu leže na istom pravcu. Taj se teorem zove **Pascalov teorem** (sl. 150).

Znamo da je kružnica krivulja drugog reda (v. pogl. VI), a u projektivnoj se geometriji pokazuje da Brianchonov pa stoga i njegov dual, tj. Pascalov teorem



Sl. 151.

vrijede za sve krivulja drugog reda. Posebno, kako je i par pravaca krivulja drugog reda, to vrijedi sljedeći teorem.

Pappus-Pascalov teorem. *Neka su p_1 i p_2 dva pravca u ravnini, te neka su A_1, B_1, C_1 točke na p_1 , a A_2, B_2, C_2 točke na p_2 kao na sl. 151. Tada su točke presjeka $X = A_1B_2 \cap A_2B_1$, $Y = A_1C_2 \cap A_2C_1$ i $Z = B_1C_2 \cap B_2C_1$ tri kolinearne točke.*

U ovoj formulaciji taj je teorem znao već Pappus iz Aleksandrije u 3. st, a u 17. st. ga je B. Pascal dokazao za sve krivulje drugog reda. Dokaz Pappus-Pascalovog teorema naveden je u pogl. IV, §9.2.

Zainteresiranog čitatelja upućujemo na knjigu D. Palman, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

§ 4. Izometrije i neka preslikavanja prostora

4.1. Grupa izometrija prostora

Neka je d metrika na prostoru M_3 definirana aksiomom S_4 . Surjektivno preslikavanje $f : M_3 \rightarrow M_3$ zovemo **izometrijom prostora** ako vrijedi

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in M_3. \quad (1)$$

Očito je svaka izometrija prostora i injekcija. Zaista $A \neq B$ povlači $d(A, B) > 0$, pa zbog (1) vrijedi $d(f(A), f(B)) > 0$, a odavde je $f(A) \neq f(B)$. Kako je izometrija po definiciji i surjekcija, to je ona i bijekcija.

PROPOZICIJA 1. *Skup \mathcal{I} svih izometrija prostora je grupa obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.*

Dokaz. a) Ako su $f, g \in \mathcal{I}$ izometrije, tada je i $g \circ f$ izometrija, jer za svake dvije točke $A, B \in M_3$ vrijedi

$$\begin{aligned} d((g \circ f)(A), (g \circ f)(B)) &= d(g(f(A)), g(f(B))) = \\ &= d(f(A), f(B)) = d(A, B). \end{aligned}$$

b) Za bilo koje tri izometrije $f, g, h \in \mathcal{I}$ vrijedi $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, jer to vrijedi za svaka tri preslikavanja za koja su te kompozicije definirane (prvi dio, str. 10).

c) Identiteta 1_{M_3} na prostoru M_3 je očito izometrija.

d) Neka je $f \in \mathcal{I}$ bilo koja izometrija. Kako je f bijekcija to postoji inverzno preslikavanje $f^{-1} : M_3 \rightarrow M_3$ i vrijedi $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = 1_{M_3}$. Da je f^{-1} izometrija, slijedi iz

$$\begin{aligned} d(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) &= d(f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B))) = \\ &= d(1_{M_3}(A), 1_{M_3}(B)) = d(A, B). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dakle, skup svih izometrija je grupa i tu grupu zovemo **grupom izometrija prostora** M_3 . Kasnije ćemo vidjeti da ta grupa nije komutativna.

Ako je $\mathcal{F} \subseteq M_3$ podskup i $f : M_3 \rightarrow M_3$ izometrija, onda f -slikom skupa \mathcal{F} zovemo skup $f(\mathcal{F}) = \bigcup_{T \in \mathcal{F}} f(T)$.

Za skupove točaka $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq M_3$ kažemo da su **sukladni (izometrični)** ako postoji $f \in \mathcal{F}$ tako da je $f(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$. Oznaka za sukladne skupove je $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$.

PROPOZICIJA 2. Sukladnost je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{P}(M_3)$ svih podskupova prostora M_3 .

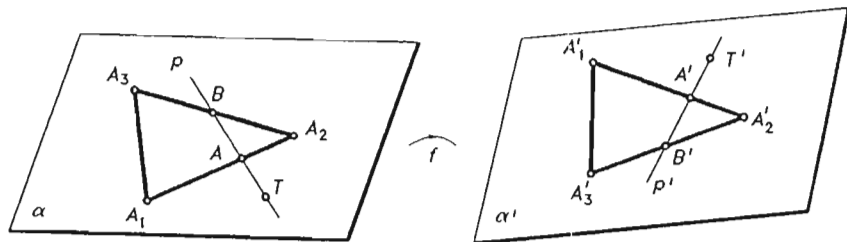
Dokaz. a) Refleksivnost. $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$ očito vrijedi jer je $1_{M_3}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

b) Simetričnost. $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$ povlači da postoji $f \in \mathcal{I}$ takav da je $f(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$, pa $f^{-1} \in \mathcal{I}$ ima svojstvo da je $f^{-1}(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1$, pa je $\mathcal{F}_2 \cong \mathcal{F}_1$.

c) Transitivnost. $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}_2 \cong \mathcal{F}_3$ povlači da postoje $f, g \in \mathcal{I}$ takvi da je $f(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$ i $g(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_3$. Kako je $g \circ f$ izometrija i kako vrijedi $(g \circ f)(\mathcal{F}_1) = g(f(\mathcal{F}_1)) = g(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_3$, slijedi da je $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_3$. ■

PROPOZICIJA 3. Svaka izometrija prostora preslikava bijektivno ravninu na ravninu.

Dokaz. Neka je α ravnina i $A_i \in \alpha$, $i = 1, 2, 3$ tri nekolinearne točke. Za $f \in \mathcal{I}$ su točke $f(A_i) = A'_i$ nekolinearne i određuju neku ravninu α' . Treba vidjeti da je $f(\alpha) = \alpha'$. Najprije pokažimo da $T \in \alpha$ povlači $T' = f(T) \in \alpha'$. Točkom T povucimo u ravnini α bilo koji pravac p koji siječe dvije stranice trokuta $\triangle A_1 A_2 A_3$ u točkama A i B (sl. 152). Tada je $A' \in A'_1 A'_2$, $B' \in A'_2 A'_3$ dakle $A' B' \subset \alpha'$, pa



Sl. 152.

je $f(p) = p' = A' B' \subset \alpha'$, a to povlači $T' = f(T) \in \alpha'$. Slično se vidi da je svaka točka ravnine α' slika neke točke ravnine α , a kako je $f|_{\alpha}$ injekcija, to f preslikava α bijektivno na α' . ■

Oдавде slijedi,

KOROLAR 1. Svaka izometrija prostora preslikava poluravninu bijektivno na poluravninu i poluprostor na poluprostor, paralelne pravce na paralelne pravce i paralelne ravnine u paralelne ravnine. ■

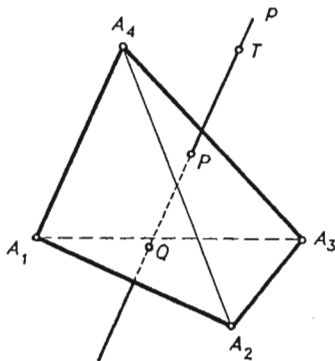
Istim argumentima kao u planimetriji (prvi dio, str. 183) dokazuje se ako je $f: M_3 \rightarrow M_3$ izometrija prostora i ako su A i B fiksne točke od f (tj. $f(A) = A$, $f(B) = B$), onda je i svaka točka pravca AB fiksna.
 Iz Propozicije 5, svojstvo (c) 1. dio str. 183 slijedi

PROPOZICIJA 4. *Ako su A_i , $i = 1, 2, 3$ nekolinearne fiksne točke izometrije $f: M_3 \rightarrow M_3$, onda je i svaka točka ravnine određena tim točkama fiksna. ■*

Novo svojstvo izometrije dato je ovom propozicijom

PROPOZICIJA 5. *Ako su A_i , $i = 1, 2, 3, 4$ nekomplanarne fiksne točke izometrije $f: M_3 \rightarrow M_3$, onda je $f = 1_{M_3}$.*

Dokaz. Neka je $T \in M_3$ bilo koja točka. Povucimo točkom T pravac p koji probada dvije od ravnina određenih točkama A_i u P i Q . Na sl. 153 to su ravnine



Sl. 153.

$A_1A_2A_3$ i $A_2A_3A_4$. Prema prethodnoj propoziciji je $f(P) = P$ i $f(Q) = Q$. Kako je $T \in p$ i dvije točke tog pravca su fiksne, to je i T fiksna točka od f , tj. imamo da je $f(T) = T$. ■

PROPOZICIJA 6. *Ako se dvije izometrije $f, g: M_3 \rightarrow M_3$ podudaraju u četiri nekomplanarne točke, onda je $f = g$. Oдавde slijedi da je svaka izometrija prostora potpuno određena sa četiri para korespondentnih točaka.*

Dokaz. Neka su A_i , $i = 1, 2, 3, 4$ nekomplanarne točke takve da je $f(A_i) = g(A_i)$. Tada je i $h = g^{-1} \circ f$ izometrija i vrijedi $h(A_i) = A_i$, pa zbog Propozicije 5 slijedi $h = 1_{M_3}$, tj. $g^{-1} \circ f = 1_{M_3}$, pa je $f = g$. ■

4.2. Translacija prostora

Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ čvrsti vektor u prostoru M_3 . Translacija $t_{\vec{a}}$ prostora M_3 za vektor \vec{a} je preslikavanje $t_{\vec{a}} : M_3 \rightarrow M_3$, koje svakoj točki $T \in M$ pridružuje točku $T' = t_{\vec{a}}(T) \in M_3$ tako da je $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$.

Očito je svaka translacija izometrija prostora. Kako je, osim toga $t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}} = t_{\vec{a} + \vec{b}}$, $t_{-\vec{a}} = (t_{\vec{a}})^{-1}$ i $t_{\vec{0}} = 1_{M_3}$, to je skup svih translacija prostora grupa obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju. Ta se grupa zove **grupa translacija prostora** i označava sa \mathcal{T} , i ona je komutativna. Dakle je $\mathcal{T} \subset \mathcal{I}$ podgrupa grupe izometrija.

Ako translacija nije identiteta, onda ona očito nema fiksnu točku.

Svaki pravac paralelan sa smjerom vektora je fiksni pravac te translacije.

Svaka ravnina paralelna s pravcem koji ima smjer vektora translacije je fiksna ravnina te translacije.

Kao i u planimetriji (1. dio str. 289) dokazuje se da vrijedi

PROPOZICIJA 7. *Svaka translacija prostora preslikava pravac na njemu paralelan pravac. ■*

4.3. Centralna simetrija prostora

Neka je $O \in M_3$ bilo koja točka prostora M_3 . **Centralna simetrija** $s_O : M_3 \rightarrow M_3$ je preslikavanje koje svakoj točki $T \in M_3$ pridružuje točku $T' = s_O(T)$ tako da je O polovište dužine $\overline{TT'}$ (ili vektorski $\overrightarrow{OT'} = -\overrightarrow{OT}$). Točka O se zove centar simetrije. Dogovorom se stavlja da je $s_O(O) = O$ i O je jedina fiksna točka preslikavanja s_O . Svaki pravac kroz O je fiksni pravac od s_O . Isto vrijedi za svaku ravninu kroz O .

Svaka centralna simetrija očito je bijekcija.

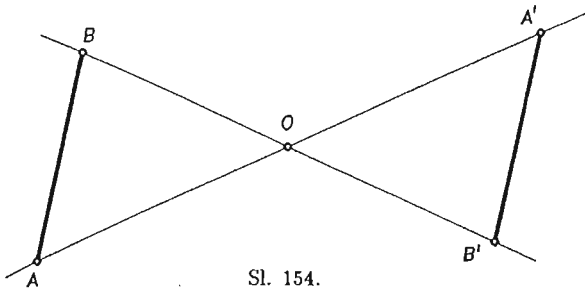
PROPOZICIJA 8. *Svaka centralna simetrija je izometrija prostora.*

Dokaz. Neka je $s_O : M_3 \rightarrow M_3$ centralna simetrija i $A, B \in M_3$ bilo koje dvije točke. Ako su A, B, O kolinearne točke, onda je tvrdnja očita. Ako su nekolinearne, onda je $\triangle OAB \cong \triangle OA'B'$ (S-K-S), gdje je $A' = s_O(A)$ i $B' = s_O(B)$, pa je $|AB| = |s_O(A)s_O(B)|$ (sl. 154). ■

Primjer 1. Dokažite da svaka centralna simetrija preslikava pravac u njemu paralelan pravac i ravninu u njoj paralelnu ravninu.

Rješenje. Ako pravac p prolazi centrom simetrije, onda je $s_O(p) = p$ i tvrdnja je očigledna. Ako pravac $p = AB$ ne prolazi centrom simetrije, onda iz $\triangle OAB \cong \triangle OA'B'$ slijedi $\sphericalangle BAO = \sphericalangle OA'B'$, a to povlači $p \parallel p' = AB$ (1. dio, Propozicija 26, str. 202).

Ako ravnina α prolazi centrom simetrije, onda je $s_O(\alpha) = \alpha$, pa je $\alpha \parallel s_O(\alpha)$. Ako ona ne prolazi centrom simetrije, onda je $s_O(\alpha) = \beta$ ravnina (Propozicija 3). Uzmimo u α bilo koja dva pravca p_1 i p_2 koji se sijeku i označimo $p'_1 = s_O(p_1)$ i $p'_2 = s_O(p_2)$. Kako

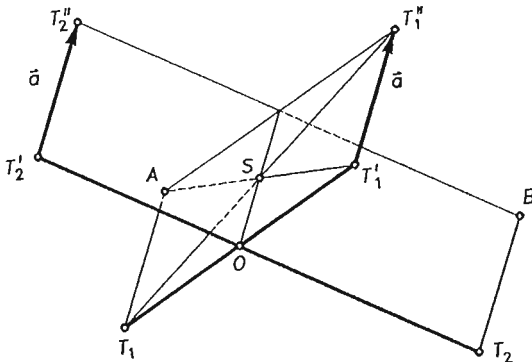


Sl. 154.

centralna simetrija preslikava pravac u njemu paralelni pravac, to je $p'_1 \parallel p_1$ i $p'_2 \parallel p_2$. Kako je ravnina β određena pravicima p'_1 i p'_2 , to je zbog Propozicije 8, §1, $\alpha \parallel \beta$. ■

Primjer 2. Dokažite da skup svih translacija i centralnih simetrija prostora tvori grupu obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.

Rješenje. 1. Grupoidnost. Kompozicija dviju translacija je translacija (translacije tvore grupu). Treba pokazati da je kompozicija translacije i centralne simetrije jedno od tih dvaju preslikavanja. Pokazat ćemo da je to centralna simetrija. Uzmimo translaciju $t_{\vec{a}}$ i centralnu simetriju s_O . Neka su $T_i \in M_3$, $i = 1, 2$ i $s_O(T_i) = T'_i$, $(t_{\vec{a}} \circ s_O)(T_i) = T''_i$. Tada su točke T_1, T'_1, T''_1 , vrhovi paralelograma $T_1 T'_1 T''_1 A$ (sl. 155). Slično je i $T_2 T'_2 T''_2 B$ paralelogram. Kako se dijagonale paralelograma raspolavljaju, to je točka S polovište dužine $\overline{T_1 T''_1}$. Na isti način je i S polovište dužine $\overline{T_2 T''_2}$, pa je $t_{\vec{a}} \circ s_O = s_S$.



Sl. 155.

Slično se pokazuje da je i $s_O \circ t_{\vec{a}}$ centralna simetrija. Očito je općenito $t_{\vec{a}} \circ s_O \neq s_O \circ t_{\vec{a}}$.

Dokažimo sada da je kompozicija centralnih simetrija translacija. Neka je $T \in M_3$ bilo koja točka i s_{O_i} , $i = 1, 2$ centralna simetrija i $T' = s_{O_1}(T)$, $T'' = (s_{O_2} \circ s_{O_1})(T)$. Tada je $\overline{O_1 O_2}$ srednjica trokuta $\Delta T T' T''$, pa je $\overline{O_1 O_2} = 2 \overline{O_1 O_2}$, odakle slijedi $s_{O_2} \circ s_{O_1} = t_{\overline{2 O_1 O_2}}$.

Ovim je svojstvo grupoidnosti dokazano.

2. Asocijativnost kompozicije je očita (1. dio, str. 10).
3. Očito je $1_{M_3} = s_O \circ s_O$.
4. $t_a^{-1} = t_{-a}$, $s_O^{-1} = s_O$. ■

Napomena 1. Grupa svih centralnih simetrija i svih translacija prostora nije komutativna grupa. Nadalje, svaka centralna simetrija je involutorno preslikavanje.

4.4. Simetrije prostora obzirom na ravninu

Neka je $\alpha \subset M_3$ bilo koja ravnina. **Simetrija obzirom na ravninu** α je preslikavanje $s_\alpha : M_3 \rightarrow M_3$, različito od identiteta koje svakoj točki $T \in M_3$ pridružuje točku $T' = s_\alpha(T)$ tako da je $TT' \perp \alpha$, $|ST| = |ST'|$, gdje je S probodište pravca TT' s ravninom α .

Simetriju obzirom na ravninu zovemo još i **planarnom simetrijom** ili **zrcaljenjem na ravnini**.

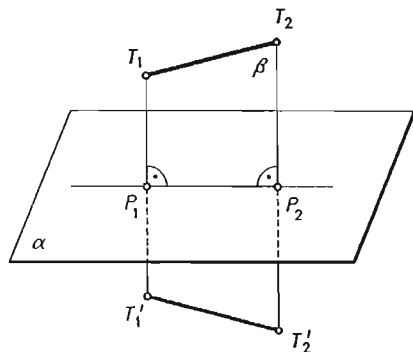
To preslikavanje očito ima ova svojstva:

1. s_α je involutorno preslikavanje;
2. sve točke ravnine α su fiksne točke od s_α ;
3. pravci okomiti na ravninu α su fiksni pravci od s_α ;
4. ravnine okomite na ravninu α su fiksne ravnine od s_α .

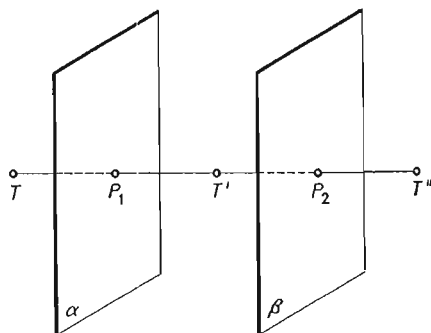
PROPOZICIJA 9. Svaka planarna simetrija je izometrija prostora.

Dokaz. Neka su $T_1, T_2 \in M_3$ bilo koje dvije točke (v. sl. 156), s_α planarna simetrija i $s_\alpha(T_1) = T'_1$, $s_\alpha(T_2) = T'_2$. Kako su pravci $T_1T'_1$ i $T_2T'_2$ okomiti na istu ravninu α , to su oni paralelni i određuju ravninu β . Restrikcija od s_α na ravninu β je tada osna simetrija ravnine β obzirom na pravac P_1P_2 , pa je $|T_1T_2| = |T'_1T'_2|$. ■

Primjer 3. Dokazite ako su α i β paralelne ravnine, onda je $s_\beta \circ s_\alpha$ translacija prostora.



Sl. 156.



Sl. 157.

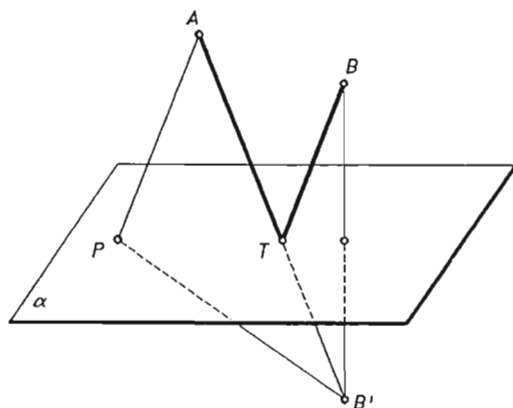
Rješenje. Neka je $T \in M_3$ bilo koja točka, $T' = s_\alpha(T)$, $T'' = (s_\beta \circ s_\alpha)(T)$ (sl. 157). Neka je d udaljenost ravnina α i β . Iz definicije planarne simetrije slijedi $|TT''| = |P_1T'| + |T'P_2| = 2|P_1P_2| = 2d$. Dakle je $s_\beta \circ s_\alpha$ translacija za vektor okomit na ravnine α i β kojemu je modul jednak $2d$. Provjerite to za sve moguće položaje točke T prema α i β . ■

Iz ovog primjera razabiremo da planarne simetrije ne tvore grupu.

Primjer 4. Dokazite da za svake dvije ravnine α i β postoji planarna simetrija $s_\sigma: M_3 \rightarrow M_3$ takva da je $s_\sigma(\alpha) = \beta$.

Rješenje. Ako je $\alpha \parallel \beta$, onda je s_σ simetrija na ravnini σ koja je jednako udaljena od ravnina α i β . Ako se ravnine α i β sijeku, onda postoje dvije takve osne simetrije s_{σ_1} i s_{σ_2} , gdje su σ_1 i σ_2 simetralne ravnine para ravnina α i β . Provjerite to! ■

Primjer 5. Zadana je ravnina α i točke $A, B \notin \alpha$. Odredite u α točku T tako da je $|AT| + |TB|$ minimum.



Sl. 158.

Rješenje. Ako su točke A i B s različitih strana ravnine α , onda je tražena točka T probodište pravca AB s ravinom α . Neka su A i B s iste strane od α , $B' = s_\alpha(B)$ i T probodište pravca AB' sa α . Tvrđimo da je T tražena točka (sl. 158). Kako je s_α izometrija, to je $|BT| = |B'T|$, pa je $|AT| + |TB| = |AB'|$. Ako je $P \in \alpha$ neka druga točka onda prema nejednakosti trokuta slijedi $|AP| + |PB'| > |AB'|$. Zbog $|PB| = |PB'|$ je $|AP| + |PB| > |AB'|$, dakle $|AT| + |TB| < |AP| + |PB|$ i tvrdnja je dokazana. ■

4.5. Simetrije prostora obzirom na pravac

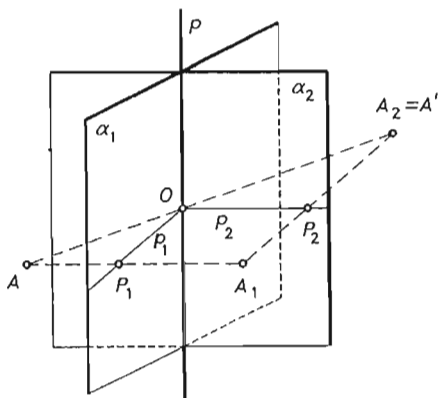
Simetrijom s_p prostora obzirom na pravac p zovemo ono preslikavanje $s_p : M_3 \rightarrow M_3$ koje ima svojstva:

1. Svaka točka pravca p je fiksna točka od s_p .
2. Za točku $A \in M_3$ je pravac AA' , gdje je $A' = s_p(A)$, okomit na pravac p .
3. $|OA| = |OA'|$, gdje je O sjecište pravaca AA' i p .

Simetrija prostora na pravac p zove se još i **aksijalna (osna) simetrija** prostora, a pravac p se zove **os simetrije**.

PROPOZICIJA 10. Svaka osna simetrija prostora je kompozicija dviju planarnih simetrija.

Dokaz. Neka je s_p osna simetrija i $A \in M_3$ točka koja ne leži na osi p . Označimo $A' = s_p(A)$ i sa $O \in p$ polovište dužine AA' . Pravcem p položimo bilo koje dvije ravnine α_1 i α_2 , $\alpha_1 \perp \alpha_2$. Neka je $s_{\alpha_1}(A) = A_1$ i $s_{\alpha_2}(A_1) = A_2$. Pokazat ćemo da je $s_{\alpha_2} \circ s_{\alpha_1} = s_p$. U tu svrhu treba vidjeti da je $A' = A_2$. Zaista kako je $AA_1 \perp \alpha_1$ to je $AA_1 \perp p$, a kako je i $A_1A_2 \perp \alpha_2$, to je $A_1A_2 \perp p$ (sl. 159). Dakle, pravac p okomit



Sl. 159.

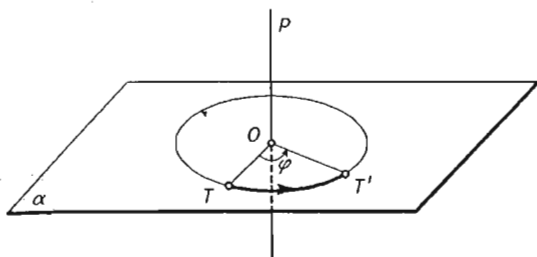
je na ravninu AA_1A_2 , pa je i pravac AA_2 te ravnine okomit na p i siječe p upravo u točki O . Ravnina AA_1A_2 siječe ravnine α_1 i α_2 u okomitim pravcima p_1 i p_2 . Kako je $\sphericalangle AOP_1 = \sphericalangle POA_1$, $\sphericalangle A_1OP_2 = \sphericalangle POA_2$ i $\sphericalangle A_1OP_1 + \sphericalangle P_2OA_1 = \sphericalangle P_1OP_2 = \frac{\pi}{2}$ to je $\sphericalangle AOA_2 = 2 \cdot \sphericalangle P_1OP_2 = \pi$, pa točke A , O i A_2 leže na istom pravcu okomitom na p . Kako je dalje $|OA| = |OA_1| = |OA_2|$, to je $|OA_2| = |OA'|$, što povlači $A' = A_2$. ■

KOROLAR 2. Osna simetrija prostora je izometrija. ■

Lako se vidi da su točke osi jedine fiksne točke osne simetrije, a fiksni pravci (osim p) su pravci prostora koji sijeku os i okomiti su na nju. Fiksne ravnine su sve ravnine okomite na os i sve ravnine koje sadrže os. Dokažite to.

4.6. Rotacije prostora oko pravca

Neka je p pravac i $T \in M_3$ bilo koja točka koja ne leži na p . Položimo točkom T ravnini $\alpha \perp p$. Neka je O probodište pravca p s α (sl. 160). Rotirajmo u α točku T oko O za kut φ u položaj T' . Preslikavanje $T \mapsto T'$ zove se **rotacija prostora oko p** za kut φ i označava sa r_p^φ , dakle je $r_p^\varphi(T) = T'$. Pravac p se zove **os rotacije**.



Sl. 160.

Očito su točke pravca p jedine fiksne točke rotacije r_p^φ , pravac p je jedini fiksni pravac, a ravnine okomite na p jedine fiksne ravnine.

PROPOZICIJA 11. *Svaka rotacija $r_p^\varphi : M_3 \rightarrow M_3$ je kompozicija od dva zrcakljenja na ravninama koje prolaze kroz os p i međusobno zatvaraju kut $\varphi/2$.*

Dokaz. Dokaz je neposredna posljedica definicije od r_p^φ , Teorema 5. 1. dio str. 187-i definicije rotacije za neki kut u 1. dijelu, str. 290. ■

KOROLAR 3. *Svaka rotacija prostora oko osi je izometrija.* ■

Primijetimo da se osna simetrija s_p prostora podudara s rotacijom r_p^π .

Nadalje očito sve rotacije oko iste osi čine komutativnu grupu obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.

U stereometriji se razmatraju još dvije važne izometrije. Jedna od njih je kompozicija $t_{\vec{a}} \circ s_\alpha$, gdje je \vec{a} vektor kojemu je smjer paralelan s ravninom α . Ovo preslikavanje zovemo **kliznom simetrijom**.

Drugo preslikavanje je kompozicija rotacije r_p^φ i translacije $t_{\vec{a}}$ za vektor \vec{a} kojemu je smjer paralelan s osi p . To se preslikavanje zove **zavojno gibanje**. Pravac p zove se **os zavojnoga gibanja**, a φ njegovim kutom.

4.7. Osnovni teorem o izometrijama

U ravnini je svaka izometrija kompozicija od najviše tri osne simetrije (osnovni teorem o izometrijama 1. dio, str. 185). Analogni teorem vrijedi i u prostoru.

PROPOZICIJA 12. (Osnovni teorem o izometrijama prostora.) *Svaka izometrija $f : M_3 \rightarrow M_3$ je kompozicija od najviše četiri planarne simetrije.*

Dokaz. Ako je $f = 1_{M_3}$, onda za svaku ravninu $\sigma \subset M_3$ vrijedi $s_\sigma \circ s_\sigma = 1_{M_3}$ (involutornost od s_σ), pa je $f = s_\sigma \circ s_\sigma$.

Ako je $f \neq 1_{M_3}$, onda postoji točka $A \in M_3$ takva da je $A' = f(A) \neq A$. Neka je α simetralna ravnina dužine $\overline{AA'}$. Tada izometrija $g_1 = s_\alpha \circ f$ ima svojstvo da je $g_1(A) = s_\alpha(f(A)) = s_\alpha(A') = A$.

Ako je $g_1 = 1_{M_3}$, onda $s_\alpha \circ f = 1_{M_3}$, a to povlači $f = s_\alpha$.

Ako je $g_1 \neq 1_{M_3}$, onda postoji točka $B \in M_3$ takva da je $B' = g_1(B) \neq B$. Kako je $g_1(A) = A$ to je $A \neq B$. Neka je β simetralna ravnina dužine $\overline{BB'}$. Promotrimo izometriju $g_2 = s_\beta \circ g_1$. Zbog $|AB| = |g_1(A)g_1(B)| = |AB'|$ je $A \in \beta$, pa je $g_2(A) = s_\beta(g_1(A)) = s_\beta(A) = A$. Dalje je $g_2(B) = s_\beta(g_1(B)) = s_\beta(B') = B$, pa je i točka B fiksna od g_2 .

Ako je $g_2 = 1_{M_3}$, onda je $s_\beta \circ g_1 = 1_{M_3}$, tj. $g_1 = s_\beta$, pa je $s_\beta = s_\alpha \circ f$ i $f = s_\alpha \circ s_\beta$. Ako je $g_2 \neq 1_{M_3}$, onda postoji točka $C \in M_3$ takva da je $C' = g_2(C) \neq C$. Očito je $C \neq A, B$ jer su A i B fiksne točke od g_2 i C ne leži na pravcu AB . Označimo sa γ ravninu ABC . Tada su A, B, C fiksne točke od s_γ . Stavimo $g_3 = s_\gamma \circ g_2$, pa su A, B, C fiksne točke i od g_3 .

Ako je $g_3 = 1_{M_3}$, onda je $s_\gamma \circ g_2 = 1_{M_3} \Rightarrow s_\gamma \circ s_\beta \circ g_1 = 1_{M_3} \Rightarrow s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha \circ f = 1_{M_3} \Rightarrow f = s_\alpha \circ s_\beta \circ s_\gamma$.

Ako je $g_3 \neq 1_{M_3}$, onda postoji točka $D \neq A, B, C$ takva da je $D' = g_3(D) \neq D$. Neka je δ simetralna ravnina dužine $\overline{DD'}$. Promotrimo izometriju $g_4 = s_\delta \circ g_3$. Iz $|AD| = |g_3(A)D'|$ slijedi $|AD| = |AD'|$, pa je $A \in \delta$, tj. A je fiksna točka od g_4 . Slično se vidi da su točke B i C , pa napokon i D , fiksne točke te izometrije. Prema Propoziciji 5 je $g_4 = 1_{M_3} \Rightarrow s_\delta \circ g_3 = 1_{M_3} \Rightarrow s_\delta \circ s_\gamma \circ g_2 = 1_{M_3} \Rightarrow s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ g_1 = 1_{M_3} \Rightarrow s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha \circ f = 1_{M_3}$, a odavde je $f = s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha$. ■

Primjer 6. Neka su α, β, γ tri različite međusobno paralelne ravnine. Dokažite da je $s_\alpha \circ s_\beta \circ s_\gamma$ planarna simetrija.

Rješenje. Kompozicija $s_\alpha \circ s_\beta$ je translacija $t_{\vec{a}}$ za vektor \vec{a} u smjeru okomitom na α i β . Odaberimo ravnine α' i β' paralelne s α tako da je njihova međusobna udaljenost jednaka $\frac{1}{2}|\vec{a}|$. Tada je $s_\alpha \circ s_\beta = s_{\alpha'} \circ s_{\beta'}$. Odaberemo li $\beta' = \gamma$, bit će $s_\alpha \circ s_\beta = s_{\alpha'} \circ s_\gamma$, pa konačno imamo da je $s_\alpha \circ s_\beta \circ s_\gamma = s_{\alpha'} \circ s_\gamma \circ s_\gamma = s_{\alpha'}$. ■

Primjer 7. Dokažite da je svaka izometrija prostora koja ima bar jednu fiksnu točku kompozicija od najviše tri planarne simetrije.

Rješenje. Ako je O ta fiksna točka, onda u dokazu Propozicije 12 uzmite upravo tu točku za jednu od fiksnihi točaka. Dokaz tvrdnje je tada doslovna kopija dokaza te propozicije. ■

4.8. Homotetije prostora

Homotetije prostora definiraju se sasvim analogno kao i homotetije ravnine (1. dio str. 291).

Preslikavanje $h : M_3 \rightarrow M_3$ je homotetija prostora M_3 s koeficijentom homotetije $k \neq 0$ i središtem $O \in M_3$, ako je $\overrightarrow{OT'} = k \cdot \overrightarrow{OT}$, gdje je $h(T) = T'$. Katkad se piše $h = h(O, k)$.

PROPOZICIJA 13. *Svaka homotetija prostora je bijekcija i preslikava bijektivno pravac na njemu paralelni pravac, dužinu na njoj paralelnu dužinu i ravninu na njoj paralelnu ravninu.*

Dokaz. Da je $h : M_3 \rightarrow M_3$ bijekcija i da preslikava pravac bijektivno na njemu paralelni pravac i dužinu na njoj paralelnu dužinu dokazuje se čistim prijepisom dokaza iz geometrije ravnine. U tom se, naime, dokazu koriste samo svojstva zbrajanja vektora i množenja sa skalarom, a ona su ista bez obzira radi li se o vektorima u ravnini ili u prostoru. Stoga se katkad i kaže da vektori ne poznaju dimenziju.

Preostaje vidjeti da h preslikava bijektivno ravninu α u njoj paralelnu ravninu α' . Neka je $h = h(O, k)$, $O \notin \alpha$ (ako je $O \in \alpha$, onda je $h(\alpha) = \alpha$ i tvrdnja je istinita) i $p_1, p_2 \in \alpha$ bilo koja dva pravca. Pravci $h(p_1)$ i $h(p_2)$ određuju tada ravninu α' . Kako je $p_i \parallel h(p_i)$, to je $\alpha \parallel \alpha'$. Da je svaka točka ravnine α' slika neke točke ravnine α je očito. ■

Primjer 8. Dokažite da sve homotetije prostora s istim središtem čine komutativnu grupu obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.

Rješenje. Neka su $h_i(O, k_i) : M_3 \rightarrow M_3$, $i = 1, 2$ homotetije. Za točku $T \in M_3$ stavimo $h_1(T) = T'$ i $h_2(T') = T''$, pa je $\overrightarrow{OT'} = k_1 \cdot \overrightarrow{OT}$, $\overrightarrow{OT''} = k_2 \cdot \overrightarrow{OT'}$. Tada je $\overrightarrow{OT''} = k_2 \cdot \overrightarrow{OT'} = k_2 \cdot k_1 \cdot \overrightarrow{OT}$, pa je $h_2 \circ h_1$ homotetija sa središtem O i koeficijentom $k_2 k_1$. Očito je $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$.

Jedinica u grupi je homotetija s koeficijentom 1, tj. $h(O, 1) = 1_{M_3}$.

Za $h(O, k)$ inverzno preslikavanje je $h\left(O, \frac{1}{k}\right)$ i vrijedi $h(O, k) \circ h\left(O, \frac{1}{k}\right) = h(O, 1) = 1_{M_3}$. Dakle, radi se o komutativnoj grupi. ■

Iz rješenja ovog primjera slijedi da je grupa homotetija prostora s istim središtem izomorfnu s multiplikativnom grupom $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Taj je izomorfizam dan sa $h(O, k) \mapsto k$.

Primijetimo da kompozicija homotetija s različitim središtima ne mora biti homotetija.

Primjer 9. Dokažite da je kompozicija homotetija $h_i(O_i, k_i)$, $i = 1, 2$ takva da je $O_1 \neq O_2$ i $k_1 \cdot k_2 = 1$ translacija.

Rješenje. Neka je $T \in M_3$ bilo koja točka i $T' = (h_2 \circ h_1)(T)$. Tada je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{TT'} &= \overrightarrow{TO_2} + \overrightarrow{O_2T'} = \overrightarrow{TO_2} + \overrightarrow{O_2h_2(h_1(T))} \\ &= \overrightarrow{TO_2} + k_2 \overrightarrow{O_2h_1(T)} = \overrightarrow{TO_2} + (\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1h_1(T)}) \\ &= \overrightarrow{TO_2} + k_2 \overrightarrow{O_2O_1} + k_2 k_1 \overrightarrow{O_1T}. \end{aligned}$$

Za $k_1 \cdot k_2 = 1$, odavde slijedi

$$\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{TO_2} + k_2 \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1T} = \overrightarrow{O_1O_2} + k_2 \overrightarrow{O_2O_1}$$

i konačno

$$\overrightarrow{TT'} = (1 - k_2) \overrightarrow{O_1O_2},$$

pa je $h_2 \circ h_1$ translacija za vektor $(1 - k_2) \overrightarrow{O_1O_2}$. ■

Primijetimo da je svaka homotetija prostora **konformno preslikavanje**, tj. ona čuva kutove među pravcima, među ravninama i kut pravca i ravnine. To je neposredna posljedica Propozicije 12. Posebno odavde slijedi da homotetija preslikava kocku na kocku, pravilni tetraedar na pravilni tetraedar itd.

Istim argumentima kao i u ravnini dokazuje se da homotetija preslikava sferu na sferu i za svake dvije sfere postoji homotetija koja jednu preslikava na drugu. Pokušajte sami dokazati te tvrdnje.

4.9. Preslikavanja sličnosti prostora

Preslikavanja sličnosti prostora uvode se formalno kao i u geometriji ravnine.

Preslikavanje $f : M_3 \rightarrow M_3$ je **preslikavanje sličnosti** (ili **ekviformno preslikavanje**) s koeficijentom sličnosti $k > 0$ ako za svake dvije točke $P, Q \in M_3$ vrijedi $|f(P)f(Q)| = k|PQ|$.

Mi ćemo umjesto preslikavanje sličnosti kraće govoriti naprosto sličnost.

Iz ove definicije, kao i u slučaju ravnine (1. dio, str. 293), ponavljanjem istih argumenata slijedi:

1. Sličnost s koeficijentom 1 je izometrija.
2. Homotetija $h(O, k)$ je sličnost s koeficijentom $|k|$.
3. Kompozicija homotetije $h(O, k)$ i izometrije je sličnost s koeficijentom $|k|$.
4. Svaka sličnost je kompozicija homotetije i izometrije.

5. Sve sličnosti prostora tvore grupu obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.

Znamo da u slučaju ravnine, sličnost preslikava pravce na pravce, a kružnice na kružnice. Isto tako vrijedi i obrat, tj. svaka bijekcija s tim svojstvom jest sličnost. Analogno vrijedi i u prostoru. Naime, svaka bijekcija prostora koja preslikava ravnine na ravnine, a sfere na sfere jest sličnost prostora.

4.10. Inverzija i stereografska projekcija

Inverzija u prostoru definira se analogno kao i inverzija u ravnini (1. dio, str. 297).

Neka je $O \in M_3$ čvrsta točka i $R > 0$ zadani broj. Preslikavanje $\mathcal{I}_O^R : M_3 \setminus \{O\} \rightarrow M_3 \setminus \{O\}$, $T \mapsto T' = \mathcal{I}_O^R(T)$ zove se **inverzija s centrom O i polumjerom R** ako su točke O, T, T' kolinearne, T i T' s iste strane točke O i ako je $|OT| \cdot |OT'| = R^2$. Sfera s centrom u O polumjera R zove se **sfera inverzije \mathcal{I}_O^R** . Još se kaže da se radi o inverziji obzirom na tu sferu.

Sva svojstva koja ima inverzija u ravnini ima i inverzija u prostoru. Provjerite!

Nova svojstva dana su ovim propozicijama:

PROPOZICIJA 14. *Inverzija preslikava ravninu α , koja ne prolazi centrom inverzije O u sferu koja prolazi centrom O .*

Dokaz. Neka je N nožište okomice spuštene iz O na α i N' inverzna slika točke N obzirom na sferu $\Sigma^2(O, R)$. Ako je $T \in \alpha$ bilo koja točka, onda je restrikcija inverzije \mathcal{I}_O na ravninu ONT inverzija u toj ravnini, pa slika T' točke T leži na onoj kružnici te ravnine kojoj je $\overline{ON'}$ dijametar. Sve točke pravca TN preslikavaju se na tu kružnicu. Dakle je slika ravnine α skup svih kružnica kojoj je $\overline{ON'}$ dijametar, pa je $\mathcal{I}_O(\alpha)$ sfera dijametra $\overline{ON'}$. ■

Kako je inverzija \mathcal{I}_O involutorno preslikavanje, to slijedi

KOROLAR 4. Slika sfere koja prolazi centrom inverzije je ravnina koja ne prolazi tim centrom. ■

Slično se dokazuje:

PROPOZICIJA 15. Slika sfere koja ne prolazi centrom inverzije je sfera koja također ne prolazi tim centrom. ■

PROPOZICIJA 16. Ako je sfera Σ_2 inverzna slika sfere Σ_1 , onda je centar homotetičnosti tih sfera ujedno i centar inverzije koja Σ_1 preslikava na Σ_2 . ■

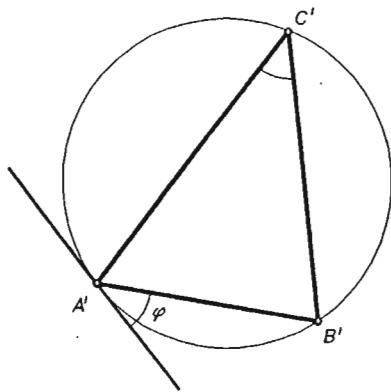
Analogno kao u ravnini (prvi dio, str. 300) vrijedi:

PROPOZICIJA 17. Inverzije prostora su konformna preslikavanja. ■

Primjenu inverzije prostora ilustrirajmo na primjerima.

Primjer 10. Dokažite da je kut što ga zatvaraju kružnice opisane dvjema stranama tetraedra jednak kutu kružnica opisanim preostalim stranama.

Rješenje. Neka je \mathcal{I}_D inverzija s centrom u vrhu D tetraedra $ABCD$. Kružnice opisane stranama DAB , DAC i DBC preslikavaju se tom inverzijom redom u pravce $A'B'$, $A'C'$ i $B'C'$, a kružnica opisana strani ABC u kružnicu k opisanu trokutu $\Delta A'B'C'$. Kako inverzija čuva kutove, dovoljno je dokazati da je kut φ pravca $A'B'$ i kružnice k jednak kutu pravaca $A'C'$ i $B'C'$ (sl. 161), a to je istina prema poučku o kutu tetive i tangente, tj. $\angle A'C'B' = \varphi$. ■



Sl. 161.

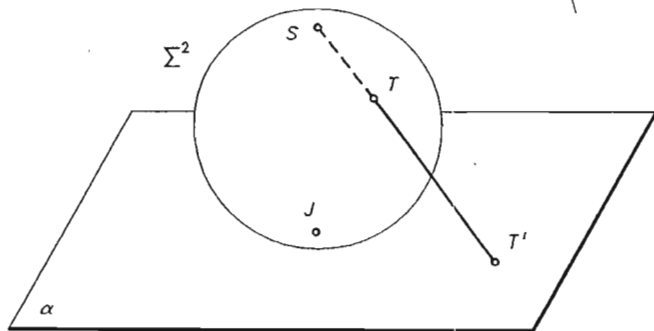
Primjer 11. Zadana je sfera Σ^2 , kružnica k na njoj i točka T van sfere. Dokažite da se prodorna krivulja sfere Σ^2 i konusa s vrhom u T , kojemu je k kružnica osnovke, raspada na dvije kružnice.

Rješenje. Prodornom krivuljom dviju ploha zovemo skup zajedničkih točaka tih dviju ploha. U našem slučaju k je dio prodorne krivulje. Povucimo točkom T pravac koji siječe sferu Σ^2 u točkama T_1 i T_2 . Tada $|TT_1| \cdot |TT_2|$ ne ovisi o izboru pravca. Da se u to uvjerimo dovoljno je tim pravcem i središtem sfere položiti ravninu. Ona siječe Σ^2 u kružnici, pa je $|TT_1| \cdot |TT_2|$ potencija točke obzirom na tu kružnicu. Kako sve ravnine kroz središte sfere sijeku sferu u kružnicama istog polumjera to zaista navedeni umnožak ne ovisi o izboru pravca kroz T . Broj $|TT_1| \cdot |TT_2| = R^2$ zove se potencija točke T obzirom na sferu.

Promotrimo inverziju I_T s polumjerom $|R|$. Tada je $I_T(T_1) = T_2$. Ako je $T_1 \in k$ zaključujemo da je $I_T(k) = k'$, gdje je k' kružnica. ■

Za crtanje geografskih karata često se primjenjuje jedno posebno preslikavanje sfere na ravninu, koju zovemo stereografskom projekcijom.

Neka je α ravnina i Σ^2 sfera koja u točki južnog pola J dira α (sl. 162). Točku $T \in \Sigma^2 \setminus \{S\}$, gdje je S sjeverni pol, spojimo sa T i označimo sa T' probodište



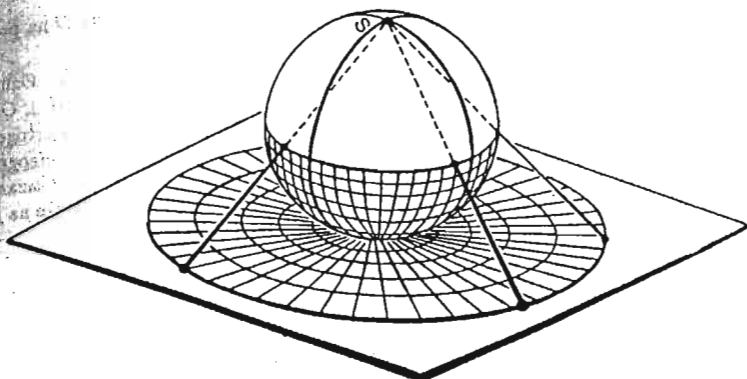
Sl. 162.

pravca ST sa α . Preslikavanje $\sigma : \Sigma^2 \setminus \{S\} \rightarrow \alpha$ definirano sa $T' = \sigma(T)$ zovemo stereografskom projekcijom sfere na ravninu.

Stereografskom projekcijom se paralele i meridijani preslikavaju redom u kružnice s centrom u J i pravce kroz J (v. sl. 163). I to preslikavanje je konformno.

Razabiremo da je stereografska projekcija iz sjevernog pola pogodna za predočavanje onih područja Zemljine kugle koja su bliže južnom polu. Za druga područja se koristi stereografska projekcija iz južnog pola ili iz neke druge točke.

Uzmimo sada inverziju s centrom u S i polumjerom koji je jednak dijametru sfere Σ^2 . Ta inverzija preslikava Σ^2 upravo u ravninu α , pa se stereografska projekcija podudara s tom inverzijom. Slijedi da stereografska projekcija ima ista svojstva kao i inverzija. Ona će, dakle, kružnice na sferi preslikati na kružnice u ravnini.



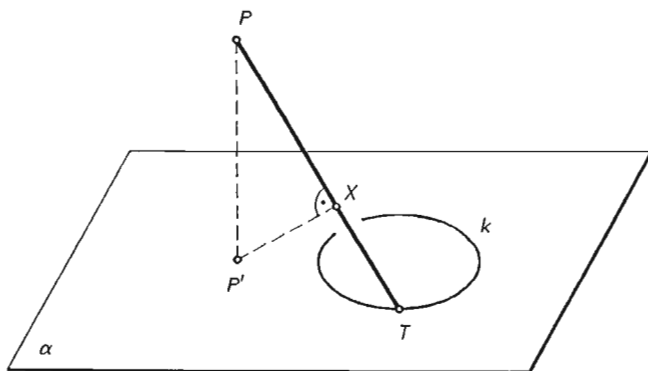
Sl. 163.

Kako je, osim toga, inverzija konformno preslikavanje to je takva i stereografska projekcija. Dakle, kut dviju krivulja na Zemljinoj kugli jednak je kutu između stereografskih projekcija tih krivulja na karti. Što se tiče površina ili udaljenosti, one se mogu silno izmijeniti. Dakle stereografska projekcija važna je ako nas zanima karta, na kojoj su vjerno ucrtani kutovi između svih smjerova.

Primjer 12. Zadana je točka $P \in M_3$, ravnina α , kružnica $k \subset \alpha$, $P \notin \alpha$. Neka je P' ortogonalna projekcija točke P na α , $T \in k$ bilo koja točka i X nožište okomice spuštene iz točke P' na pravac PT . Dokažite da je skup $\bigcup_{T \in k} \{X\}$ kružnica.

Rješenje. Kako je $\sphericalangle P'XP = 90^\circ$ to X leži na sferi dijametra $\overline{PP'}$ (sl. 164). Stoga je T slika točke X pri stereografskoj projekciji te sfere iz točke P na ravninu α . Kako se stereografskom projekcijom kružnice na sferi preslikavaju na kružnice u α i obrnuto, to je tvrdnja dokazana. ■

Primjer 13. Zadana je piramida $SABCD$, čija je osnovka konveksni četverokut $ABCD$ s okomitim dijagonalama, a ravnina osnovke je okomita na pravac SO , gdje je O



Sl. 164.

sjecište dijagonala osnovke. Dokažite da nožišta okomica spuštenih iz točke O na pobočke piramide leže na jednoj kružnici.

Rješenje. Neka je A' nožište okomice spuštene iz O na pobočku SAB . Označimo sa A_1 sjecište pravaca AB i SA' (nacrtajte sliku). Kako je $AB \perp OS$ i $AB \perp OA'$, to je ravnina SOA' okomita na pravac AB i stoga je $OA_1 \perp AB$. Dakle, A_1 je ortogonalna projekcija točke O na brid \overline{AB} . Nadalje, A_1 je ujedno i slika točke A' pri stereografskoj projekciji sfere dijametra \overline{SO} na ravninu osnovke. Prema tome, sve će biti dokazano ako dokažemo da ortogonalne projekcije točke O na stranice četverokuta $ABCD$ leže na jednoj kružnici, a to nije teško dokazati. ■

§ 5. Poliedri

5.1. Pojam poliedra

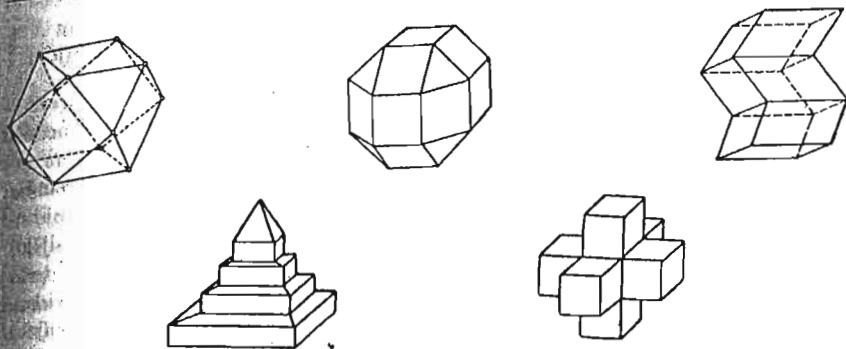
Što su za planimetriju poligoni, to su za stereometriju poliedri. Ni pojam poligona nije bilo sasvim lagano definirati, pa je jasno da je s poliedrima još teže. U stereometriji se proučavaju skupovi točaka u prostoru³ \mathbb{R}^3 koji su poput fizičkih tijela, pa se obično i nazivaju tijelima. Intuitivno govoreći, tijelo je dio prostora omeđen rubnom plohom, kao npr. kugla omeđena kuglinom plohom, tj. sferom. No, za preciznu definiciju tijela, pa onda i poliedra, podsjetimo prvo na neke pojmove iz topologije.

Podskup $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je **otvoren**, ako zajedno sa svakom točkom sadrži i neku kuglu oko te točke. **Zatvoreni** skup je komplement otvorenoga. Ekvivalentno, skup je zatvoren ako sadrži sve svoje rubne točke. **Rubna točka** skupa $S \subseteq \mathbb{R}^3$ je točka sa svojstvom da svaka kugla s centrom u toj točki siječe S i komplement $\mathbb{R}^3 \setminus S$. Skup svih rubnih točaka od S se zove **rub** od S i označava sa ∂S . **Unutrašnjost (nutrina)** ili **interior** $\text{Int } S$ skupa S je najveći otvoreni skup koji je sadržan u S (ili ekvivalentno, to je unija svih otvorenih kugala koje su sadržane u S). Skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$ je **omeđen** ako je sadržan u nekoj (velikoj) kugli. **Kompaktan skup** u \mathbb{R}^3 je onaj koji je omeđen i zatvoren. Skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$ je **lukovima povezan** (kratko ćemo reći **povezan**), ako za svake dvije točke u S postoji luk sadržan u S čiji je početak u jednoj, a kraj u drugoj točki. Podsjetimo da je **luk** homeomorfna slika segmenta.

Tijelo u prostoru \mathbb{R}^3 je kompaktan, povezan skup s nepraznim interiorom. Posebno važna vrsta tijela su poliedri. Grubo govoreći, poliedar je tijelo čiji rub čini konačno mnogo poligona, odnosno to su "uglasta tijela". Na sl. 165 primjeri su nekih poliedara.

Poliedar je tijelo čiji je interior povezan, a rub mu je povezan skup koji se sastoji od konačno mnogo (ravninskih jednostavnih) poligona, pri čemu se svaka

³ Ovdje za prostor M_3 koristimo oznaku \mathbb{R}^3 imajući u vidu topološku strukturu tog prostora.



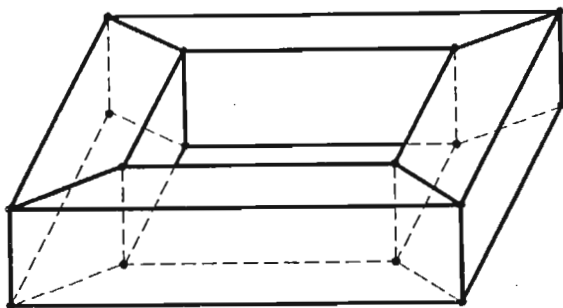
Sl. 165.

dva od tih poligona ili ne sijeku ili imaju samo jedan zajednički vrh ili samo jednu zajedničku stranicu, a svaka stranica nekog od tih poligona je zajednička stranica točno dvaju od tih poligona. Unija svih tih poligona zove se **rubna ploha** ili **rub poliedra**. Na sl. 165 nacrtano je nekoliko poliedara.

Tako smo, dakle, već u ovoj definiciji uklonili "samopresječne poliedre", pa one kojima rubna ploha nije povezana (npr. kocka iz čije je unutrašnjosti odstranjena manja otvorena kocka), ili takve anomalije poput dviju piramida sa zajedničkim vrhom itd. Ipak, kada ćemo kasnije proučavati volumene, onda ćemo i te "anomalije" smatrati poliedrima u širem smislu (tj. to će biti unija od konačno mnogo tetraedara s disjunktним nutrinama).

Svaki se poligon rubne plohe poliedra zove **strana poliedra**, stranica svakog od tih poligona zove se **brid poliedra**, a vrh svakog od tih poligona zove se **vrh poliedra**. Tako, na primjer, poliedar na sl. 166 ("poliedarski torus") ima 16 vrhova, 32 brida i 16 strana.

Poliedar čija je rubna ploha homeomorfna sferi zove se **jednostavnim poliedrom** a njegova rubna ploha **poliedarska sfera**. Za jednostavne poliedre vrijedi prostorni analogon Jordanovog Teorema (prvi dio, str. 231).



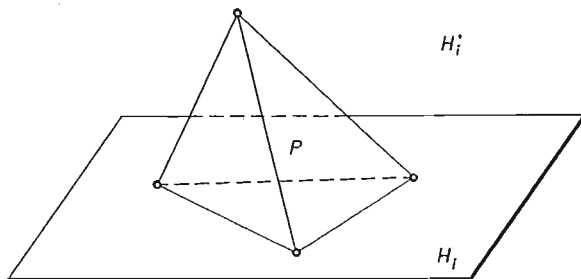
Sl. 166.

TEOREM 1. (Prostorni Jordanov teorem). *Svaka poliedarska sfera S u prostoru rastavlja prostor na točno dva područja koja zovemo unutrašnjost i vanjšina poliedarske sfere S .*

Unutrašnjost $\text{Int } S$ poliedarske sfere S je omeđeni skup, a vanjšina neomeđeni skup točaka u prostoru. Dakle, jednostavni poliedar je unija poliedarske sfere zajedno s njenom unutrašnjošću. Katkad se poliedar u širem smislu definira kao unija od konačno mnogo poliedarskih sfera (zajedno s njihovim unutrašnjostima koje su u parovima disjunktne), tako da su svake dvije od njih ili disjunktne ili se sijeku u zajedničkom vrhu ili duž zajedničkog brida ili u zajedničkoj strani (koja se tada ne smatra stranom poliedra). U tom širem smislu se onda dopuštaju slučajevi kao dvije piramide s jednim zajedničkom vrhom, kocka iz koje izbacimo unutrašnjost kocke koja je čitava u unutrašnjosti prve (ovdje rub nije povezan) itd. Dakako, to su primjeri nejednostavnih poliedara.

Najvažnija vrsta poliedara su konveksni poliedri. Poliedar je **konveksan** ako se čitav nalazi s iste strane ravnine svakog poligona njegovog ruba. Naredni teorem daje karakterizaciju konveksnih poliedara.

TEOREM 2. (Weyl⁴–Minkowski⁵). *Skup $P \subset \mathbb{R}^3$ je konveksni poliedar ako i samo ako je konveksna ljuska od konačno mnogo točaka. Te točke su vrhovi tog poliedra. Nadalje, konveksni poliedar P je presjek poluprostora određenih s njegovim stranama (sl. 167), tj. $P = \bigcap_{i=1}^n H_i^+$.*



Sl. 167.

Očito je konveksni poliedar jednostavni i očito je svaka strana konveksnog poliedra konveksni poligon.

⁴Hermann Weyl (1885 – 1955), njemački matematičar. Od 1933. djelovao u SAD.

⁵Hermann Minkowski (1864 – 1909), njemački matematičar i fizičar.

5.2. Neke vrste poliedara. Piramide, bipyramide i prizme

Najjednostavniji poliedar je **tetraedar**. To je konveksna ljuska od četiri točke koje ne leže u istoj ravnini. Rub tetraedra čine četiri trokuta. Tetraedar se katkad zove i **3-dimenzionalni simpleks**. (Točka je 0-dimenzionalni simpleks, dužina 1-dimenzionalni simpleks, a trokut je 2-dimenzionalni simpleks). Tetraedar ima četiri vrha, šest bridova i četiri strane (trokuta).

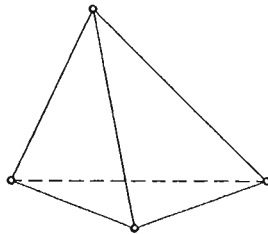
Piramida je konveksna ljuska (ravninskog) poligona i točke izvan ravnine. Taj poligon se zove **baza** ili **osnovka piramide**, a ta točka **vrh piramide**. **Visina piramide** je udaljenost od vrha do baze (katkad se visina zove i dužina \overline{VN} , gdje je V vrh, a N nožište okomice iz V na ravninu osnovke). Ako je baza n -terokut, onda se piramida zove **n -strana piramida**. **Bipiramida** (ili **dvostruka piramida**) ima također bazu (osnovku) i dva vrha s raznih strana ravnine osnovke. Piramida s vrhom V i bazom B je zapravo unija svih dužina s jednim krajem V , a drugim u bazi B , tj. to je $\cup\{\overline{VX} | X \in B\}$. Piramida je, dakle, konus nad svojom osnovkom. Svaka dužina \overline{VA} , gdje je A vrh osnovke zove se **pobočni brid** ili **izvodnica piramide**, a svaki trokut $\triangle VAB$, gdje su A i B dva susjedna vrha baze, zove se **pobočka** ili **pobočna strana** piramide. Unija pobočki se zove **plašt piramide**. Trostrana piramida je naprosto tetraedar. Disjunktni bridovi tetraedra se katkad zovu **nasuprotni bridovi** tetraedra. Očito imamo tri para nasuprotnih bridova tetraedra. Tetraedar je **pravilni** ako su mu sve strane sukladni jednakostranični trokuti (pa stoga i svi bridovi jednake duljine). Ako je baza piramide konveksni poligon, onda je piramida s tom bazom konveksni poliedar (dokažite to!).

Piramida je **pravilna** ako joj je baza pravilni poligon, a visina prolazi centrom baze. **Krnja piramida** je poliedar oblika $P \setminus P'$, gdje su P i P' piramide sa zajedničkim vrhom V i bazama (osnovkama) B i B' , pri čemu je B' presjek piramide P ravninom paralelnom s ravninom od B . Udaljenost tih ravnina je **visina krnje piramide**.

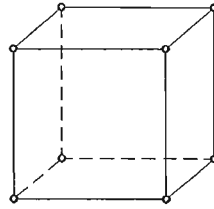
Prizma je poliedar koji je unija svih dužina koje spajaju pojedine točke nekog poligona s odgovarajućim točkama njegovog translata za neki vektor \vec{a} koji ne leži u ravnini tog poligona; točnije, to je $\cup\{\overline{XX'} | X \in B\}$, gdje je $\overline{XX'} = \vec{a}$. Taj poligon i njegov translat zovu se **baze** (ili **osnovke**) **prizme**, a dužine koje spajaju odgovarajuće vrhove zovu se **pobočni bridovi prizme**.

Translacija je izometrija pa su stoga osnovke prizme sukladne, a kako translacija prevodi ravninu u paralelnu ravninu, to su ravnine osnovaka prizme paralelne. Isto tako, zbog svojstava translacije, očito su pobočni bridovi prizme paralelni i jednake duljine. Rubna ploha prizme sastoji se, dakle, od dvaju paralelnih poligona — osnovaka i pobočki (ili **pobočnih strana**) koje su paralelogrami. Svaki od tih pobočnih paralelograma ima za dvije nasuprotne stranice susjedne pobočne bridove, a druge dvije su pripadne stranice osnovaka. **Plašt** prizme je unija njenih pobočki. **Visina prizme** je udaljenost među ravninama osnovaka. Dužina koja spaja dva vrha prizme a koji ne leže na istoj pobočki prizme zove se **dijagonala prizme**. Ako je baza n -terokut, prizma se zove **n -terostrana prizma**. Ako su pobočke (odnosno pobočni bridovi) okomiti na osnovku, prizma se zove **uspravna**.

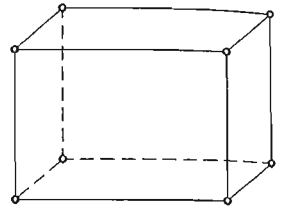
Prizma je **pravilna**, ako je uspravna, a osnovke su joj pravilni poligoni. Ako je baza četverostrane prizme paralelogram, onda se ona zove **paralelepiped**. Ako je paralelepiped uspravan, a baza mu je pravokutnik, onda se to zove **kvadar**, a ako je baza kvadra kvadrat, a duljina pobočnog brida jednaka duljini stranice osnovke, onda se takav kvadar zove **kocka** (ili **kub**). Duljine svih bridova kocke su jednake



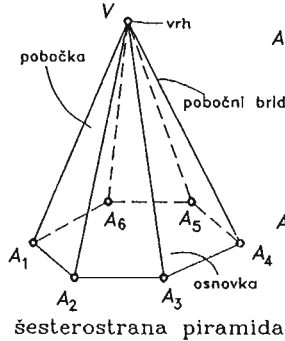
Trostrana piramida
(tetraedar)



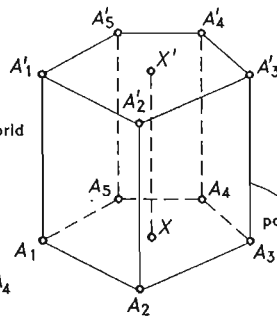
Kocka



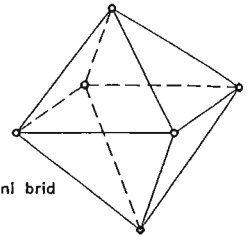
Kvadar



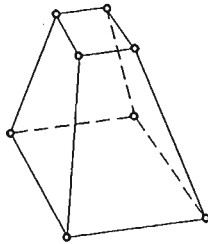
šesterostrana piramida



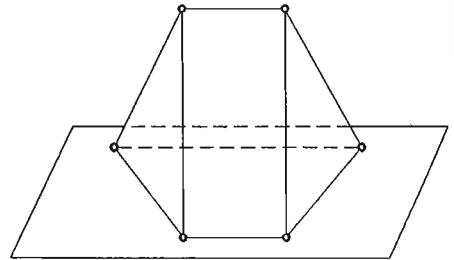
šesterostrana prizma



četverostrana bipiramida
(oktaedar)



krnja (četverostrana)
piramida



klin

Sl. 168.

Prizme, piramide i krnje piramide pripadaju klasi poliedara koji se zovu prizmatoidi. **Prizmatoid** je poliedar koji ima dvije strane – osnovke – koje mogu biti bilo koji poligoni, a leže u paralelnim ravninama, a sve ostale strane su trokuti ili četverokuti, a vrhovi svakog od njih leže u obje osnovke. Osnovka može biti i točka,

tada je piramida, a ako je jedna osnovka četverokut, a druga dužina, onda je to tzv. klin. Primjeri svih navedenih poliedara su na sl. 168.

Primjer 1. Postoji li konveksni poliedar s točno $n \geq 4$ vrhova, kojemu je svaka strana trokut?

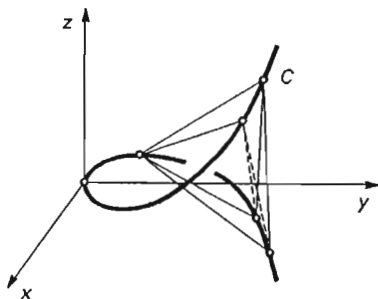
Rješenje. Postoji. Jedna konstrukcija takvog poliedra je sljedeća. Uzmimo u 3-dimenzionalnom koordinatnom sustavu $Oxyz$ krivulju na kojoj koordinate svake točke ovise o parametru t ovako $x = x(t) = t$, $y = y(t) = t^2$, $z = z(t) = t^3$. Na toj krivulji C (tzv. "vremenska krivulja") uzmimo n točaka s vrijednostima parametra $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, tj. neka je $A_i = (t_i, t_i^2, t_i^3)$, $i = 1, 2, \dots, n$ te neka je P konveksna ljska tih točaka, tj. $P = \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ (sl. 169)).

Pokažimo da su vrhovi poliedra P u općem položaju. U tu svrhu uzmimo bilo koja četiri vrha s parametrima $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Da se ustanovi jesu li te točke komplanarne, treba promotriti determinantu (pogl. VI, Analitička geometrija):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 & t_4^3 \end{vmatrix}.$$

Vrijednost te determinante (tzv. Vandermondeova⁶ determinanta) je jednaka $\Delta = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_4 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3) = \prod_{i < j} (t_j - t_i)$, pa je zbog $t_i \neq t_j$ za $i \neq j$ ta determinanta $\Delta \neq 0$. Stoga su svaka četiri vrha od P nekomplanarna i zato su sve strane od P trokuti.

Poliedar P se zove ciklički poliedar, a prvi ga je promatrao C. Carathéodory⁷ 1907. g. Napomenimo da se konveksni poliedar čije su sve strane trokuti zove simplicijalni poliedar. ■



Sl. 169.

Primjer 2. a) Dokažite da konveksni poliedar ne može imati točno sedam bridova.

b) Dokažite da za svako $n \geq 6$, $n \neq 7$, postoji konveksni poliedar s točno n bridova.

Rješenje. a) Pretpostavimo da takav poliedar postoji. Uzmimo prvo da je on simplicijalni, tj. sve strane su mu trokuti i neka ih je s . Tada je očito broj bridova jednak

⁶ Alexandre Vandermonde (1735 - 1796), francuski matematičar.

⁷ Constantin Carathéodory (1873 - 1950), njemački matematičar.

$3s/2$, pa je broj bridova djeljiv brojem 3, a broj 7 to nije. Ako pak poliedar ima stranu s brojem bridova > 3 , onda iz svakog od (barem) četiri vrha izlazi još barem jedan brid, pa je ukupni broj bridova ≥ 8 .

b) Neka je $n \geq 3$. Tada n -strana piramida (baza je n -terokut) ima $2n$ bridova. Ako od n -strane piramide odsiječemo pri svakom od vrhova baze malu trostranu piramidu dobijemo konveksni poliedar s $2n + 3$ brida. ■

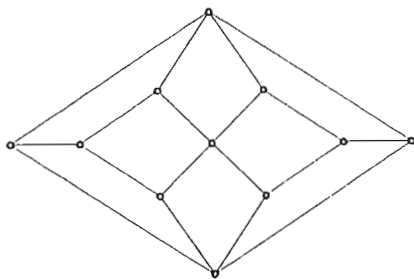
Primjer 3. Postoji li konveksni poliedar omeđen s točno 9 četverokuta?

Rješenje. Postoji. Da pojasnimo o kojem se poliedru radi, nacrtat ćemo tzv. graf poliedra, tj. njegove vrhove i bridove.

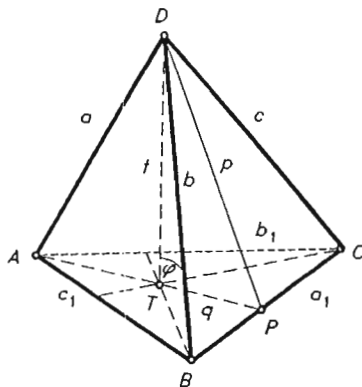
Sada zamislimo da je taj graf sačinjen od užeta. Uхватimo ga za središnji vrh i "objesimo" ga. Tada vanjski vrhovi čine bazu (sl. 170). ■

Primjer 4. a) Težišnica tetraedra je dužina koja spaja vrh tetraedra s težištem nasuprotne strane (trokuta). Izrazite duljinu težišnice tetraedra pomoću duljina bridova tetraedra.

b) Dokažite da je suma kvadrata duljina težišnica tetraedra jednaka $4/9$ sume kvadrata duljina bridova.



Sl. 170.



Sl. 171.

Rješenje. a) Neka je $ABCD$ tetraedar i neka su mu duljine bridova a, b, c, a_1, b_1, c_1 kao na sl. 171. Izračunajmo duljinu t težišnice \overline{DT} (T je težište trokuta $\triangle ABC$). Neka je P polovište od \overline{BC} i neka je $p = |DP|$, $q = |AP|$. Iz kosinusnog poučka za $\triangle DTP$ i $\triangle DTA$ imamo

$$\begin{aligned} |DT|^2 + |TP|^2 - 2|DT||TP|\cos \varphi &= |DP|^2 \\ |DT|^2 + |TA|^2 - 2|DT||TA|\cos \varphi &= |DA|^2, \end{aligned}$$

odnosno

$$t^2 + \frac{q^2}{9} - \frac{2tq \cos \varphi}{3} = p^2 \quad \text{i} \quad t^2 + \frac{4q^2}{9} + \frac{4tq \cos \varphi}{3} = a^2.$$

Pomnožimo li prvu jednakost sa 2 i zbrojimo s drugom, dobivamo $3t^2 = a^2 + 2p^2 - 2q^2/3$. Kako je $p^2 = (2b^2 + 2c^2 - a_1^2)/4$ i $q^2 = (2b_1^2 + 2c_1^2 - a_1^2)/4$ (dokažite to sami koristeći npr. skalarni produkt), dobivamo da je $9t^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2$.

b) Tvrdnja slijedi zbrajanjem svih analognih formula onima u tvrdnji a). ■

Primjer 5. Neka su X_1, X_2, \dots, X_n točke u prostoru i u svakoj točki X_i neka je smještena masa m_i , tj. promotrimo n -torku $(X_1, m_1), \dots, (X_n, m_n)$ točaka i brojeva pri čemu je $m_1 + \dots + m_n \neq 0$. Centar masa ili baricentar tog sustava je točka O za koju je $m_1 \overrightarrow{OX_1} + \dots + m_n \overrightarrow{OX_n} = \vec{0}$.

a) Dokazite da centar masa postoji i da je jedinstven te da za bilo koju točku X vrijedi

$$\overrightarrow{XO} = \frac{1}{m_1 + \dots + m_n} (m_1 \overrightarrow{XX_1} + \dots + m_n \overrightarrow{XX_n}). \quad (*)$$

b) Dokazite da se centar masa sustava $(X_1, a_1), \dots, (X_n, a_n), (Y_1, b_1), \dots, (Y_m, b_m)$ podudara s centrom masa sustava dviju točaka s masama $(X, a_1 + \dots + a_n)$ i $(Y, b_1 + \dots + b_m)$, gdje je X centar masa od $(X_1, a_1), \dots, (X_n, a_n)$, a Y centar masa od $(Y_1, b_1), \dots, (Y_m, b_m)$.

Rješenje. a) Neka su O i X bilo koje točke u prostoru. Tada je $m_1 \overrightarrow{OX_1} + \dots + m_n \overrightarrow{OX_n} = (m_1 + \dots + m_n) \overrightarrow{OX} + m_1 \overrightarrow{XX_1} + \dots + m_n \overrightarrow{XX_n}$. Stoga je O centar masa našeg sustava točaka s masama ako i samo ako je $(m_1 + \dots + m_n) \overrightarrow{OX} + m_1 \overrightarrow{XX_1} + \dots + m_n \overrightarrow{XX_n} = \vec{0}$, tj. ako i samo ako vrijedi formula (*). Odatle jasno slijede sve tvrdnje iz a).

b) Neka je Z bilo koja točka u prostoru, $a = a_1 + \dots + a_n$, $b = b_1 + \dots + b_m$. Tada je $\overrightarrow{ZX} = \frac{1}{a} (a_1 \overrightarrow{ZX_1} + \dots + a_n \overrightarrow{ZX_n})$ i $\overrightarrow{ZY} = \frac{1}{b} (b_1 \overrightarrow{ZY_1} + \dots + b_m \overrightarrow{ZY_m})$. Neka je O centar masa sustava (X, a) i (Y, b) . Tada je $\overrightarrow{ZO} = \frac{1}{a+b} (a \overrightarrow{ZX} + b \overrightarrow{ZY}) = \frac{1}{a+b} (a_1 \overrightarrow{ZX_1} + \dots + a_n \overrightarrow{ZX_n} + b_1 \overrightarrow{ZY_1} + \dots + b_m \overrightarrow{ZY_m})$, pa je zato O centar masa sustava $(X_1, a_1), \dots, (X_n, a_n), (Y_1, b_1), \dots, (Y_m, b_m)$. ■

Primjer 6. a) U tetraedru spojimo svaki vrh s težištem nasuprotnog trokuta, tj. promotrimo težišnice tetraedra. Dokazite da se težišnice tetraedra sijeku u jednoj točki koja se zove težište tetraedra i da to težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 3 : 1, računajući od vrha.

b) Promotrimo spojnice polovišta nasuprotnih bridova tetraedra. Dokazite da se te spojnice sijeku, i to baš u težištu tetraedra te da ih težište raspolavlja.

Rješenje. a) U vrhove tetraedra smjestimo jedinične mase. Prema prethodnom primjeru (tvrdnja b)) centar masa tog sustava se nalazi na dužini koja spaja jedan vrh s centrom masa vrhova nasuprotnog trokuta i taj centar masa dijeli tu dužinu u omjeru 3 : 1 (računajući od vrha). Zbog toga se sve težišnice tetraedra sijeku u jednoj točki koja je centar masa vrhova s jediničnim masama.

b) Centar masa vrhova tetraedra s jediničnim masama također leži na dužini koja spaja centar masa nasuprotnih bridova (tj. njihovih polovišta) i taj centar masa raspolavlja te dužine. ■

Primjer 7. Dokazite da oko tetraedra postoji opisana sfera, tj. postoji (jedinstvena) sfera koja prolazi svim vrhovima. (Katkad se, umjesto o sferi, govori o opisanoj kugli tetraedra).

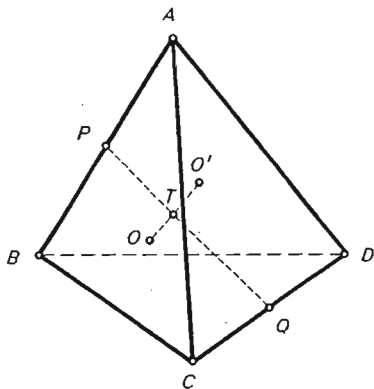
Rješenje. Neka je $ABCD$ tetraedar i neka je M_{AB} ravnina koja prolazi polovištem brida AB i okomita je na pravac AB . Tada je svaka točka te ravnine jednako udaljena od krajeva A i B . Analogno definiramo i ostale ravnine. Neka je $O = M_{AB} \cap M_{BC} \cap M_{CD}$. Tada je točka O jednako udaljena od sva četiri vrha A, B, C, D , i to je središte opisane sfere tom tetraedru. ■

Primjer 8. a) Polovištem svakog brida tetraedra povučena je ravnina okomita na nasuprotni brid. Dokažite da se svih šest takvih ravnina sijeku u jednoj točki. To je tzv. Mongeova⁸ točka tetraedra.

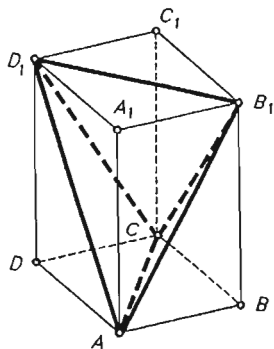
b) Ako Mongeova točka tetraedra leži u ravnini neke strane tetraedra, dokažite da nožište visine tetraedra spuštene na tu stranu leži na opisanoj kružnici te strane.

Rješenje. Neka su P i Q polovišta nasuprotnih bridova \overline{AB} i \overline{CD} tetraedra $ABCD$ (sl. 172). Neka je, nadalje, T težište tetraedra, O centar opisane sfere, a O' simetrična točka od O obzirom na T . Kako je T polovište dužine \overline{PQ} (Primjer 6 b)), to je $O'P \parallel OQ$. No dužina $OQ \perp CD$, pa je stoga $O'P \perp CD$. Zato točka O' leži u ravnini koja prolazi polovištem P a okomita je na brid \overline{CD} . Stoga i svih šest ravnina prolazi točkom O' . To je Mongeova točka. (sl. 172).

b) Neka Mongeova točka O' leži u ravnini strane ABC . Točkom D povucimo ravninu $M \parallel ABC$. Kako je središte O opisane sfere tetraedra simetrično točki O' obzirom na težište T , a težište T dijeli težišnicu iz D u omjeru 3 : 1, slijedi da je točka O jednako udaljena od ravnina M i ABC . Sada tvrdnja proizlazi iz sljedeće činjenice. Ako je središte sfere jednako udaljeno od dvije presječne ravnine sfere, onda se projekcija jedne presječne kružnice podudara s drugom presječnom kružnicom. ■



Sl. 172.



Sl. 173.

Primjer 9. Da li se u svakom tetraedru pravci visina nužno sijeku u jednoj točki?

Rješenje. Ne nužno. Neka je, npr., $\triangle ABC$ trokut u kojem je kut $\alpha \neq 90^\circ$. U vrhu A podignimo normalu AD na ravninu ABC . Tada se u tetraedru $ABCD$ visine iz vrhova C i D ne sijeku. Tetraedar u kojem se sve visine sijeku zove se **ortocentrički**. ■

Uz dani tetraedar vezan je tzv. **dopunjeni paralelepiped**, koji se dobiva tako da se svakim bridom položi ravnina paralelna nasuprotnom bridu (sl. 173). Posebno, dopunjeni paralelepiped pravilnog tetraedra je očito kocka.

Primjer 10. Dokažite da su sve strane tetraedra sukladne ako i samo ako vrijedi jedno od sljedećih uvjeta:

a) Dopunjeni paralelepiped tetraedra je kvadar;

⁸Gaspard Monge (1746 – 1818), francuski matematičar. Utemeljitelj nacrtne geometrije, a zajedno s Gaussom i diferencijalne geometrije.

- b) Spojnice polovišta nasuprotnih bridova tetraedra su okomite;
- c) Površine svih strana tetraedra su jednake;
- d) Težište i centar upisane sfere tetraedra se podudaraju (upisana sfera tetraedra je sfera koja dira sve strane).

Rješenje. a) Dijagonale nasuprotnih strana dopunjenog paralelepipeda tetraedra su dva nasuprotna brida tetraedra. Te strane su pravokutnici ako i samo ako su duljine nasuprotnih bridova jednake.

Ovim ćemo se rezultatom koristiti u rješenju b) - d).

b) Dovoljno je primijetiti da su te dužine paralelne pobočnim bridovima dopunjenog paralelepipeda.

c) Neka su površine svih strana tetraedra jednake. Neka je $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ dopunjeni paralelepiped tetraedra $AB_1 CD_1$ (sl. 173). Promotrimo projekciju na ravninu okomitu na pravac AC . Kako su visine trokuta $\triangle ACB_1$ i $\triangle ACD_1$ jednake, slijedi da je projekcija trokuta $\triangle AB_1 D_1$ jednakokrani trokut, a projekcija točke A_1 je polovište baze tog trokuta. Zbog toga je brid AA_1 okomit na stranu $ABCD$. Analogno rasuđivanje pokazuje da je paralelepiped kvadar.

d) Uz iste oznake kao u c), opet promotrimo projekciju na ravninu okomitu na AC . Ako se centar upisane sfere podudara s težištem, onda ravnina $ACA_1 C_1$ prolazi kroz centar upisane sfere, tj. ta je ravnina simetralna ravnina diedra kod brida AC . Stoga se dužina AA_1 projicira u simetralu kuta i težišnicu projekcije trokuta $\triangle AB_1 D_1$, što znači da je brid AA_1 okomit na stranu $ABCD$. ■

Primjer 11. Dokažite da je površina bilo koje strane tetraedra manja od sume površina preostalih triju strana.

Rješenje. Ortogonalne projekcije preostalih triju strana pokrivaju četvrtu stranu. Koristeći se svojstvom da je površina projekcije jednaka $P' = P \cos \varphi$, gdje je φ kut među ravninama, slijedi da je za neparalelne ravnine $P' < P$. Odavde slijedi tvrdnja. ■

Primjer 12. Planet ima oblik konveksnog poliedra u čijim su vrhovima smješteni gradovi. Svaki brid je cesta koja spaja gradove. Dvije ceste su zatvorene zbog rekonstrukcije. Dokažite da se iz svakoga grada u svaki drugi grad može doći preostalim cestama. (Kaže se još da je rub konveksnog poliedra, tj. poliedarska sfera 2-povezana.)

Rješenje. Neka su A i B dva grada. Prvo pokažimo da od A do B možemo doći prije zatvarnja dviju cesta. Projicirajmo poliedar na pravac koji nije okomit niti na jedan brid (u toj projekciji se nikoga dva vrha ne poklope). Neka su A' i B' projekcije od A i B , a M' i N' krajnji vrhovi projekcije poliedra. Neka se M projicira u M' , a N u N' . Ako krenemo iz A tako da gibanje u projekciji ide u smjeru iz M' u N' , onda ćemo kad-tad doći do vrha N . Analogno možemo vrh B spojiti s N . Dakle, možemo A spojiti s B (preko N).

Ako taj put iz A u B prolazi zatvorenom cestom (bridom), onda imamo još dva moguća obilaska po dvjema stranama kojima je to zajednički brid. Druga zatvorena cesta ne može biti na obje ove obilaznice, jer se svake dvije strane konveksnog poliedra sijeku u najviše jednom bridu. ■

5.3. Eulerova formula za poliedre

Neka je P konveksni poliedar. Označimo sa $v = v(P)$ broj vrhova od P , sa $b = b(P)$ broj bridova od P , a sa $s = s(P)$ broj strana od P . Postavlja se prirodno pitanje postoji li među brojevima v , b i s neka veza. Odgovor na to pitanje dao je L. Euler 1752. godine dokazavši da vrijedi

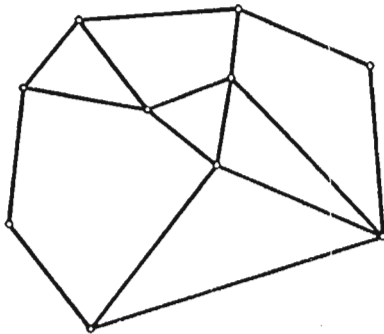
$$v - b + s = 2.$$

Svatko se može lako uvjeriti da ta formula vrijedi za tetraedar, kocku ili npr. bipiramidu, ali ju je prvi općenito dokazao Euler, no poznavao ju je i nešto ranije R. Decartes. Godine 1899. tu je formulu poopćio H. Poincaré na višedimenzionalne poliedre i još općenitije objekte, čime je udario temelje za vrlo važnu matematičku disciplinu koja se danas zove algebarska topologija.

TEOREM 3. (Eulerova formula). *Za svaki konveksni poliedar vrijedi*

$$v - b + s = 2.$$

Dokaz I. Uzmimo bilo koju ravninu M koja nije okomita niti na jednu stranu poliedra. Ortogonalna projekcija poliedra na M je konveksni poligon Π , a projekcije strana poliedra su također konveksni poligoni. Gledajući "odozgo" i "odozdo" obzirom na M , poligon Π je na dva načina rastavljen kao suma poligona. Ustvari, bridovi poliedra koji se projiciraju u stranice poligona Π rastavljaju poliedar na dva dijela: "gornji" i "donji". Promotrimo projekciju "gornjeg" dijela (sl. 174).



Sl. 174.

Neka su n_1, n_2, \dots, n_k brojevi bridova strana "gornjeg" dijela, v_1 broj unutrašnjih vrhova tog dijela, a v' broj vrhova poligona Π .

Izračunajmo sumu kutova poligona na koje je rastavljen poligon Π . S jedne strane je ta suma kutova jednaka $\sum \pi(n_i - 2)$, a s druge strane $\pi(v' - 2) + 2\pi v_1$. Broj strana "gornjeg" dijela je k , pa izjednačavanjem dobijemo $\sum n_i - 2k = v' - 2 + 2v_1$. Analogno, ako je l broj strana "donjeg" dijela poliedra, a m_1, \dots, m_l

brojevi bridova "donjeg" dijela, te v_2 broj unutarnjih vrhova tog dijela, dobivamo $\sum m_j - 2l = v' - 2 + 2v_2$. Zbrajanjem tih dviju jednakosti i uzevši u obzir da je $v = v_1 + v_2 + v'$, $2b = \sum n_i + \sum m_j$, $s = k + l$ slijedi $v - b + s = 2$.

Dokaz II. Opišimo oko poliedra veliku kuglu s centrom O u unutrašnjosti poliedra i radijusa R tako da je čitav poliedar unutar kugle. Sada promotrimo radijalnu projekciju ruba poliedra na sferu (tj. ako je T točka na rubu poliedra, onda se T preslikava u točku T' , gdje je T' presjek zrake OT sa sferom; fizikalno možemo zamišljati da je u O smješten izvor svjetlosti). Projekcije bridova poliedra (tj. kutovi oblika $\sphericalangle AOB$, gdje je \overline{AB} brid poliedra) rastavljaju sferu na konveksne sferne poligone.

Neka je n_i broj bridova i -tog sfernog poligona, σ_i zbroj njegovih unutrašnjih kutova, a P_i njegova površina. Iz formule za površinu sfernog trokuta $P = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2\varepsilon$, tj. površina je kvadrat radijusa puta eksces (v. IV, §11) lako se rastavljanjem na trokute dobiva da je površina konveksnog sfernog n -terokuta jednaka $P = R^2[\sigma - (n - 2)\pi]$, gdje je σ suma unutarnjih kutova tog n -terokuta. Stoga imamo da je $P_i = R^2[\sigma_i - (n_i - 2)\pi]$, $i = 1, 2, \dots, s$. Zbrajanjem svih tih jednakosti dobivamo

$$4R^2\pi = R^2[2\pi v - 2\pi b + 2\pi s],$$

odakle slijedi Eulerova formula. (Pri tome smo se koristili činjenicom da je površina sfere $4R^2\pi$, što ćemo dokazati kasnije u §6.)

Dokaz III. Koristeći grafove vrijedi i općenitija tvrdnja. Za detalje vidi D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989. ■

Iz dokaza II se vidi da Eulerova formula vrijedi ne samo za konveksne poliedre, nego i za svaki tzv. **zvjezdasti poliedar** P u smislu da postoji točka $O \in \text{Int } P$, tako da je za svaku točku $X \in P$ dužina $\overline{OX} \subset P$ (tj. svaka točka poliedra se "vidi" iz O).

Umjesto oznaka v, b, s često se koriste oznake $v = f_0, b = f_1, s = f_2$, tj. f_i je broj i -dimenzionalnih strana $i = 0, 1, 2$. Na taj je način svakom konveksnom poliedru P pridružena uređena trojka cijelih brojeva $f = f(P) = (f_0, f_1, f_2)$ koja se zove **f -vektor** poliedra P (f dolazi od *face* - engl. strana). Euler je, dakle, dokazao da je $f_0 - f_1 + f_2 = 2$. H. Poincaré⁹ je promatrao višedimenzionalne poliedre. Ako sa $f_i(P)$ označimo broj i -dimenzionalnih strana svakog konveksnog n -dimenzionalnog poliedra P , $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, Poincaré je dokazao da vrijedi

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i(P) = 1 + (-1)^{n-1}.$$

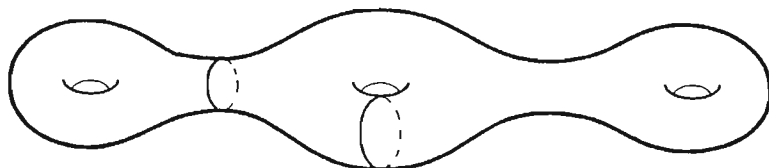
Za $n = 3$ to se podudara s Eulerovom formulom. Zainteresiranog čitatelja upućujemo na knjigu Branko Grünbaum¹⁰, *Convex Polytopes*, John Wiley & Sons, New York, 1967.

Napomenimo da i za bilo koji (nejednostavni) poliedar P ima smisla promatrati broj $\chi(P) =: v - b + s$ i taj se broj zove **Eulerova karakteristika** poliedra P .

⁹ Henri Poincaré (1854 - 1912), francuski matematičar i fizičar.

¹⁰ Branko Grünbaum (r. 1929), hrvatski matematičar. Od 1955 g. djeluje u SAD.

Tako je, npr., Eulerova karakterisitka poliedarskog torusa jednaka 0, dvostrukog poliedarskog torusa -2 itd. Štoviše, ima smisla promatrati Eulerovu karakteristiku ploha (ne nužno poliedarskih), pa je tako Eulerova karakteristika k -strukog torusa (sl. 175 za $k = 3$) jednaka $2 - 2k$. Ovim i sličnim pitanjima bavi se algebarska i diferencijalna topologija (v. npr. B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. T. Fomenko, *Sovremennaja geometrija*, Nauka, Moskva, 1979, te njen nastavak *Metodi teorii homologii*, Nauka, Moskva, 1984; postoji i prijevod na engleski jezik).



Sl. 175.

Eulerova formula dolazi do izražaja već i u "svakodnevnom životu". Tako npr. znamo da je nogometna lopta "buba mara" prekrivena pravilnim (sfernim) peterokutima i šesterokutima i to tako da su oko svakog (crnog) peterokuta sami (bijeli) šesterokuti, a svaki šesterokut graniči (preko svakog svog drugog vrha) s tri peterokuta. Postavlja se pitanje, koliko ima peterokuta, a koliko šesterokuta na "buba mari"?

Označimo li sa x broj peterokuta, a sa y broj šesterokuta na "buba mari", onda odmah uočavamo da je broj svih vrhova na pripadnom konveksnom poliedru jednak $5x$, da je broj bridova jednak $5x + 3y/2$, te da je broj strana jednak $x + y$. Eulerova formula tada odmah daje $2x = y + 4$. S druge strane, bridova ima $3y + 3y/2$, pa je $5x + 3y/2 = 3y + 3y/2$, tj. $5x = 3y$. Iz ove dvije jednadžbe tada dobivamo $x = 12$, $y = 20$.

Primjer 13. a) Dokažite da je suma kutova svih strana konveksnog poliedra jednaka dvostrukoj sumi kutova nekog (ravninskog) poligona s istim brojem vrhova.

b) U svakom vrhu konveksnog poliedra pogledajmo razliku između 2π i sume (plošnih) kutova kod tog vrha. Dokažite da je suma svih takvih izraza jednaka 4π .

Rješenje. Neka je \sum suma svih kutova strana poliedra. U a) se tvrdi da je $\sum = 2(v - 2)\pi$, a u b) da je $2v\pi - \sum = 4\pi$. Očito je to dvoje ekvivalentno.

Ako je neka strana k -terokut, onda je suma njegovih kutova jednaka $(k - 2)\pi$. Sumiranjem po svim stranama, uzimajući u obzir da se svaki brid računa dva puta jer leži u točno dvije strane slijedi da je $\sum = 2b\pi - 2s\pi$. Zbog Eulerove formule odavde slijedi a), pa stoga i b). ■

Primjer 14. Neka je v_k broj vrhova konveksnog poliedra u kojem se sastaje k bridova, a s_k broj k -terokuta kao strana tog poliedra. Dokažite da vrijedi

$$2b = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \dots = 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \dots$$

Rješenje. Svaki brid ima dva kraja (vrha) i pri tom se vrh incidentan s k bridova broji k puta. Stoga je $2b = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \dots$. S druge strane svakom bridu su pridružene dvije njemu incidentne strane i pri tom se k -terokutna strana broji k puta. Stoga je $2b = 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \dots$ ■

Primjer 15. a) Dokažite da u svakom konveksnom poliedru postoji strana s najviše pet bridova i postoji vrh incidentan s najviše pet bridova.

b) Ako su sve strane konveksnog poliedra centralno simetrične, dokažite da tada on ima barem 8 vrhova u kojima se sastaju po 3 brida (kocka ima točno 8 takvih vrhova).

Rješenje. a) Dokažimo prvu tvrdnju. Pretpostavimo suprotno, tj. da svaka strana nekog konveksnog poliedra ima barem šest bridova. Tada je (v. prethodni primjer) $s_3 = s_4 = s_5 = 0$, pa je $2b = 6s_6 + 7s_7 + \dots \geq 6s$, tj. $b \geq 3s$. Također je $2b = 3v_3 + 4v_4 + \dots \geq 3v$. Zbrajanjem ovih nejednakosti slijedi $b \geq v + s$. No Eulerova formula povlači $b = v + s - 2$. Dobivena kontradikcija dokazuje tvrdnju.

Druge tvrdnja se dokazuje analogno.

b) Iz Eulerove formule i $2b = 3s_3 + 4s_4 + \dots = 3v_3 + 4v_4 + \dots$ slijedi $v_3 + s_3 = 2s + (v_5 + s_5) + 2(v_6 + s_6) + \dots$. Kako je $s_3 = 0$, to slijedi tvrdnja. ■

Primjer 16. U svakom konveksnom poliedru vrijedi $3s \geq 6 + b$ i $3v \geq 6 + b$.

Rješenje. Kako je $2b = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \dots \geq 3v$ (v. prethodni primjer), a prema Eulerovoj formuli $v = b - s + 2$, to je $2b \geq 3(b - s + 2)$, odakle slijedi $3s \geq 6 + b$. Analogno se dokazuje druga nejednakost. ■

Primjer 17. Na koliko dijelova dijele prostor sve ravnine strana konveksnog poliedra. Posebno, koliki je taj broj u slučaju kocke odnosno tetraedra?

Rješenje. Ravnine strana sijeku se po pravcima na kojima su bridovi poliedra. Stoga svaki dio na koji je prostor podijeljen ima zajedničkih točaka s poliedrom. Osim toga, svakom vrhu, bridu i strani poliedra možemo na prirodan način pridružiti točno jedan od dijelova na koji je prostor podijeljen (opišite detaljno to pridruživanje). Na taj su način iscrpljeni i svi dijelovi prostora, osim samog poliedra. Stoga je traženi broj jednak $1 + v + b + s$. U slučaju kocke taj je broj jednak $1 + 8 + 6 + 12 = 27$, a u slučaju tetraedra $1 + 4 + 4 + 6 = 15$. ■

Podsjetimo da je poliedar simplicijalan ako su mu sve strane trokuti. Karakterizacija f -vektora simplicijalnih konveksnih poliedara dana je sljedećim teoremom.

TEOREM 4. *Cjelobrojni vektor (f_0, f_1, f_2) je f -vektor konveksnog simplicijalnog poliedra ako i samo ako je $f_1 = 3f_0 - 6$, $f_2 = 2f_0 - 4$, $f_0 \geq 4$.*

Dokaz. Ako su sve strane poliedra trokuti, onda je $2f_1 = 3f_2$, jer je svaki brid stranica od točno dva trokuta. Odavde i iz Eulerove formule $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ odmah slijedi $f_1 = 3f_0 - 6$, $f_2 = 2f_0 - 4$.

Sada dokažimo obrat. Dovoljno je dokazati da za svaki vektor (f_0, f_1, f_2) za koji vrijede uvjeti iz Teorema postoji simplicijalni poliedar s tim f -vektorom. To ćemo pokazati indukcijom po f_0 . Za $f_0 = 4$ imamo tetraedar čiji je f -vektor $(4, 6, 4)$. Neka je $f_0 > 4$ i neka je P simplicijalni poliedar čiji je f -vektor $f(P) = (f_0 - 1, 3(f_0 - 1) - 6, 2(f_0 - 1) - 4)$. Odaberimo točku T u prostoru tako da ona ne leži niti u jednoj ravnini strana poliedra P i koja je od P odijeljena s točno jednom od ravnina strana poliedra P . Sada nije teško provjeriti da je $P' = \text{conv}(P \cup \{T\})$, tj. konveksna ljuska od P i T , simplicijalni poliedar čiji je f -vektor $f(P') = (f_0, 3f_0 - 6, 2f_0 - 4)$. ■

Mnogo teže je dokazati karakterizaciju f -vektora za bilo koje konveksne poliedre. Taj teorem glasi ovako.

TEOREM 5 (E. Steinitz¹¹, 1922). *Vektor (f_0, f_1, f_2) je f -vektor konveksnog poliedra ako i samo ako za cijele brojeve f_0, f_1, f_2 vrijedi:*

$$f_1 = f_0 + f_2 - 2, \quad 4 \leq f_0 \leq 2f_2 - 4, \quad 4 \leq f_2 \leq 2f_0 - 4. \quad \blacksquare$$

Tako, npr., postoji konveksni poliedar s f -vektorom $(7, 11, 6)$, ali ne postoji konveksni poliedar s f -vektorom $(7, 10, 5)$.

Danas (1994) se ne znaju višedimenzionalni analogoni Steinitzovog teorema ali se zna višedimenzionalni analogon teorema 4. To je Stanleyev teorem iz 1981.

Spomenimo još jedan lijepi teorem o poliedrima koji je jednostavno formulirati, ali teško dokazati, pa ćemo dokaz izostaviti, ali kažimo da se u dokazu bitno koristi Eulerova formula. Taj teorem se riječima može ovako objasniti. Ako pokušamo napraviti model konveksnog poliedra od kartona, onda ćemo u početku rada na modelu vidjeti da kada u jednom vrhu skupimo više od tri strane, onda je dobivena figura **gibljiva** (ili **fleksibilna**, tj. te strane dopuštaju malu vrtnju oko bridova). No kad završimo model, takav poliedar više nije gibljiv, tj. ako ga jako pritišćemo, onda ili se strane jako deformiraju ili se zalijepljeni poliedar pokida ili podere. Matematički precizno, vrijedi ovaj opći teorem.

TEOREM 6 (A. Cauchy¹², 1813). *Neka su P i P' konveksni poliedri u prostoru za koje postoji bijekcija f među njihovim rubovima koja preslikava vrhove u vrhove, bridove u bridove, a strane u strane. Pretpostavimo da je za svaku stranu F od P , restrikcija $f|_F : F \rightarrow f(F)$ izometrija. Tada postoji proširenje \bar{f} od f koje je izometrija čitavog prostora, tako da je $\bar{f}(P) = P'$. Posebno, poliedri P i P' su izometrični. \blacksquare*

Kao lagana posljedica tog teorema je tvrdnja da je svaki konveksni poliedar krut, tj. nije gibljiv u gornjem smislu. Dugo vremena je bilo otvoreno pitanje postoji li nekonveksni gibljiv (fleksibilan) poliedar. Tek 1978. godine je Robert Connelly sa Cornell University, USA konstruirao od kartona primjer gibljivog nekonveksnog poliedra, što je izazvalo nemalu senzaciju među matematičarima.

5.4. Pravilni poliedri

Konveksni poliedar je **pravilan** ako su mu sve strane kongruentni pravilni poligoni, recimo p -terekuti, a u svakom vrhu se sastaje jednako mnogo bridova, recimo q , čiji drugi krajevi čine pravilan q -terokut. Tada govorimo o $\{p, q\}$ -poliedru. (Katkad se ne zahtijeva kongruentnost i pravilnost poligona. Glavno je da su sve strane p -terokuti i da se u svakom vrhu sastaje q bridova. Tada se dobiva naprosto distorzija pravilnog poliedra ili kako se još kaže isti **kombinatorni tip**.)

¹¹ Ernest Steinitz (1871 – 1928), njemački matematičar.

¹² Auguste L. Cauchy (1789 – 1857), francuski matematičar. Jedan od utemeljitelja suvremene matematičke analize.

TEOREM 7. *Postoji točno pet pravilnih poliedara (do na kombinatorni tip). To su (20): Platonova¹³ tijela.*

Dokaz. Pogledajmo koji sve brojevi p i q dolaze u obzir. Prvo, očito su $p, q \geq 3$. Svaki brid poliedra ima dva kraja, pa krajeva svih bridova ima $2b$. S druge strane, q krajeva bridova ulaze u svaki od v vrhova, pa ima qv krajeva bridova. Dakle je $qv = 2b$. Nadalje, svaki brid poliedra je brid točno dviju strana, pa ima $2b$ strana bridova. S druge strane, svaka od s strana je omeđena sa p bridova, pa ima ps strana bridova. Dakle je $ps = 2b$.

Ođavde i iz Eulerove formule imamo redom

$$2 = v - b + s = \frac{2}{q}b - b + \frac{2}{p}b = \frac{2p + 2q - pq}{pq}b \Rightarrow$$

$$2p + 2q - pq > 0 \Leftrightarrow pq - 2p - 2q + 4 < 4 \Leftrightarrow (p - 2)(q - 2) < 4.$$

Zbog $p - 2, q - 2 \geq 1$, jedine mogućnosti za $\{p, q\}$ su:

$$\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 3\}.$$

Pokažimo (konstruktivno) da zaista postoje ovi poliedri. $\{3, 3\}$ je naprosto tetraedar. $\{3, 4\}$ je oktaedar koji se dobiva kao bipiramida nad zajedničkom bazom kvadratom. $\{4, 3\}$ je kocka. $\{3, 5\}$ je ikozaedar, a $\{5, 3\}$ dodekaedar (sl. 176). ■



Oktaedar
(zrak)



Kocka
(zemlja)



Tetraedar
(vatra)



Dodekaedar
(svemir)



Ikozaedar
(voda)

Sl. 176.

Dodekaedar se može konstruirati tako da se učvrsti šest peterokuta tako da je jedan potpuno okružen s ostalih pet, tako svi oni čine neku vrstu zdjele. Slobodni bridovi tada čine izlomljeni deseterokut. Dvije takve zdjele se sastave zajedno duž deseterokuta. Spomenimo da su pravilni poliedri imali važnu ulogu u starogrčkoj filozofiji prirode (sl. 176).

f -vektor (v, b, s) za tetraedar je $(4, 6, 4)$, za kocku $(8, 12, 6)$, za oktaedar $(6, 12, 8)$, za ikozaedar $(12, 30, 20)$, a za dodekaedar $(20, 30, 12)$.

¹³Platon (427 - 347 pr. Kr.), starogrčki filozof-idealista, učenik Sokrata, a učitelj Aristotelu.

Tetraedar, kocku i dodekaedar poznavali su već Pitagora i njegova škola, dok je oktaedar i ikozaedar otkrio Platonov učenik Thetus (410 – 368 pr. Kr.). Pomalo je čudno da je oktaedar otkriven tako kasno, kad se zna da su stari Egipćani poznavali piramidu, a oktaedar je naprosto podvostručena piramida. No Thetus je prvi koliko-toliko strogo definirao pravilne poliedre i dokazao (više-manje korektno) da ih ima točno pet.

Primjer 18. Da li je konveksni poliedar nužno pravilan, ako su mu međusobno jednaki a) svi bridovi i svi diedri; b) svi bridovi i svi prostorni kutovi (kod svakog vrha)?

Rješenje. Ne nužno. Promotrimo konveksni poliedar kojem su vrhovi polovišta bridova kocke. Tada je lako provjeriti da su svi bridovi tog poliedra iste duljine, svi diedri jednaki i svi prostorni kutovi međusobno jednaki (učinite to sami!), ali to očito nije pravilni poliedar. ■

Primjer 19. Da li je konveksni poliedar u kojem su sve strane kongruentne i svi prostorni kutovi jednaki nužno pravilan?

Rješenje. Ne nužno. Promotrimo kvadar $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ koji nije kocka. Tetraedar AB_1CD_1 ima sve strane kongruentne a sve trobride jednake, ali on nije pravilan. ■

Primjer 20. Dokazite da je konveksni poliedar pravilan ako su mu

- a) sve strane pravilni poligoni, a svi prostorni kutovi pravilni;
- b) svi plošni kutovi jednaki i svi diedri jednaki.

Rješenje. a) Dokazimo da su sve strane kongruentne. Promotrimo sve strane incidentne jednom vrhu. Kako je prostorni kut kod tog vrha pravilan, slijedi da su mu svi plošni kutovi kod tog vrha jednaki, pa su i svi kutovi pravilnih poligona jednaki. Osim toga, sve stranice pravilnih poligona s jednom zajedničkom stranicom međusobno su jednake. Stoga su i svi poligoni, tj. strane poliedra, kongruentne.

Sada dokazimo da se u svakom vrhu sastaje isti broj bridova i da njihovi drugi krajevi čine vrhove pravilnog poligona. Dovoljno je dokazati da su svi prostorni kutovi kongruentni. Promotrimo sve prostorne kutove u vrhovima jedne strane. Kako su sve strane kongruentne, to su i svi plošni kutovi tih prostornih strana jednaki. Nadalje, dva susjedna prostorna kuta (tj. ona čiji su vrhovi krajevi jednog brida poliedra) imaju zajednički diedar, pa su stoga jednaki svi njihovi diedri. Idući tako od brida do brida zaključujemo da su svi diedri svih prostornih kutova jednaki. Stoga su svi prostorni kutovi kongruentni (ili uobičajeno rečeno jednaki).

- b) To se dokazuje slično. Ustvari, lako je dokazati b) \Rightarrow a). ■

Primjer 21. Dokazite da za svaki pravilni poliedar:

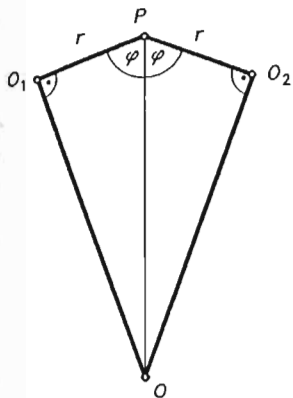
- a) postoji opisana sfera (tj. sfera koja prolazi svim vrhovima);
- b) postoji upisana sfera (tj. sfera koja dira sve strane);
- c) centri opisane i upisane sfere te centar masa se podudaraju.

Pri tome je centar masa poliedra centar masa vrhova u kojima su smještene jedinične mase. Ta zajednička točka zove se centar pravilnog poliedra.

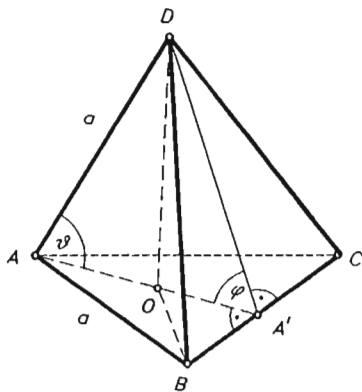
Rješenje. a) i b). Kroz centar svake strane povucimo okomicu na tu stranu. Pokazimo da se one sijeku u jednoj točki i da je ona udaljena od svake strane $r \operatorname{ctg} \varphi$, gdje je r radijus upisane kružnice (bilo koje) strane, a φ polovina diedra među stranama. U tu svrhu promotrimo presjek poliedra s ravninom koja prolazi središtima O_1 i O_2 dviju susjednih strana i polovištem P njihovog zajedničkog brida (sl. 177). Na taj način vidimo da se okomice susjednih strana sijeku. Stoga se i sve te okomice sijeku u jednoj točki O .

Udaljenost točke O do svake strane je $r \operatorname{ctg} \varphi$. Ako su sve strane pravilni p -terokuti, onda se lako vidi da je udaljenost od O do svakog vrha poliedra jednaka $r \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{p}} + \operatorname{ctg}^2 \varphi}$, dakle konstanta. Dakle, O je i centar opisane i upisane sfere tom pravilnom poliedru.

c) Dokažimo da je suma vektora $\sum_{i=1}^n \vec{OA}_i = \vec{0}$, gdje su A_1, A_2, \dots, A_n svi vrhovi poliedra. Neka je \vec{x} ta suma vektora. Svaka rotacija koja poliedar preslika u samog sebe ostavlja centar O na miru, pa se i vektor \vec{x} preslika u samog sebe. No, ne-nul vektor može rotacijom preći u samog sebe, samo oko osi koja mu je paralelna. Očito je, međutim, da pravilni poliedar ima više osi rotacije s kojima prelazi sam u sebe. Dakle, $\vec{x} = \vec{0}$. ■



Sl. 177.



Sl. 178.

Primjer 22. Izračunajte diedralni kut pravilnog tetraedra kao i prikloni kut pobočnog brida prema bazi.

Rješenje. Neka je $ABCD$ pravilni tetraedar s duljinom brida jednakom a . Neka je nadalje DO visina tetraedra spuštena iz vrha D , P površina svake strane, φ diedralni kut, a θ prikloni kut pobočnog brida npr. \overline{AD} prema bazi $\triangle ABC$ (v. sl. 178). Očito se $\triangle ABD$ ortogonalno projicira na $\triangle ABO$, a površina tog trokuta je $P/3$. Stoga imamo da je

$$\frac{P}{3} = P \cos \varphi,$$

odakle slijedi da $\varphi = \arccos \frac{1}{3}$, tj: $\varphi \approx 70^\circ 32'$.

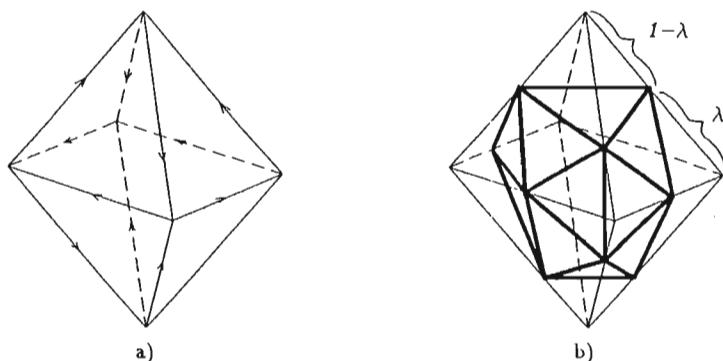
(Na drugi način, koristite $\triangle A'DO$, gdje je A' nožište visine iz A u $\triangle ABC$; učinite to sami.)

Nadalje, kako je $|AO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3}$, to iz $\triangle ADO$ slijedi

$$\cos \theta = \frac{\frac{a}{3} \sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ tj. } \theta \approx 54^\circ 44'. \quad \blacksquare$$

Primjer 23. Dokazite da postoji ikozaedar, tj. konstruirajte pravilni poliedar omeđen pravilnim trokutima, a svaki vrh je vrh pentagonalnog pravilnog kuta.

Rješenje. Vrhovi ikozaedra će biti na bridovima oktaedra. Prvo orijentirajmo bridove oktaedra kao na sl. 179a). Tada podijelimo sve bridove oktaedra u istom omjeru $\lambda : (1-\lambda)$, uzimajući u obzir orijentaciju. Tako dobivene točke su vrhovi konveksnog poliedra čije su strane trokuti i pentagonalnim prostornim kutovima kod vrhova (sl. 179b). Stoga je dovoljno odabrati λ , tako da to bude pravilni poliedar.



Sl. 179.

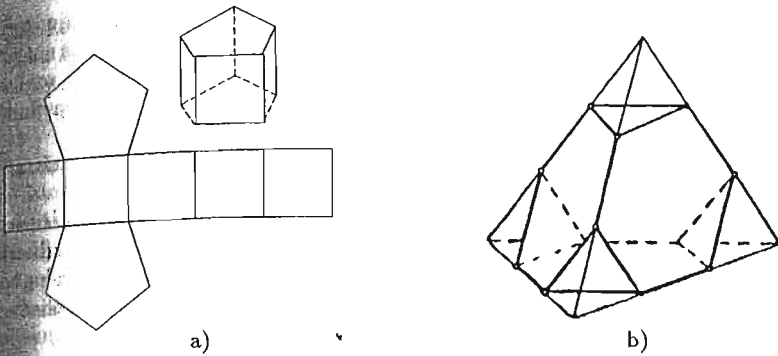
Imamo dvije vrste bridova: one koji leže na stranama oktaedra i one koji ne leže. Kvadrat duljine brida koji leži na strani oktaedra je jednak $\lambda^2 + (1-\lambda)^2 - 2\lambda(1-\lambda)\cos 60^\circ = 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$, a kvadrat duljine brida koji ne leži na strani oktaedra je jednak $2(1-\lambda)^2 = 2\lambda^2 - 4\lambda + 2$ (pritom koristimo činjenicu da je kut među nesusjednim bridovima oktaedra koji izlaze iz jednog vrha pravi kut). Stoga, za $3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 2\lambda^2 - 4\lambda + 2$, tj. za $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (negativni korijen odbacujemo), dobivamo da su sve strane dobivenog poliedra jednakostranični trokuti. Pokažimo još da su svi diedri jednaki. To je stoga što su (za svako λ) vrhovi tog poliedra jednako udaljeni od centra oktaedra, tj. leže na jednoj sferi. ■

Primjer 24. Koliko ima izometrija koje prevode pravilni poliedar u sama sebe?

Rješenje. Svaku stranu pravilnog poliedra možemo izometrijom (gibanjem) prevesti u bilo koju drugu stranu. Ako su strane n -terokuti, onda imamo $2n$ izometrija koje poliedar prevode u sama sebe a koji čuvaju jednu stranu. To je n rotacija (za kutove $\frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, n \cdot \frac{2\pi}{n}$) i n simetrija obzirom na ravninu. Stoga je broj simetrija koje prevode poliedar u sama sebe (uključujući identitetu) jednak $2ns$.

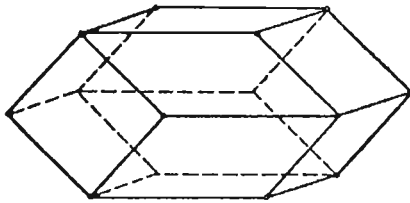
Takvih je izometrija za tetraedar 24, za kocku i oktaedar 48, a za ikozaedar i dekaedar 120. ■

Spomenimo ovdje da u dimenziji $d = 2$ imamo beskonačno tipova pravilnih d -dimenzionalnih poliedara; to su pravilni n -terokuti ($n \geq 3$). U dimenziji $d = 3$ imamo pet Platonovih tijela, u dimenziji $d = 4$ imamo šest tipova pravilnih poliedara, a u dimenzijama $d \geq 5$, imamo samo tri tipa pravilnih poliedara. To je Schläflijev teorem iz 1850. godine.

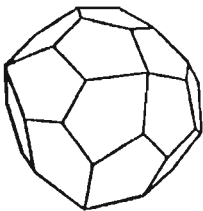


Sl. 180.

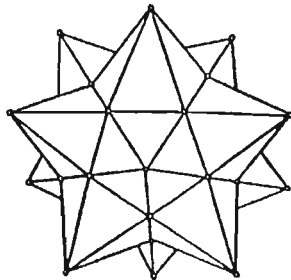
Od interesa su i neki **polupravilni poliedri**. Tako spomenimo **jednakokutne polupravilne** ili **Arhimedove poliedre**. To su poliedri koji imaju sve prostorne kutove jednake (ali ne nužno pravilne), a sve strane su pravilni poligoni (ali ne nužno kongruentni). Najjednostavniji su tzv. **Arhimedove prizme**, tj. pravilne n -strane prizme s kvadratima kao pobočkama (sl. 180a). Drugi primjer Arhimedovog poljedra dobijemo ako kod svakog vrha pravilnog tetraedra brida a odsijemo pravilni tetraedar brida $a/3$ (sl. 180b).



Sl. 181.



Sl. 182.



Sl. 183.

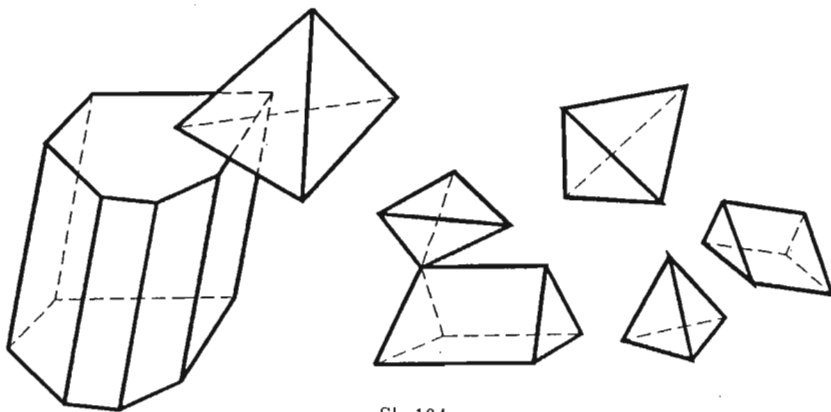
Drugi tip su **jednakostrani – polupravilni poliedri**, tj. takvi koji imaju kongruentne strane (ali ne nužno pravilne) i sve prostorne kutove pravilne (ali ne nužno međusobno jednake). Takvi su, npr., pravilne bipiramide. Drugi je primjer rombski dodekaedar (sl. 181) koji ima 12 sukladnih rombova za strane, a 14 pravilnih prostornih kutova, od kojih 6 četverobrida i 8 trobrida.

U kristalografiji se susreću tzv. **izoedri**; npr. kristal kuprita (Cu_2O) jest izoedar omeđen s 24 kongruentna nepravilna peterokuta (sl. 182).

Osim pravilnih konveksnih poliedara, promatraju se i pravilni zvjezdasti poliedri (definicija je slična). Još je J. Kepler našao dva tipa: **mali i veliki zvjezdasti dodekaedar**. A. Cauchy je mnogo kasnije našao još dva tipa i dokazao da su to svi. Na sl. 183 je mali zvjezdasti dodekaedar. Taj jednostavni simplicijalni poliedar ima f -vektor $f = (32, 90, 60)$

5.5. Volumen poliedra

Sada ćemo strogo zasnovati pojam volumena poliedra, kao što smo to učinili za površine poligona (1. dio, str. 240). I ovdje ćemo promatrati malo prošireni pojam poliedra. Smatrat ćemo, naime, da je **poliedar** u širem smislu zbroj $P_1 + P_2 + \dots + P_n$, od konačno mnogo jednostavnih poliedara P_1, \dots, P_n , tj. unija od konačno mnogo jednostavnih poliedara kojima su unutrašnjosti disjunktne. Na sl. 184 su neki primjeri takvih poliedara.



Sl. 184.

Kao i kod poligona i ovdje se svaki poliedar u gornjem smislu može **triangulirati**, tj. prikazati kao unija od konačno mnogo tetraedara s disjunktним unutrašnjostima, pri čemu svaka dva tetraedra ili nemaju zajedničkih točaka ili se sijeku u jednom vrhu ili duž zajedničkog brida ili u zajedničkoj strani (bolje bi stoga bilo reći tetraedrizarati ili simpleksirati, ali zbog analogije s poligonima u ravnini ostajemo kod naziva triangulirati).

LEMA 1 (o triangulaciji). a) Svaki jednostavni poliedar se može prikazati kao suma konveksnih poliedara.

b) Svaki konveksni poliedar se može triangulirati.

c) Svaki konveksni poliedar se može triangulirati bez uvođenja novih vrhova.

Dokaz. a) Povucimo sve ravnine koje sadrže strane danog poliedra. Dijelovi prostora na koje one dijele prostor su konveksni, pa se na taj način jednostavni poliedar razlaže na konveksne poliedre.

b) Unutar konveksnog poliedra uzmimo bilo koju točku O , a svaku stranu triangulirajmo na trokute. Trostrane piramide s vrhom O čije su baze trokuti triangulacije strana daju prikaz konveksnog poliedra u obliku zbroya tetraedara koji se sijeku samo u zajedničkim vrhovima, bridovima ili stranama, tj. konveksni poliedar se može triangulirati.

c) Dokaz ćemo provesti indukcijom po broju vrhova n . Za $n = 4$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da je tvrdnja točna za bilo koji konveksni poliedar s n vrhova. Neka je P konveksni poliedar s $n + 1$ vrhova. Neka je A neki vrh od P i promotrimo konveksnu P' ljusku svih ostalih vrhova od P osim A . P' je konveksni poliedar s n vrhova pa ga prema pretpostavci indukcije trianguliramo bez novih vrhova. Preostali dio $P \setminus P'$ je poliedar (možda i nekonveksni) s istaknutim vrhom A s kojim su svi ostali vrhovi od P' spojeni bridovima. Sada trianguliramo na trokutove bez novih vrhova sve strane od P' koje ne sadrže vrh A . Trostrane piramide s vrhom A , čije su osnovke ti trokuti daju traženu triangulaciju od P' . ■

Neka je \mathcal{P} skup svih poliedara u prostoru (uključujući \emptyset). Volumen (obujam, zapremina, sadržaj) v na skupu \mathcal{P} je funkcija $v : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{R}$ s ovim svojstvima (aksiomima)

$$(V1) v(P) \geq 0, \forall P \in \mathcal{P},$$

$$(V2) v(P_1 + P_2) = v(P_1) + v(P_2), \forall P_1, P_2 \in \mathcal{P},$$

$$(V3) \text{Izometrični poliedri imaju jednake volumene, tj. } P_1 \cong P_2 \Rightarrow v(P_1) = v(P_2),$$

$$(V4) \text{Postoji bar jedna kocka } K \text{ sa bridom duljine 1 takva da je } v(K) = 1.$$

Za poliedar P broj $v(P)$ se zove volumen (obujam, zapremina, sadržaj) poliedra P .

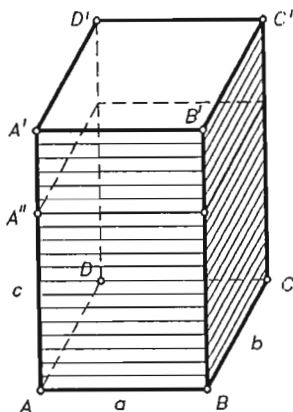
Kao i u slučaju poligona i ovdje se slično pokazuje da su to nezavisni aksiomi, kao i da vrijede slična svojstva.

Za dokaz egzistencije i jedinstvenosti funkcije v sada bismo mogli postupiti sasvim analogno kao i u slučaju površine poligona (pokušajte učiniti to sami!), ali ćemo mi postupiti drukčije kako bismo upoznali svo bogatstvo ideja i metoda.

TEOREM 8 (volumen kvadra). Ako postoji volumen v i ako je

$P = ABCDA'B'C'D'$ kvadar s bazom (pravokulnikom) $ABCD$, takav da je $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA'| = c$, onda je $v(P) = abc$.

Dokaz. Prvo dokažimo da se volumeni kvadra sa zajedničkom bazom odnose kao njihove visine. Neka su $P = ABCDA'B'C'D'$ i $P' = ABCDA''B''C''D''$ dva kvadra s bazom $ABCD$ i visinama $\overline{AA'}$ i $\overline{AA''}$ i neka je $|\overline{AA''}| < |\overline{AA'}|$. Označimo volumene $V = v(P)$, $V' = v(P')$. Podijelimo visinu $\overline{AA'}$ na n jednakih dijelova.



Sl. 185.

Svaki od njih je jednak $|AA'|/n$. Neka m od tih djelišnih točaka leži na visini $\overline{AA''}$. Tada je

$$\frac{|AA'|}{n} \cdot m \leq |AA''| \leq \frac{|AA'|}{m} \cdot (m+1),$$

odnosno

$$\frac{m}{n} \leq \frac{|AA''|}{|AA'|} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \quad (*)$$

Djelišnim točkama povucimo ravnine paralelne bazi. One dijele kvadar P na n jednakih (izometričnih) kvadara, pa svaki od njih ima volumen (zbog (V2) i (V3)) jednak V/n . Kvadar P' sadrži prvih m malih kvadara, računajući odozdo a sadržan je u prvih $m+1$ malih kvadara. Zbog monotonosti volumena (što je posljedica (V1) i (V2)) slijedi da je

$$\frac{V}{n} \cdot m \leq V' \leq \frac{V}{n} \cdot (m+1)$$

odnosno

$$\frac{m}{n} \leq \frac{V'}{V} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \quad (**)$$

Iz (*) i (**) slijedi da su oba broja $|AA''|/|AA'|$ i V'/V između m/n i $m/n + 1/n$, pa se oni razlikuju za najviše $1/n$. Kako n može biti po volji velik, $1/n$ može biti po volji mali, pa nužno slijedi da je

$$\frac{V'}{V} = \frac{|AA''|}{|AA'|},$$

čime je naša tvrdnja dokazana.

Sada uzmimo jediničnu kocku K i tri kvadra s duljinama bridova $a, 1, 1$; $a, b, 1$; a, b, c . Označimo njihove volumene redom sa V_1, V_2 i V . Prema upravo dokazanom

imamo

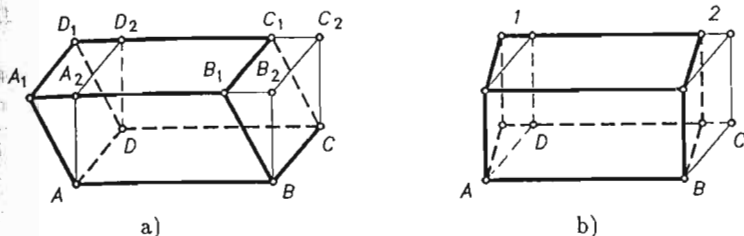
$$\frac{V_1}{1} = \frac{a}{1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{b}{1}, \quad \frac{V}{V_2} = \frac{c}{1}.$$

Iz množimo li ove tri relacije, dobivamo $V = abc$. ■

TEOREM 9 (volumen paralelepipeda). *Ako postoji volumen v , onda je volumen paralelepipeda jednak produktu površine baze $p(B)$ i pripadne visine h , tj.*

$$v(P) = p(B) \cdot h.$$

Dokaz. Neka je $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (kosi) paralelepiped (sl. 186a)). Bridom \overline{BC} povucimo ravninu okomitu na bazu $ABCD$ i dopunimo kosi paralelepiped trostranom prizmom $BB_1 B_2 CC_1 C_2$. Od tako dobivenog poliedra odsijecimo trostranu prizmu $AA_1 A_2 DD_1 D_2$ ravninom kroz brid \overline{AD} okomitom na bazu $ABCD$.



Sl. 186.

Tako opet dobivamo paralelepiped. Taj paralelepiped ima isti volumen kao i polazni paralelepiped. To je zato jer su dopunjena i odsječena prizma kongruentne, što se dobiva translacijom za vektor \overline{AB} , pa ta tvrdnja slijedi iz (V2) i (V3). Tom transformacijom paralelepipeda sačuvaju se površina baze i duljina visine, sačuvaju se također površine pobočki, a preostale dvije strane ostaju okomite na bazu.

Primijenimo li još jedanput takvu transformaciju na kose strane, dobivamo paralelepiped kojem su sve pobočke okomite na bazu, tj. dobivamo uspravni paralelepiped.

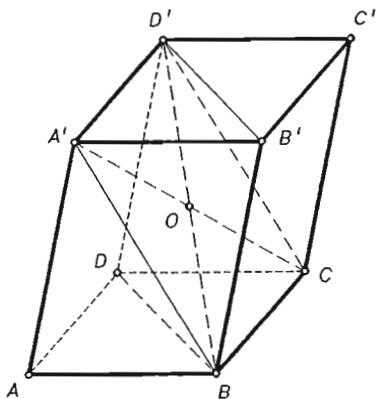
Tako dobiveni uspravni paralelepiped sada podvrgnimo analognoj transformaciji koja ga prevodi u kvadar. To se napravi tako da ga se prvo dopuni prizmom $\boxed{1}$, a zatim oduzmемо (odsijecemo) prizmu $\boxed{2}$ (sl. 186b)). I ta transformacija sačuva volumen paralelepipeda, površinu baze i visinu.

Volumen kvadra je prema prethodnom teoremu jednak produktu duljina pobočnih bridova iz jednog vrha. Produkt dvaju bridova je površina baze, a treća je visina. Stoga je volumen kvadra jednak produktu površine baze i pripadne visine. Kako se pri opisanim transformacijama početnog paralelepipeda u kvadar čuvaju volumen, površina baze i visina, to je i volumen danog paralelepipeda jednak produktu površine baze i visine. ■

Da izračunamo volumen prizme treba nam prvo jedna lema.

LEMA 2. *Dijagonale paralelepipeda se sijeku u jednoj točki i u njoj se raspolavljaju. Ta točka je centar simetrije paralelepipeda.*

Dokaz. Promotrimo bilo koje dvije dijagonale paralelepipeda $ABCD A' B' C' D'$ npr. $\overline{A'C}$ i $\overline{B'D'}$ (sl. 187). Četverokuti $ABCD$ i $ADD'A'$ su paralelogrami sa zajedničkom stranicom \overline{AD} , pa su im stranice \overline{BC} i $\overline{A'D'}$ međusobno paralelne. Stoga one leže u jednoj ravnini. Ta ravnina siječe nasuprotne strane paralelepipeda u paralelnim pravcima $A'B$ i $D'C$. Zbog toga je $A'BCD'$ paralelogram, a dijagonale $\overline{A'C}$ i $\overline{B'D'}$ paralelepipeda su dijagonale tog paralelograma. Odavde slijedi da se te dijagonale sijeku i u tom presjeku O one se raspolavljaju.



Sl. 187.

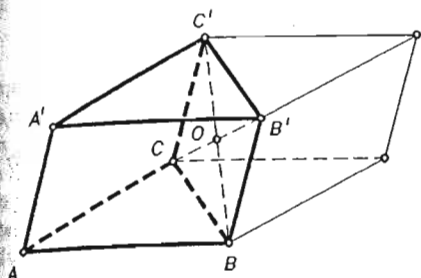
Analogno se dokazuje da se i druga dva para dijagonala $\overline{BD'}$ i $\overline{AC'}$, te $\overline{AC'}$ i $\overline{B'D}$ sijeku i raspolavljaju. Odavde zaključujemo da se sve četiri dijagonale paralelepipeda sijeku u jednoj točki i da je ta točka polovište svake od njih. Ta točka je očito tada i centar simetrije paralelepipeda. (Pokušajte na drugi način ovu lemu dokazati vektorski.) ■

TEOREM 10 (volumen prizme). *Volumen prizme (ako postoji) jednak je produktu površine baze i pripadne visine.*

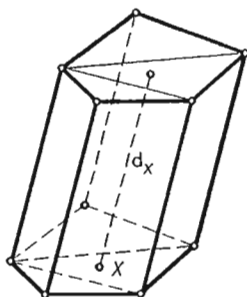
Dokaz. Prvo promotrimo trostranu prizmu $ABCA' B' C'$ (sl. 188) i dopunimo je do paralelepipeda.

Neka je O centar simetrije paralelepipeda. Tada je prema prethodnoj lemi dopunjena prizma centralno simetrična polaznoj obzirom na O , pa ima volumen jednak polaznoj. Zato je volumen dobivenog paralelepipeda jednak dvostrukom volumenu polazne prizme.

Prema prethodnom teoremu, volumen paralelepipeda jednak je produktu površine baze i visine, a površina njegove baze je dvostruka površina trokuta $\triangle ABC$, dok mu je visina jednaka visini prizme. Stoga je i volumen polazne prizme jednak produktu površine baze i visine.



Sl. 188.



Sl. 189.

Sada promotrimo bilo koju prizmu (sl. 189). Triangulirajmo bazu (1. dio, str. 237). Neka je Δ jedan od tih trokuta.

Ako bilo kojom točkom $X \in \Delta$ povučemo pravac paralelan pobočnom bridu, neka je d_X presjek tog pravca i prizme. Kada X prođe trokutom Δ , onda dužine d_X ispunje čitavu trostranu prizmu. Konstruiramo li takvu prizmu za svaki trokut triangulacije, dobivamo da je polazna prizma zbroj trostranih. Sve te prizme imaju istu visinu kao i polazna.

Neka su površine trokutova triangulacije baze B_1, B_2, \dots, B_n , a v visina prizme. Prema dokazanom slučaju za trostranu prizmu, volumen joj je jednak produktu površine baze i visine, pa je prema (V2) volumen V prizme jednak

$$V = B_1v + B_2v + \dots + B_nv = (B_1 + B_2 + \dots + B_n)v.$$

No suma površina $B_1 + B_2 + \dots + B_n$ jednaka je površini B baze, pa je konačno $V = Bv$. ■

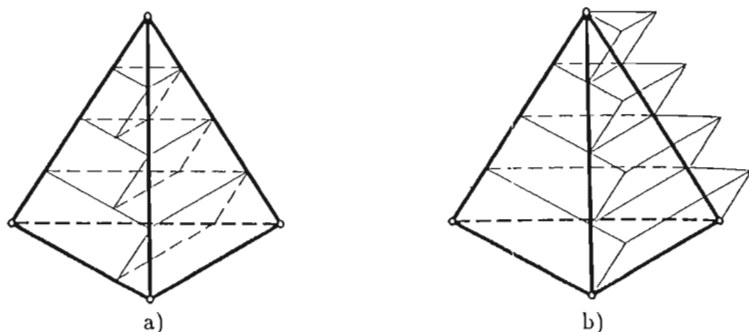
Sada ćemo izračunati volumen tetraedra i piramide, no prvo nam treba svojstvo jednakosti volumena trostranih piramida.

TEOREM 11. Dvije trostrane piramide s jednakim površinama osnovaka i jednakim visinama imaju jednake volumene (ako volumen postoji).

Dokaz. Promotrimo dakle dvije piramide s jednakim površinama P osnovaka i istom visinom v . Možemo uzeti da obje osnovke leže u istoj ravnini.

Podijelimo visinu svake piramide na n jednakih dijelova i djelišnim točkama povucimo ravnine paralelne ravnini osnovaka. Te ravnine dijele obje piramide na n slojeva. Za svaki sloj prve piramide konstruirajmo prizmu koja je sadržana u tom sloju kao na sl. 190a), dok za svaki sloj druge prizme konstruirajmo prizme koje sadrže sloj kao na sl. 190b).

Prizma u k -tom sloju prve piramide i prizma koja sadrži $(k-1)$ -vi sloj druge piramide (računajući od vrha) imaju jednake površine osnovaka, jer su te osnovke slične osnovkama polaznih piramida s istim koeficijentom sličnosti $\frac{k}{n}$. Isto tako, te prizme imaju jednake visine $\frac{v}{n}$. Prema prethodnom teoremu, one imaju jednake volumene.



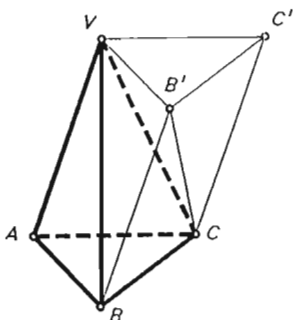
Sl. 190.

Označimo sa V_1 i V_2 volumene piramida, a sa V'_1 i V'_2 sume volumena prizmi u prvom i drugom slučaju. Tada je volumen prizme k -tog sloja prve piramide jednak volumenu prizme $(k-1)$ -vog sloja druge piramide. Stoga se V'_1 i V'_2 razlikuju samo za posljednji sloj druge piramide. Volumen prizme posljednjeg sloja druge piramide jednak je $P \cdot \frac{v}{n}$. Dakle, $V'_1 = V'_2 - P \cdot \frac{v}{n}$. Nadalje, očito je $V_1 > V'_1$ i $V_2 < V'_2$, pa odatle slijedi da je $V_2 - V_1 \leq P \cdot \frac{v}{n}$. Kako ova nejednakost vrijedi za svako n , to iz Arhimedovog aksioma slijedi da je $V_2 - V_1 \leq 0$, tj. $V_2 \leq V_1$. Zamjenom piramida dobivamo i suprotnu nejednakost $V_2 \geq V_1$. Prema tome je $V_1 = V_2$, što smo i htjeli dokazati.

Ova se konstrukcija katkad zove “đavolje stube”. ■

TEOREM 12 (volumen tetraedra). *Ako postoji volumen onda je volumen tetraedra jednak trećini produkta površine bilo koje strane i duljine pripadne visine tetraedra.*

Dokaz. Neka je $VABC$ tetraedar (tj. trostrana piramida) s bazom $\triangle ABC$ i vrhom V . Dopunimo tu piramidu do trostrane prizme s istom bazom i visinom kao i piramida, tj. do prizme $ABCVB'C'$ (sl. 191).



Sl. 191.

Ta prizma je suma triju trostranih piramida

$$V_{ABC} + V_{CC'B'} + V_{CBB'}.$$

Piramide $V_{CC'B'}$ i $V_{CBB'}$ imaju jednake površine baza, jer je $\triangle CC'B' \cong \triangle CBB'$, a imaju i zajedničku visinu spuštenu iz vrha V . Iz prethodnog teorema slijedi da imaju jednake volumene. Piramide V_{ABC} i $V_{CBB'}$ imaju jednake površine baza, jer je $\triangle VAB \cong \triangle BB'V$, a imaju i jednake visine spuštene iz vrha C . Stoga i one imaju jednake volumene.

Dakle, sve tri piramide imaju jednake volumene. Suma tih volumena jednaka je volumenu prizme, a taj je jednak $B \cdot v$, gdje je B površina baze, a v pripadna visina. Dakle, volumen piramide je jednak

$$V = \frac{1}{3} B \cdot v. \blacksquare$$

TEOREM 13 (volumen piramide). *Ako postoji, onda je volumen V piramide s površinom baze jednakom B i pripadnom visinom v jednak*

$$V = \frac{1}{3} B \cdot v.$$

Dokaz. Triangulirajmo bazu trokutima $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Tada je piramida jednaka zbroju trostranih piramida s bazama $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ i istim vrhom kao i vrh piramide. Stoga je volumen polazne piramide jednak sumi volumena tetraedara s bazama $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ i zajedničkom visinom v . Ako su B_1, B_2, \dots, B_n redom površine trokuta $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, onda je

$$V = \frac{1}{3} B_1 v + \frac{1}{3} B_2 v + \dots + \frac{1}{3} B_n v = \frac{1}{3} (B_1 + \dots + B_n) v = \frac{1}{3} B v. \blacksquare$$

Drugi dokaz za volumen piramide dat ćemo kasnije pomoću Cavalierijevog principa.

Primjer 25. Odredite volumen krnje piramide s površinama baza P_1 i P_2 ($P_1 > P_2$) i visinom v .

Rješenje.

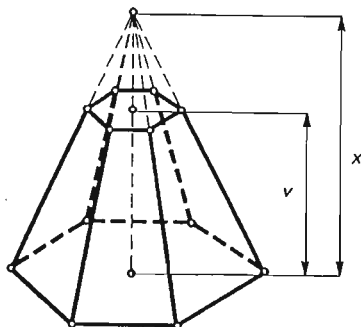
Nadopunimo krnju piramidu do pune piramide. Neka je visina čitave piramide x . Volumen krnje piramide (ako postoji) jednak je razlici volumena čitave piramide i volumena male (dopunske) piramide. One imaju redom površine baza P_1 i P_2 , a visine x i $x - v$ (sl. 192).

No baze su očito slični poligoni s koeficijentom sličnosti $\frac{x}{x-v}$. Stoga je

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{x}{x-v} \right)^2.$$

Odavde nalazimo da je $x = \frac{v\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}}$. Zato je traženi volumen krnje piramide jednak

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \left[P_1 \frac{v\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}} - P_2 \left(\frac{v\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}} - v \right) \right] = \frac{1}{3} v \frac{P_1\sqrt{P_1} - P_2\sqrt{P_2}}{\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}} = \\ &= \frac{1}{3} v \frac{(P_1^{1/2})^3 - (P_2^{1/2})^3}{P_1^{1/2} - P_2^{1/2}} = \frac{1}{3} v (P_1 + \sqrt{P_1 P_2} + P_2). \blacksquare \end{aligned}$$



Sl. 192.

Neka je sada $ABCD$ bilo koji tetraedar i O bilo koja točka u prostoru. Ako O ne pripada ravnini trokuta $\triangle BCD$, pisat ćemo $\epsilon(OBCD) = 1$ ili $\epsilon(OBCD) = -1$ već prema tome jesu li točke O i A s iste strane ili s raznih strana ravnine BCD . Ako točka O pripada ravnini BCD , onda pišemo $\epsilon(OBCD) = 0$. Na isti način se definiraju brojevi $\epsilon(OCDA)$, $\epsilon(ODAB)$, $\epsilon(OABC)$.

Sada se potpuno analogno, kao i u slučaju ravnine (usp. 1. dio, str. 247), dokaže sljedeće.

PROPOZICIJA 1. *Ako su $ABCD$ bilo koji tetraedar i O bilo koja točka u prostoru i ako postoji volumen v , onda vrijedi*

$$v(ABCD) = \epsilon(OBCD)v(OBCD) + \epsilon(OCDA)v(OCDA) + \epsilon(ODAB)v(ODAB) + \epsilon(OABC)v(OABC). \blacksquare$$

Sada je prirodno da **volumen poliedra** računamo tako da ga rastavimo (na neki način) na tetraedre, te da zbrojimo volumene tih tetraedara. Opet, potpuno analogno kao u slučaju ravnine, pomoću gornje propozicije dokaže se sljedeći teorem.

TEOREM 14. *Ako funkcija v zadovoljava aksiome (V1) – (V4), onda volumen $v(P)$ poliedra P ne ovisi o načinu prikaza poliedra P kao zbroja tetraedara. ■*

TEOREM 15. *Neka je $v : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana na skupu poliedara tako da vrijedi*

1. $v(\emptyset) = 0$;
2. *Ako je $\Delta \in \mathcal{P}$ tetraedar, onda je $v(\Delta)$ trećina produkta površine bilo koje strane i duljine pripadne visine tetraedra Δ ;*
3. *Ako je $P \in \mathcal{P}$ poliedar prikazan u obliku zbroja od konačno mnogo tetraedara, onda je $v(P)$ zbroj vrijednosti funkcije v za pojedine tetraedre tog zbroja. Tada je funkcija v volumen na skupu \mathcal{P} svih poliedara.*

Dokaz. Svojstva (V1) – (V3) dokazuju se posve analogno kao u slučaju ravnine. Dokažimo (V4). Kocka K stranice 1 može se očito prikazati kao zbroj dviju

trostranih prizmi, od kojih svaka ima osnovku površine $\frac{1}{2}$ i visinu duljine 1. Zato je $v(K) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$, pa vrijedi i (V4). ■

KOROLAR 1. Postoji jedinstvena funkcija $v : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ koja zadovoljava (V1) - (V4). ■

Podsjetimo da je preslikavanje f prostora preslikavanje sličnosti (ili ekviformno preslikavanje) ako postoji broj $s > 0$ takav da je $|f(A)f(B)| = s|AB|$, za svako $A, B \in \mathbb{R}^3$. Broj s se zove koeficijent sličnosti.

Dva poliedra P, P' su slična ako postoji preslikavanje sličnosti $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ prostora u sama sebe, tako da je $f(P) = P'$. Pišemo $P \sim P'$.

TEOREM 16 (o volumenu sličnih poliedara). Neka su P i P' slični poliedri, a koeficijent sličnosti neka je s . Tada je odnos volumena poliedara P i P' jednak

Dokaz. Rastavimo poliedar P na tetraedre T_1, T_2, \dots, T_n . Preslikavanje sličnosti $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ koje prevodi P u P' prevodi tetraedre T_1, T_2, \dots, T_n u tetraedre T'_1, T'_2, \dots, T'_n čiji je zbroj jednak poliedru P' . Stoga je volumen $v(P') = \sum_{i=1}^n v(T'_i)$. Kako je $T_i \sim T'_i$ s koeficijentom sličnosti s , to je omjer visina tih tetraedara jednak s , a omjer površina osnovaka jednak je s^2 . Stoga je omjer volumena tetraedara $v(T'_i) : v(T_i) = s^3$. Odavde slijedi da je $v(P') : v(P) = s^3$. ■

Osim volumena (sadržaja) poliedra još jedna numerička invarijanta poliedra jest oplošje poliedra, tj. zbroj površina njegovih strana.

Neki primjeri volumena poliedara i primjene

Primjer 26. Polovištem visine piramide povučena je ravnina paralelna ravnini osnovke piramide. U kojem omjeru ta ravnina dijeli volumen piramide?

Rješenje. Navedena ravnina odsijeca očito sličnu piramidu čitavoj piramidi. Koeficijent sličnosti je jednak omjeru visina, tj. $\frac{1}{2}$. Stoga je omjer volumena piramida jednak $\left(\frac{1}{2}\right)^3$. Zbog toga je omjer volumena dijelova na koje ta ravnina dijeli piramidu jednak

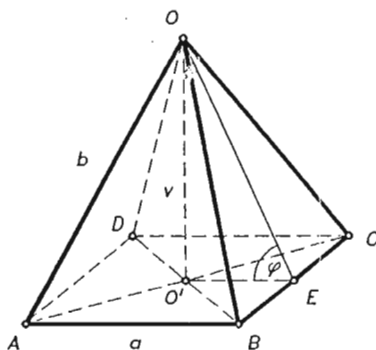
$$\frac{1}{8} : \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 1 : 7. \quad \blacksquare$$

Primjer 27. Odredite volumen V pravilne četverostrane piramide ako je zadana duljina izvodnice $b = 9$ cm i kut $\varphi = 45^\circ$ što ga zatvara pobočka s osnovkom.

Rješenje. Neka je ta piramida $OABCD$, gdje je O vrh, a osnovka $ABCD$ kvadrat stranice a . Neka je O' projekcija vrha na osnovku. Tada je $|OO'| = v$ visina piramide (sl. 193).

Volumen je tada jednak $V = \frac{a^2 v}{3}$. Neka je E polovište brida \overline{BC} . Iz $\triangle OO'E$ imamo

$$\text{tg } \varphi = \frac{v}{a/2}, \quad \text{tj.} \quad v = \frac{a}{2} \text{tg } \varphi.$$



Sl. 193.

Sada primijenimo Pitagorin poučak na $\triangle OO'C$. $\overline{O'C}$ je polovina dijagonale kvadrata, pa je $|O'C| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Stoga je $b^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$, tj. $b^2 = v^2 + \frac{1}{2}a^2$, a odavde, uvrštavanjem $v = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \varphi$, slijedi $b^2 = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{a^2}{2}$, odakle slijedi da je

$$a = \frac{2b}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \text{ a iz toga } v = \frac{b \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Prema tome, traženi volumen je jednak

$$V = \frac{a^2 v}{3} = \frac{4b^3 \operatorname{tg} \varphi}{3(2 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}. \text{ Posebno je } V = 108\sqrt{3} \text{ cm}^3. \blacksquare$$

Primjer 28. Na bridovima trobrida s vrhom O imamo po dvije točke A i A' , B i B' , C i C' . Dokažite da za volumene dobivenih tetraedara vrijedi

$$\frac{v(OABC)}{v(OA'B'C')} = \frac{|OA| \cdot |OB| \cdot |OC|}{|OA'| \cdot |OB'| \cdot |OC'|}.$$

Rješenje. Neka su h i h' duljine okomica spuštenih redom iz C i C' na ravninu OAB , te neka su P i P' redom površine trokuta $\triangle OAB$ i $\triangle OA'B'$. Tada je $h : h' = |OC| : |OC'|$ i $P : P' = (|OA| \cdot |OB|) : (|OA'| \cdot |OB'|)$. Kako je $v(OABC) = \frac{1}{3}hP$, $v(OA'B'C') = \frac{1}{3}h'P'$, to slijedi

$$\frac{v(OABC)}{v(OA'B'C')} = \frac{hP}{h'P'} = \frac{|OC|}{|OC'|} \cdot \frac{|OA| \cdot |OB|}{|OA'| \cdot |OB'|}. \blacksquare$$

Primjer 29. Dokažite da je volumen V tetraedra $ABCD$ dan sa

$$V = \frac{1}{6}|AB| \cdot |AC| \cdot |AD| \sin \beta \sin \gamma \sin D$$

gdje su β i γ plošni kutovi kod vrha A nasuprot bridovima \overline{AB} i \overline{AC} , a D diedarski kut kod brida \overline{AD} .

Rješenje. Visina $\triangle ABD$ iz vrha B jednaka je $|AB|\sin\gamma$, pa odavde slijedi da je visina tetraedra iz B na stranu ACD jednaka $|AB|\sin\gamma\sin D$. Površina $\triangle ACD$ jednaka je $\frac{1}{2}|AC||AD|\sin\beta$, pa formula slijedi. ■

Primjer 30. Površine dviju strana tetraedra su P_1 i P_2 , a je duljina njihovog zajedničkog brida, a α je diedar koji one zatvaraju. Dokažite da je volumen V tetraedra dan sa

$$V = \frac{2P_1P_2\sin\alpha}{3a}.$$

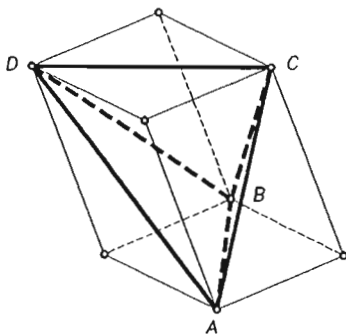
Rješenje. Neka su h_1 i h_2 visine tih dviju strana, spuštenih na njihov zajednički brid. Tada je $V = (h_1\sin\alpha)P_2/3 = (ah_1h_2\sin\alpha)/6$. U posljednji izraz treba još uvrstiti $h_1 = 2P_1/a$, $h_2 = 2P_2/a$, pa slijedi navedena formula. ■

Primjer 31. a) Neka je d udaljenost među nasuprotnim bridovima \overline{AB} i \overline{CD} tetraedra $ABCD$, a φ kut među njima. Dokažite da je volumen V tetraedra dan formulom

$$V = \frac{1}{6}d|AB||CD|\sin\varphi.$$

b) Na svakom od dva mimoilazna pravca u prostoru klizi po jedna dužina. Krajevi tih dužina u svakom momentu čine vrhove tetraedra. Dokažite da je volumen tetraedra konstantan.

c) U kojem omjeru dijeli volumen tetraedra ravnina paralelna dvama nasuprotnim bridovima, koja jedan od preostalih bridova dijeli u omjeru $\lambda = 2 : 1$.



Sl. 194.

Rješenje.

a) Promotrimo dopunjeni paralelepiped tetraedru (tj. svakim bridom položimo ravninu paralelnu nasuprotnom bridu v. sl. 194). Jedna baza tog paralelepipeda je paralelogram s duljinom dijagonala $|AB|$ i $|CD|$ i kutom φ među tim dijagonalama. Površina tog paralelograma je jednaka $\frac{1}{2}|AB||CD|\sin\varphi$. Visina tog paralelepipeda je jednaka d . Volumen našeg tetraedra je jednak $\frac{1}{3}$ volumena paralelepipeda, jer njegove strane odsijecaju četiri tetraedra, od kojih je svaki volumena $\frac{1}{6}$ volumena paralelepipeda.

b) Ako je a duljina jedne dužine, b druge, a d udaljenost među mimoilaznim pravcima i φ kut među njima, onda je volumen tetraedra, prema a) jednak $abd\sin\varphi/6$, dakle konstantan.

c) Neka je M ravnina paralelna bridovima (tj. pravcima) AB i CD . Neka M siječe bridove \overline{AC} , \overline{BC} , \overline{BD} i \overline{AD} redom u točkama P , Q , R , S (nacrtajte sliku). Prema pretpostavci je $|AP| : |PC| = |BQ| : |QC| = \lambda$ i $|AS| : |SD| = |BR| : |RD| = \lambda$, pa je $\triangle CPQ \sim \triangle CAB$ i $\triangle DSR \sim \triangle DAB$ (S-K-S). Zato je $PQ \parallel AB \parallel RS$ i $|PQ| = |RS| = \frac{\lambda}{1+\lambda}|AB|$. Isto tako je i $PS \parallel CD \parallel RQ$ i $|PS| = |QR| = \frac{\lambda}{1+\lambda}|CD|$. Zbog toga je $PQRS$ paralelogram. Njegove dijagonale su \overline{PR} i \overline{QS} . $PR \parallel AB$ i $QS \parallel CD$ i $|PR| = \frac{\lambda}{1+\lambda}|AB|$, $|QS| = \frac{\lambda}{1+\lambda}|CD|$. Kut među dijagonalama PR i QS je također φ . Stoga je površina tog presjeka (paralelograma) jednaka $\frac{1}{2}|PR||QS|\sin\varphi = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}|AB||CD|\sin\varphi$.

Dio tetraedra na koji ih dijeli ova ravnina a u kojoj su vrhovi A i B sastoji se od jedne četverostrane piramide (baza $PQRS$ i vrh A) i tetraedra $ABQR$. Visina piramide je $d' = \frac{\lambda}{1+\lambda}d$, pa je volumen piramide jednak

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} |AB||CD|\sin\varphi \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda}d = \frac{1}{6} \frac{\lambda^3 d}{(1+\lambda)^3} |AB||CD|\sin\varphi.$$

Volumen tetraedra $ABQR$ je jednak

$$\frac{1}{6}d'|AB||QR|\sin\varphi = \frac{1}{6} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}d|AB||CD|\sin\varphi.$$

Dakle, volumen V_1 tog dijela polaznog tetraedra je jednak

$$V_1 = \left(\frac{\lambda^3}{(1+\lambda)^3} + \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} \right) \frac{1}{6}d|AB||CD|\sin\varphi = \left(\frac{\lambda^3}{(1+\lambda)^3} + \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} \right) V.$$

Preostali dio tetraedra ima volumen $V_2 = \left(1 - \frac{\lambda^3}{(1+\lambda)^3} - \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} \right) V$. Traženi omjer

je stoga jednak $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\lambda^3 + \lambda^2}{1 + 3\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3}$. U posebnom slučaju $\lambda = 2$ je $\frac{V_1}{V_2} = \frac{20}{7}$. ■

Primjer 32. Neka je V volumen, a O oplošje poliedra kojemu se može upisati sfera radijusa r . Dokažite da je

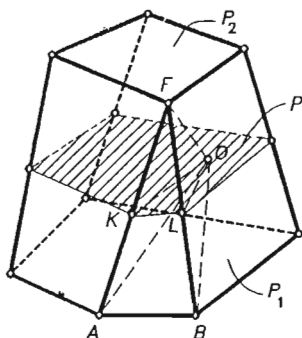
$$V = \frac{rO}{3}.$$

Rješenje. Spojimo centar sfere sa svim vrhovima poliedra. Na taj je način poliedar rastavljen na piramide. Visina svake od piramida je r , a baze su strane poliedra. Suma njihovih površina je oplošje O , pa slijedi da je $V = rO/3$. ■

Primjer 33. Svi vrhovi konveksnog poliedra (prizmatoida) leže u dvije paralelne ravnine na udaljenosti v . Neka su P_1 i P_2 površine strana u tim ravninama, a P površina presjeka tog poliedra s ravninom na jednakoj udaljenosti od tih ravnina. Dokažite da je volumen V tog poliedra dan Simpsonovom formulom:

$$V = \frac{1}{6}v(P_1 + P_2 + 4P).$$

Rješenje.

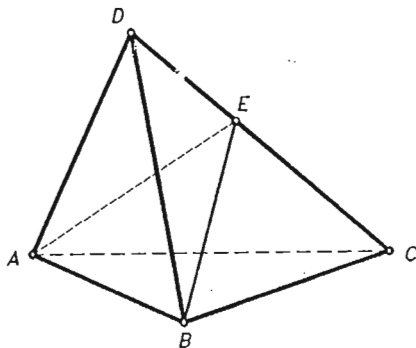


Sl. 195.

Neka je O bilo koja točka unutar poligona s površinom P . Očito svaku stranu našeg poliedra koja ima vrhove na obje krajnje ravnine možemo triangulirati i to bez uvođenja novih vrhova. Zbog toga se naš poliedar može zapisati kao suma dviju piramida s vrhom O i bazama koje su poligoni s površinama P_1 i P_2 i suma tetraedara s vrhom O čije su baze trokuti navedene triangulacije "plašta". Volumeni dviju piramida su $vP_1/6$ i $vP_2/6$. Promotrimo bilo koji od spomenutih tetraedara, npr. $OABF$. Kako je zbog sličnosti $p(\triangle ABF) = 4p(\triangle KLF)$, to je $v(OABF) = 4v(OKLF) = 4 \cdot \frac{1}{6}vp(\triangle OKL) = \frac{2}{3}vp(\triangle OKL)$. Stoga, ako je p_i površina presjeka i -tog tetraedra s tom srednjom ravninom, onda je volumen tog tetraedra jednak $2vp_i/3$. Zbroj svih tih površina $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ je jednak površini P . Zbrajanjem svih tih volumena dobivamo navedenu formulu. ■

Primjer 34. Simetralna ravnina diedra kod nekog brida tetraedra dijeli nasuprotni brid tetraedra u omjeru površina strana koje zatvaraju taj diedar. Dokažite ovaj prostorni analog teorema o simetrali unutarnjeg kuta trokuta (1. dio, str. 224).

Rješenje.



Sl. 196.

Simetralna ravnina diedra kod brida \overline{AB} tetraedra $ABCD$ siječe nasuprotni brid \overline{CD} u točki, recimo, E (sl. 196). Čitav tetraedar je podijeljen na dva tetraedra $ABCE$ i $ABED$. Omjer $|CE| : |DE|$ jednak je omjeru visina spuštenih iz vrhova C i D na zajedničku bazu $\triangle ABE$ tih tetraedara. No omjer visina tih tetraedara jednak je omjeru volumena $v(ABCE) : v(ABED)$. Neka su h_1 i h_2 visine spuštene iz vrha E na ravnine ABC i ABD . No kako je E na simetralnoj ravnini, to su udaljenosti do ravnina koje zatvaraju diedar jednake, tj. $h_1 = h_2$. Stoga konačno dobivamo da je $|CE| : |DE| = p(\triangle ABC) : p(\triangle ABD)$. ■

Primjer 35. a) Unutar tetraedra $A_1A_2A_3A_4$ dana je bilo koja točka O . Neka je x_i udaljenost od O do strane tetraedra nasuprot vrhu A_i , a h_i visina tetraedra spuštена iz vrha A_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1.$$

b) Konveksni poliedar ima površine svih strana jednake. Dokažite da suma udaljenosti bilo koje točke unutar poliedra do njegovih strana ne ovisi o položaju točke.

Rješenje. a) Spojimo O s vrhovima A_1, A_2, A_3, A_4 . Tada se polazni tetraedar raspada na četiri tetraedra čije su baze strane tetraedra, a vrh u točki O . Tada je x_1 visina tetraedra $OA_2A_3A_4$, pa je $\frac{x_1}{h_1} = \frac{v(OA_2A_3A_4)}{v(A_1A_2A_3A_4)}$ i analogno za ostale omjere. Iz $v(OA_2A_3A_4) + v(OA_1A_3A_4) + v(OA_1A_2A_4) + v(OA_1A_2A_3) = v(A_1A_2A_3A_4)$ slijedi tada tvrdnja.

b) Neka je V volumen poliedra, a P površina svake njegove strane. Neka je X bilo koja točka unutar poliedra, a x_i udaljenost točke X do i -te strane $i = 1, \dots, n$. Spojimo li X s vrhovima poliedra, dobivamo rastav poliedra na sumu piramida čije su baze strane poliedra, a vrh točka X . Stoga imamo

$$V = \frac{1}{3}Px_1 + \frac{1}{3}Px_2 + \dots + \frac{1}{3}Px_n \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{3V}{P}. \quad \blacksquare$$

Primjer 36. Neka je r radijus upisane sfere tetraedru, a r_a, r_b, r_c, r_d radijusi pripisanih sfera, tj. onih koje diraju jednu stranu i produžetke preostalih triju. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_d} = \frac{2}{r}.$$

Rješenje. Neka je $ABCD$ tetraedar i P_a, P_b, P_c, P_d površine strana BCD, ACD, ABD i ABC redom. Neka je O_a centar sfere koja dira stranu BCD i produžetke preostale tri strane i neka je V volumen tetraedra $ABCD$. Tada vrijedi (usp. ravninski analogon, 1. dio, str. 253): $3V = r_a(-P_a + P_b + P_c + P_d)$, pa stoga $1/r_a = (-P_a + P_b + P_c + P_d)/3V$. Zapišemo li analogno preostala tri radijusa pripisanih sfera, zbrajanjem slijedi

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_d} = \frac{2(P_a + P_b + P_c + P_d)}{3V} = \frac{2}{r}.$$

(Posljednju jednakost dokažite sami.) ■

Primjer 37. Dokažite da za bilo koji tetraedar postoji trokut kojem su duljine stranica jednake produktima duljina nasuprotnih bridova tetraedra.

Neka je P površina tog trokuta, V volumen, a R radijus opisane sfere polaznog tetraedra. Dokažite Crelleovu¹⁴ formulu

$$P = 6VR.$$

¹⁴ August Crelle (1780 - 1855), njemački matematičar i inženjer.

Rješenje. Poslužiti ćemo se inverzijom u prostoru. Neka je $ABCD$ dani tetraedar. Promotrimo inverziju $\mathcal{I} = \mathcal{I}_D^r$, tj. s centrom inverzije D i radijusom inverzije r (tj. sa sferom inverzije $S(D, r)$). Za točku $X (\neq D)$, neka je njena slika $\mathcal{I}(X) = X^*$. Tada, kao i u ravni (usp. 1. dio, str. 301), vrijedi

$$|A^*B^*| = \frac{|AB|}{|DA| \cdot |DB|} r^2, \quad |B^*C^*| = \frac{|BC|}{|DB| \cdot |DC|} r^2, \quad |A^*C^*| = \frac{|AC|}{|DA| \cdot |DC|} r^2.$$

Uzmemo li r takav da je $r^2 = |DA| \cdot |DB| \cdot |DC|$, dobivamo da je $\triangle A^*B^*C^*$ traženi trokut.

Da izračunamo površinu P trokuta $\triangle A^*B^*C^*$ izračunajmo prvo volumen tetraedra $A^*B^*C^*D$, kao i njegovu visinu iz vrha D . Opisana sfera tetraedra $ABCD$ prelazi inverzijom \mathcal{I}_D^r u ravninu trokuta $\triangle A^*B^*C^*$. Iz definicije inverzije odmah se vidi da je udaljenost od D do te ravnine jednaka $r^2/2R$. Prema Primjeru 28, omjer volumena $v(ABCD)$ i $v(A^*B^*C^*D)$ jednak je produktu omjera duljina bridova koji izlaze iz vrha D . Stoga je

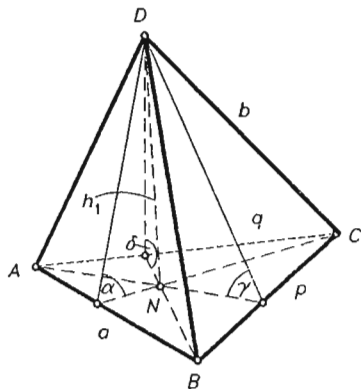
$$v(A^*B^*C^*D) = V \frac{|DA^*|}{|DA|} \cdot \frac{|DB^*|}{|DB|} \cdot \frac{|DC^*|}{|DC|} = V \left(\frac{r}{|DA|} \right)^2 \left(\frac{r}{|DB|} \right)^2 \left(\frac{r}{|DC|} \right)^2 = Vr^2.$$

S druge strane je $v(A^*B^*C^*D) = \frac{1}{3} h_d P$. Dakle je

$$Vr^2 = \frac{1}{3} \frac{r^2}{2R} P \Rightarrow P = 6VR. \quad \blacksquare$$

Primjer 38. Dokazite ovaj Bretschneiderov teorem. Neka su a i b dva nasuprotna brida tetraedra, a α i β diedri kod tih bridova. Tada veličina $a^2 + b^2 + 2ab \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$ ne ovisi o izboru para nasuprotnih bridova.

Rješenje. Neka su P_1 i P_2 površine strana tetraedra sa zajedničkim bridom a , te P_3 i P_4 površine strana sa zajedničkim bridom b . Neka su nadalje a, p, q duljine bridova strana tetraedra s površinom P_1 , a α, γ i δ veličine diedara kod tih bridova, h_1 visina tetraedra na tu stranu, N nožište te visine, a V volumen tetraedra.



Sl. 197.

Spojimo li N s vrhovima A, B, C , onda iz

$$p(\triangle ABC) = p(\triangle ANB) + p(\triangle BNC) + p(\triangle ANC)$$

slijedi

$$ah_1 \operatorname{ctg} \alpha + ph_1 \operatorname{ctg} \gamma + qh_1 \operatorname{ctg} \delta = 2P_1.$$

Zbog $h_1 = 3V/P_1$ slijedi

$$a \operatorname{ctg} \alpha + p \operatorname{ctg} \gamma + q \operatorname{ctg} \delta = 2P_1^2/3V.$$

Zbrojimo li takve jednakosti za strane s površinama P_1 i P_2 i oduzmemo li preostale dvije takve jednakosti, dobivamo

$$a \operatorname{ctg} \alpha - b \operatorname{ctg} \beta = (P_1^2 + P_2^2 - P_3^2 - P_4^2)/3V.$$

Ako ovu jednakost kvadriramo i uvrstimo $\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$, $\operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{1}{\sin^2 \beta} - 1$, uzevši

u obzir $\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{4P_1^2 P_2^2}{9V^2}$, $\frac{b^2}{\sin^2 \beta} = \frac{4P_3^2 P_4^2}{9V^2}$ (v. Primjer 30), dobivamo

$$a^2 + b^2 + 2ab \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{2Q - T}{9V^2},$$

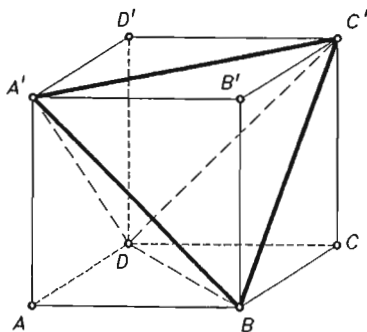
gdje je Q suma kvadrata produkata površina po dviju strana, a T suma četvrtih potencija površina. ■

Primjer 39. a) Može li se kocka razrezati na tri piramide jednakog volumena?

b) Na koliko se najmanje tetraedara može razrezati kocka?

Rješenje. a) Može. Uzmemo jedan vrh kocke kao vrh triju piramida, osnovke kojih su tri nesusedne strane s tim vrhom.

b)



Sl. 198.

Ako iz kocke $ABCD A' B' C' D'$ izrežemo tetraedar $A' B C' D'$, preostali dio kocke se čisto sastoji od 4 tetraedra, pa dakle kocku možemo razrezati ("raspiliti") na pet tetraedara.

Dokažimo da kocku ne možemo razrezati na manje od pet tetraedara. Strana $ABCD$ ne može biti strana samo jednog od tetraedara koji čine kocku, pa stoga bar dva tetraedra

leže na toj strani. Promotrimo sve tetraedre koji sijeku stranu $ABCD$. Njihove visine spuštene na $ABCD$ su najviše jednake $a = |AA'|$, a suma površina njegovih strana na $ABCD$ je $\leq a^2$. Stoga je suma njihovih volumena $\leq a^3/3$. Strane jednog tetraedra ne mogu biti smještene na nasuprotnim stranama kocke, pa stoga na stranama $ABCD$ i $A'B'C'D'$ leže barem četiri tetraedra, a suma njihovih volumena je $\leq 2a^3/3 < a^3$. Prema tome, ostaje mjesta za još jedan tetraedar. ■

Primjer 40. Neka je P (konveksni) poliedar kojem se može upisati sfera. Ravnina koja siječe P dijeli njegov volumen na dijelove V_1 i V_2 , a oplošje na dijelove O_1 i O_2 . Dokazite da je $V_1 : V_2 = O_1 : O_2$ ako i samo ako ravnina prolazi centrom S upisane sfere.

Rješenje. Neka je, određenosti radi, centar S u dijelu poliedra volumena V_1 . Promotrimo piramidu s vrhom S , čija je osnovka presjek ravnine s poliedrom P . Neka je V volumen te piramide. Tada je $V_1 - V = rO_1/3$ i $V_2 + V = rO_2/3$, gdje je r radijus upisane sfere (v. Primjer 32). Stoga je $O_1 : O_2 = V_1 : V_2 \Leftrightarrow (V_1 - V) : (V_2 + V) = O_1 : O_2 = V_1 : V_2$. To onda znači da je $V = 0$, pa točka S leži na presječnoj ravnini. ■

Primjer 41. Skup točaka (koordinatnog) prostora čije su sve tri koordinate cijeli brojevi zove se cjelobrojna rešetka, a same točke čvorovi cjelobrojne rešetke.

a) Zadan je paralelepiped (ne nužno uspravni) čiji su vrhovi čvorovi cjelobrojne rešetke. Pretpostavimo da je u njegovoj unutrašnjosti ukupno a čvorova rešetke, u unutrašnjostima njegovih strana ukupno b čvorova, a unutar bridova ukupno c čvorova. Dokazite Pickovu¹⁵ formulu, tj. da je volumen V paralelepipeda dan sa

$$V = 1 + a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}.$$

b) Dokazite da postoji tetraedar čije su jedine točke čvorovi cjelobrojne rešetke vrhovi, a koji ima po volji veliki volumen.

Rješenje. a) Možemo uzeti da je jedan vrh paralelepipeda u ishodištu. Neka je $K_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|, |y|, |z| \leq n\}$. K_1 je kocka s centrom u ishodištu. Rastavimo prostor paralelepipedima kongruentnim danom paralelepipedu ravninama koje su paralelne njegovim stranama. Susjedni paralelepipedi se dobiju iz originalnog translacijom za cjelobrojni vektor, pa stoga i svi oni imaju cjelobrojne vrhove. Neka N tih paralelepipeda siječe kocku K_1 . Svi se oni nalaze unutar kocke K_2 čije apsolutne vrijednosti koordinata ne prelaze $n + d$, gdje je d najveća od udaljenosti među vrhovima danog paralelepipeda. Neka je V njegov volumen.

Kako N paralelepipeda sadrži kocku K_1 , a sadržani su u K_2 , slijedi da je $(2n)^3 \leq NV \leq (2n + 2d)^3$, tj.

$$\left(\frac{1}{2n + 2d}\right)^3 \leq \frac{1}{NV} \leq \left(\frac{1}{2n}\right)^3. \quad (1)$$

Sada promotrimo sve cjelobrojne točke unutar ili na rubu tih N paralelepipeda. Svakoju unutrašnjoj točki nekog od tih paralelepipeda pridružimo broj 1, točki na nekoj strani pridružimo $\frac{1}{2}$, točki na bridu $\frac{1}{4}$, a vrhu $\frac{1}{8}$. Ako je neka točka na više paralelepipeda, pridružimo joj toliko brojeva. Promotrimo sumu svih tih brojeva. S jedne strane je ta suma očito jednaka $N(1 + a + b/2 + c/4)$. Nadalje, suma tih brojeva u svim cjelobrojnim čvorovima kocke K_1 jednaka je 1, jer svaka točka na strani pripada dvama paralelepipedima, točkom na bridu prolaze četiri, a točkom u vrhu osam paralelepipeda. Suma tih brojeva u svim cjelobrojnim točkama unutar kocke K_2 je najviše jednaka 1, dok izvan K_2 takvih brojeva nema.

¹⁵G. Pick (1859 – 1943), njemački matematičar.

Dakle, promatrana suma je između broja cjelobrojnih točaka kocaka K_1 i K_2 . Stoga dobivamo

$$(2n + 1)^3 \leq N(1 + a + b/2 + c/4) \leq (2n + 2d + 1)^3. \quad (2)$$

Iz množimo li (1) i (2) dobivamo da za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left(\frac{2n+1}{2n+2d}\right)^3 \leq \frac{1+a+b/2+c/4}{V} \leq \left(\frac{2n+2d+1}{2n}\right)^3.$$

Ako pustimo $n \rightarrow \infty$, lijeva i desna strana teže ka 1, pa stoga dobivamo $V = 1 + a + b/2 + c/4$.

b) Promotrimo kvadar $ABCD A' B' C' D'$ s cjelobrojnim vrhovima, čije su duljine bridova jednake 1, 1 i n . Tetraedar $A' B C' D$ ima za cjelobrojne točke samo vrhove. Njegov volumen je $n/3$. ■

5.6. Vektori u prostoru i poliedri. Vektorski produkt

Za vektore u prostoru vrijedi gotovo sve što je navedeno i za vektore u ravnini (v. 1. dio, str. 282 i dalje). Ponovimo ukratko. Kažemo da su vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ **linearno nezavisni** ako iz $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$ slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Inače su **linearno zavisni vektori**. Odmah se vidi da u prostoru najviše tri vektora mogu biti linearno nezavisna, pa je stoga i **dimenzija** vektorskog prostora V^3 jednaka 3. Prema tome, ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tri linearno nezavisna vektora u prostoru, onda se svaki vektor \vec{d} može jedinstveno zapisati kao njegova **linearna kombinacija**, tj. postoje jedinstveni brojevi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

Skalarni produkt dvaju vektora definira se isto kao za ravninu (v. IV, §8). Dakle, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Ako su vektori \vec{a} i \vec{b} zadani u Kartezijevom pravokutnom sustavu (v. VI, §9.2) svojim koordinatama, tj. ako je $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, onda je skalarni produkt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Primjer 42. a) Neka je $ABCD$ tetraedar. Dokazite da vrijedi

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

b) Pomoću toga pokažite da ako su dva para mimoilaznih bridova tetraedra okomiti, onda je i treći par međusobno okomit.

Rješenje. a) Vektorizirajmo tetraedar tako da je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. Tada je $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{b} - \vec{c}) = -\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{b}$. Zbrajanjem tih relacija slijedi navedena jednakost.

b) Ako je npr. $AB \perp CD$ i $BC \perp AD$, onda je $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ i $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, pa iz a) slijedi $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, tj. $AC \perp BD$. ■

Primjer 43. Zadan je konveksni poliedar. Dokažite da suma udaljenosti neke točke unutar poliedra do ravnina strana ne ovisi o položaju točke ako i samo ako je suma vektora jediničnih vanjskih normala jednaka nuli.

Rješenje. Neka su $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_s$ jedinične vanjske normale na strane poliedra, X bilo koja točka unutar poliedra, O neka čvrsta točka unutar poliedra, a T_1, T_2, \dots, T_s bilo koje točke na stranama poliedra. Tada je suma udaljenosti od X do strana jednaka

$$\sum_{i=1}^s \overrightarrow{XT_i} \cdot \vec{e}_i = \sum_{i=1}^s \overrightarrow{XO} \cdot \vec{e}_i + \sum_{i=1}^s \overrightarrow{OT_i} \cdot \vec{e}_i.$$

Odavde vidimo da ta suma ne ovisi o X ako i samo ako je $\sum \overrightarrow{XO} \cdot \vec{e}_i = 0$, a to je ako i samo ako je $\sum \vec{e}_i = \vec{0}$. ■

Primjer 44. Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ jedinični vektori iz centra pravilnog tetraedra prema vrhovima, a \vec{v} bilo koji vektor. Dokažite da je

$$(\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{v})\vec{b} + (\vec{c} \cdot \vec{v})\vec{c} + (\vec{d} \cdot \vec{v})\vec{d} = 4\vec{v}/3.$$

Rješenje. Izrazimo vektor \vec{v} kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, tj. $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Dovoljno je stoga dokazati formulu za vektore \vec{a}, \vec{b} i \vec{c} . Centar pravilnog tetraedra dijeli težišnicu u omjeru 1 : 3, pa je $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = -1/3$. Koristeći $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$, imamo za $\vec{v} = \vec{a}$: $(\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{c} + (\vec{a} \cdot \vec{d})\vec{d} = \vec{a} - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{4}{3}\vec{a}$. Analogno se dobije za $\vec{v} = \vec{b}$ i $\vec{v} = \vec{c}$. ■

Primjer 45. a) Neka je T bilo koja točka unutar pravilnog tetraedra i neka su TA_i okomice spuštene iz T na stranu tetraedra (A_i su nožišta, $i = 1, 2, 3, 4$). Dokažite da je $\overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TA_2} + \overrightarrow{TA_3} + \overrightarrow{TA_4} = 4\overrightarrow{TO}/3$, gdje je O centar tetraedra.

b) Neka je \vec{v} bilo koji vektor u prostoru, a $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ ortogonalne projekcije vektora \vec{v} na strane pravilnog tetraedra. Dokažite da je $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = 4\vec{v}/3$.

Rješenje. a) Iz točke O spustimo okomice OB_i na strane tetraedra, $i = 1, 2, 3, 4$. Odmah se vidi da je $B_1B_2B_3B_4$ pravilni tetraedar (homotetičan polaznome s koeficijentom homotetije -3). Stoga je suma $\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OB_4} = \vec{0}$. Neka je $\vec{e}_i = \overrightarrow{OB_i}/|\overrightarrow{OB_i}|$ jedinični vektor u smjeru $\overrightarrow{OB_i}$. Tada $(\overrightarrow{OT} \cdot \vec{e}_i)\vec{e}_i + \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OB_i}$. Zbrajanjem tih jednakosti slijedi $\sum \overrightarrow{TA_i} = \sum (\overrightarrow{TO} \cdot \vec{e}_i)\vec{e}_i = 4\overrightarrow{TO}/3$, pri čemu smo se koristili prethodnim primjerom.

b) Dokaz je sličan i provedite ga sami. ■

Primjer 46. ("Teorem o ježu za poliedre"). Neka je P konveksni poliedar čije su strane B_1, B_2, \dots, B_s , a $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_s$ vektori definirani ovako: \vec{n}_i je okomit na stranu B_i , orijentiran je prema vanjštini poliedra, a modul mu je jednak površini $P_i = p(B_i)$ strane B_i , $i = 1, 2, \dots, s$. Dokažite da je

$$\sum_{i=1}^s \vec{n}_i = \vec{0}.$$

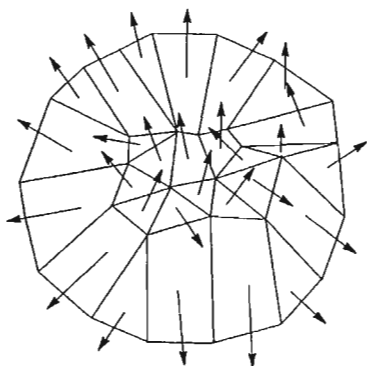
Rješenje. Neka je X bilo koja točka unutrašnjosti poliedra, h_i njezina udaljenost do strane B_i , a V volumen poliedra, $i = 1, 2, \dots, s$. Tada je očito $3V = \sum h_i P_i$.

Neka je nadalje $\vec{e}_i = \vec{n}_i/|\vec{n}_i|$ jedinični vektor u smjeru vektora \vec{n}_i . Tada je $\vec{n}_i = P_i \vec{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$. Neka je $O \neq X$ bilo koja čvrsta točka poliedra, a $T_i \in B_i$ bilo koja točka

na strani B_i . Tada je $h_i = \overrightarrow{XT_i} \cdot \vec{e}_i$. Stoga imamo

$$\begin{aligned} 3V &= \sum_{i=1}^s h_i P_i = \sum_{i=1}^s \overrightarrow{XT_i} \cdot P_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^s \overrightarrow{XO} \cdot \vec{n}_i + \sum_{i=1}^s \overrightarrow{OT_i} \cdot \vec{n}_i = \\ &= \overrightarrow{XO} \cdot \left(\sum_{i=1}^s \vec{n}_i \right) + 3V. \end{aligned}$$

Oдавде slijedi da je $\overrightarrow{OX} \cdot \sum_{i=1}^s \vec{n}_i = 0$, a to povlači $\sum_{i=1}^s \vec{n}_i = \vec{0}$.



Sl. 199.

(Fizikalna interpretacija je ova. Zamislamo da je posuda u obliku konveksnog poliedra napunjena plinom. Tada je tlak na svaku stranu posude proporcionalan njezinoj površini i usmjeren je prema van, pa je njihova suma nul-vektor.)

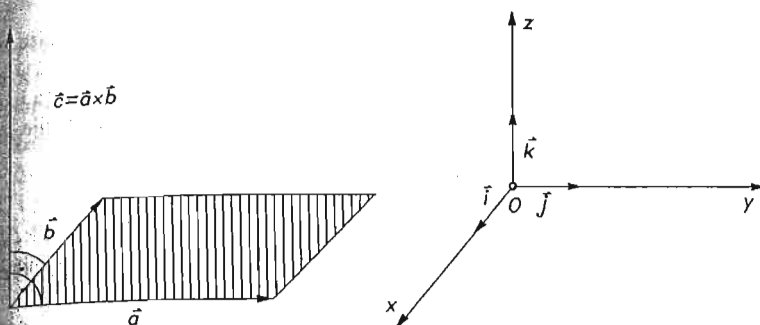
Napomenimo da vrijedi i obrat teorema. Ako su $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_s$ ne nul-vektori koji razapinju prostor, te nikoja dva nisu pozitivno proporcionalna, a suma im je nula, onda postoji konveksni poliedar P kome su $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_s$ vektori normale, tj. P je jedinstven do na translaciju. To je teorem Minkowskog. ■

Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ dvaju vektora \vec{a} i \vec{b} u prostoru je vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ definiran ovako:

- Modul $|\vec{c}|$ jednak je površini paralelograma razapetog vektorima \vec{a} i \vec{b} ;
- $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, tj. \vec{c} je okomit na ravninu određenu s \vec{a} i \vec{b} ;
- Uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ čini desni sustav, tj. definiraju takvu orijentaciju kao palac (\vec{a}), kažiprst (\vec{b}) i srednjak (\vec{c}) desne ruke. Točnije rečeno, ako su \vec{a} i \vec{b} linearno nezavisni, onda postoji izomorfizam A prostora na samog sebe tako da

je $A(\vec{a}) = \vec{i} = \overrightarrow{OE_1}$, $A(\vec{b}) = \vec{j} = \overrightarrow{OE_2}$, $A(\vec{c}) = \vec{k} = \overrightarrow{OE_3}$, gdje je O ishodište, a $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$ jedinične točke na koordinatnim osima trodimenzionalnog koordinatnog sustava u prostoru (usp. pogl. VI, Analitička geometrija, §9).

V - b



Sl. 200.

Očito da ako su \vec{a} i \vec{b} kolinearni, onda je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Kao što se ponekad skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bilježi sa (\vec{a}, \vec{b}) , tako se i vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ ponekad zapisuje kao $[\vec{a}, \vec{b}]$.

TEOREM 17 (osnovna svojstva vektorskog produkta). Za bilo koje vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ i brojeve λ, μ vrijedi:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (antikomutativnost);

2) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ i \vec{b} su kolinearni;

3) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$;

4) Volumen V paralelepipeda razapetog vektorima \vec{a}, \vec{b} i \vec{c} jednak je

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|;$$

5) $(\lambda \vec{a}) \times (\mu \vec{b}) = \lambda \mu (\vec{a} \times \vec{b})$;

6) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (distributivnost);

7) Ako su vektori \vec{a} i \vec{b} zapisani u koordinatnom sustavu kao $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, onda je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

gdje ovu determinantu shvaćamo kao razvijenu po prvom retku;

8) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$;

9) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$;

10) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ (Jacobijev¹⁶ identitet).

Dokaz. Svojstva 1) i 2) odmah slijede iz definicije.

3) Ako je $ABCD$ paralelogram i $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, onda mu je površina $P = |\vec{a}| \cdot v$, gdje je v visina paralelograma iz vrha D na stranicu \vec{AB} . No, $v = |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$, pa je $P = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

¹⁶Karl G. Jacobi (1804 - 1851), njemački matematičar.

Svojstvo 4) slijedi iz definicije modula vektorskog produkta i činjenice da je volumen paralelepipeda jednak umnošku površine osnovke i visine.

5) Dovoljno je dokazati $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$. Ako je $\lambda = 0$, onda je to istinito na trivijalan način. Ako je $\lambda > 0$, onda su vektori \vec{a} i $\lambda \vec{a}$ iste orijentacije, pa je $\sphericalangle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, a to povlači da je

$$|(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda \vec{a}| |\vec{b}| \sin \sphericalangle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

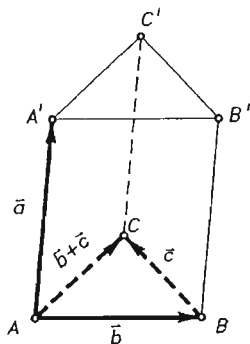
Kako su zbog $\lambda > 0$ vektori $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ iste orijentacije, to je tvrdnja dokazana. Slično se tvrdnja dokazuje za $\lambda < 0$.

6) Promotrimo prizmu $ABCA'B'C'$, gdje je $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$, pa stoga $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{c}$ (sl. 201). Navedena jednakost znači da je suma triju vektora vanjskih (ili unutarnjih) normala na pobočke prizme čiji su moduli jednaki površinama odgovarajućih strana prizme, jednaka nuli. No to odmah slijedi iz "teorema o ježu" (Primjer 46) za tu prizmu, jer su normale na osnovke prizme međusobno suprotni vektori.

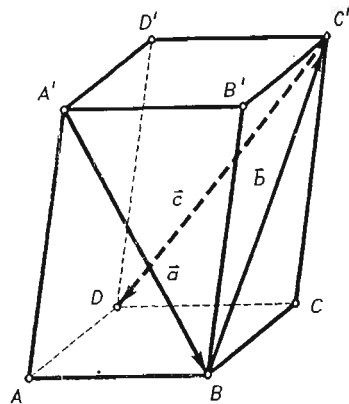
Na drugi način se to vidi ovako. Neka je $\Delta A_1 B_1 C_1$ presjek prizme s ravninom koja je okomita na pobočni brid. Rotacijom vektora normale za 90° u ravnini ABC oni prelaze u vektore $a\overrightarrow{A_1 B_1}$, $a\overrightarrow{B_1 C_1}$ i $a\overrightarrow{C_1 A_1}$, gdje je $a = |\vec{a}|$ duljina pobočnog brida. No, suma tih vektora je očito nula.

7) Očito je $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ itd. Koristeći svojstva 1), 2) 5) i 6) imamo $\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = (a_x \vec{i}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) + (a_y \vec{j}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) + (a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$, a ovo je točno navedena determinanta razvijena po prvom retku.

8) i 9) se lagano dokazuju koristeći 7) i činjenicu da je skalarni produkt vektora $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ i $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ jednak $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Stoga taj malo dulji račun prepuštamo čitatelju.



Sl. 201.



Sl. 202.

10) Iz 8) slijedi da je $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$, $\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a})$. Zbrajanjem tih triju jednakosti odmah slijedi tvrdnja.

Geometrijsko značenje Jacobijevog identiteta je ovo. Neka je O točka u unutrašnjosti $\triangle ABC$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Tada je $\vec{a}p(\triangle BOC) + \vec{b}p(\triangle COA) + \vec{c}p(\triangle OAB) = \vec{0}$. Naime, vektori $\vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{c} \times \vec{a}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ su okomiti na ravninu trokuta ABC i jednako su orijentirani, a njihove duljine su redom $2p(\triangle BOC)$, $2p(\triangle COA)$ i $2p(\triangle OAB)$. Stoga vektori $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a})$ i $\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ poslije rotacije za 90° u ravnini ABC prelaze redom u vektore $2\vec{a}p(\triangle BOC)$, $2\vec{b}p(\triangle COA)$ i $2\vec{c}p(\triangle OAB)$.

Primjer 47. Dokažite pomoću vektorskog produkta "teorem o ježu" za tetraedar.

Rješenje. Neka je $A_0A_1A_2A_3$ tetraedar, $\vec{a}_i = \overrightarrow{A_0A_i}$, i neka je \vec{n}_i vektor okomit na stranu tetraedra nasuprot vrhu A_i , orijentiran prema vanjštnini, a modula jednakog površini te strane, $i = 0, 1, 2, 3$. Tada imamo

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{2}(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3), \quad \vec{n}_2 = \frac{1}{2}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_3), \quad \vec{n}_3 = \frac{1}{2}(\vec{a}_2 \times \vec{a}_1), \quad \vec{n}_0 = \frac{1}{2}[(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \times (\vec{a}_3 - \vec{a}_1)].$$

Sada koristeći se distributivnošću vektorskog produkta odmah slijedi da je $\vec{n}_0 + \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 = \vec{0}$. ■

Primjer 48. Svi kutovi prostornog šesterokuta su pravi a nikoje dvije stranice mu nisu paralelne. Dokažite da su zajedničke normale parova nasuprotnih stranica šesterokuta okomite na jedan pravac.

Rješenje. Neka su \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} vektori triju nesusjednih stranica šesterokuta, a \vec{a}_1 , \vec{b}_1 , \vec{c}_1 vektori nasuprotnih stranica. Kako je vektor $\vec{a}_1 \perp \vec{b}$ i $\vec{a}_1 \perp \vec{c}$, to je $\vec{a}_1 = \lambda(\vec{b} \times \vec{c})$, za neko $\lambda \in \mathbb{R}$. Stoga je zajednička normala vektora \vec{a} i \vec{a}_1 određena vektorom $\vec{n}_a = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Iz Jacobijevog identiteta slijedi da je $\vec{n}_a + \vec{n}_b + \vec{n}_c = \vec{0}$, tj. ti su vektori okomiti na jedan pravac. ■

Primjer 49. Zadan je trobrid $OABC$ s vrhom O i neka su $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$ jedinični vektori na bridovima trobrida. Pokažite da se ravnine koje prolaze simetralama plošnih kutova i koje su okomite na strane trobrida sijeku po jednom pravcu i da je taj pravac određen vektorom $\vec{e} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$.

Rješenje. Neka je π ravnina koja prolazi simetralom kuta $\sphericalangle AOB$ i koja je okomita na ravninu OAB . Dokažimo da vektor \vec{e} leži u ravnini π . Ravnina π je okomita na vektor $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, pa ona sadrži vektor $\vec{e}_3 \times (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$. Nadalje, ravnina π sadrži vektor $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, pa stoga sadrži vektor $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \times (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$. Analogno i ostale dvije ravnine sadrže taj vektor, pa je tvrdnja dokazana. ■

Primjer 50. Neka je $ABCD A'B'C'D'$ paralelepiped. Dokažite da je suma kvadrata površina triju njegovih neparalelnih strana jednaka sumi kvadrata površina strana tetraedra $A'BC'D$.

Rješenje. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{A'B}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC'}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{C'D}$ (sl. 202). Tada su dvostruke površine strana tetraedra $A'BC'D$ jednake modulima $|\vec{a} \times \vec{b}|$, $|\vec{b} \times \vec{c}|$, $|\vec{c} \times \vec{a}|$ i $|\vec{a} \times \vec{c}|$, gdje je $\vec{d} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Dvostruke površine neparalelnih strana paralelepipeda su jednake $|\vec{a} \times \vec{c}|$, $|\vec{b} \times \vec{d}|$ i $|\vec{a} + \vec{b} \times (\vec{b} + \vec{c})|$. Stavimo $\vec{x} = \vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{b} \times \vec{c}$ i $\vec{z} = \vec{c} \times \vec{a}$. Tada je četverostruka suma kvadrata površina tetraedra jednaka $|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + |\vec{y} - \vec{z}|^2 + |\vec{z} - \vec{x}|^2$, dok je četverostruka suma kvadrata neparalelnih strana paralelepipeda jednaka $|\vec{z}|^2 + |\vec{x} - \vec{y}|^2 + |\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}|^2$.

No, odmah se provjeri da je svaka od ovih suma jednaka $2(|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + |\vec{z}|^2 - \vec{y} \cdot \vec{z} - \vec{z} \cdot \vec{x})$, pa naša tvrdnja slijedi. ■

Primjer 51. Neka su $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ i $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ vektori u koordinatnom sustavu. Neka je V volumen paralelepipeda razapetog s vektorima \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Dokažite da je $V = |D|$, gdje je D determinanta

$$D = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Vektori \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} su linearno zavisni ako i samo ako je $D = 0$.

Rješenje. Koristeći svojstva 4) – 7) prethodnog teorema i formulu za skalarni produkt, kraći račun daje odmah navedenu formulu. Nadalje, vektori \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} su linearno zavisni ako i samo ako su komplanarni, a to je ako i samo ako je volumen $V = 0$, tj. $D = 0$. ■

Primjer 52. a) Neka je $A_0 A_1 A_2 A_3$ tetraedar, P_i površina strane nasuprot vrhu A_i , ($i = 0, 1, 2, 3$), a α_{ij} diedar što ga zatvaraju strane uz brid $\overline{A_i A_j}$. Dokažite prvi kosinsov teorem za tetraedar:

$$P_0^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 - 2P_1 P_2 \cos \alpha_{12} - 2P_1 P_3 \cos \alpha_{13} - 2P_2 P_3 \cos \alpha_{23}.$$

Posebno za $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = \frac{\pi}{2}$ dobiva se tzv. pravokutni tetraedar i Pitagorin poučak za pravokutni tetraedar: $P_0^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$.

b) Dokažite, dalje, drugi kosinsov teorem za tetraedar:

$$P_i^2 + P_j^2 - 2P_i P_j \cos \alpha_{ij} = \left(\frac{|A_i A_j| |A_k A_l| \sin \varphi_{ij,kl}}{2} \right)^2,$$

gdje su $\overline{A_i A_j}$ i $\overline{A_k A_l}$ nasuprotni bridovi, a $\varphi_{ij,kl}$ kut među njima.

Rješenje. a) Neka je \vec{e}_i jedinični vektor normale na stranu nasuprot vrhu A_i , orijentiran prema vanjštini tetraedra. Iz "teorema o ježu" za taj tetraedar slijedi

$$-\vec{e}_0 P_0 = \vec{e}_1 P_1 + \vec{e}_2 P_2 + \vec{e}_3 P_3.$$

Ako skalarno kvadriramo ovu jednakost, dobivamo odmah navedenu formulu.

b) Projiciramo li tetraedar na ravninu okomitu na brid $\overline{A_i A_j}$, dobivamo trokut sa stranicama $2P_i/|A_i A_j|$, $2P_j/|A_i A_j|$ i $|A_k A_l| \sin \varphi_{ij,kl}$, te kutom među prve dvije stranice jednakim α_{ij} . Sada, primjenom kosinsovog teorema na taj trokut slijedi tvrdnja. ■

Primjer 53. a) Uz oznake iz prethodnog primjera dokažite prvi sinusov teorem za tetraedar:

$$W_0 P_1 P_2 P_3 = W_1 P_0 P_2 P_3 = W_2 P_0 P_1 P_3 = W_3 P_0 P_1 P_2 \quad \left(= \frac{3}{4} V^2 \right),$$

gdje je W_i volumen tetraedra E_i kojeg razapinju jedinične vanjske normale \vec{e}_j , $j \neq i$, a V volumen tetraedra $A_0 A_1 A_2 A_3$.

b) Dokažite drugi sinusov teorem za tetraedar. Produkt duljina nasuprotnih bridova tetraedra podijeljen s produktom sinusa diedara uz te bridove je isti za sva tri para nasuprotnih bridova.

Rješenje. a) Pođimo od "teorema o ježu": $\vec{e}_0 P_0 + \vec{e}_1 P_1 + \vec{e}_2 P_2 + \vec{e}_3 P_3 = \vec{0}$ i vektorski je pomnožimo s $\vec{e}_0 P_0$. Dobivamo

$$(\vec{e}_0 \times \vec{e}_1) P_0 P_1 + (\vec{e}_0 \times \vec{e}_2) P_0 P_2 + (\vec{e}_0 \times \vec{e}_3) P_0 P_3 = \vec{0}.$$

Ako pak ovu jednakost pomnožimo skalarno s $\vec{e}_2 P_2$, dobivamo

$$(\vec{e}_0 \times \vec{e}_1) \vec{e}_2 P_0 P_1 P_2 + (\vec{e}_0 \times \vec{e}_2) \vec{e}_2 P_0 P_2^2 + (\vec{e}_0 \times \vec{e}_3) \vec{e}_2 P_0 P_2 P_3 = 0.$$

Kako je $W_3 = \frac{1}{6} |(\vec{e}_0 \times \vec{e}_1) \vec{e}_2|$, $(\vec{e}_0 \times \vec{e}_2) \vec{e}_2 = 0$, a $W_1 = \frac{1}{6} |(\vec{e}_0 \times \vec{e}_3) \vec{e}_2|$, dobivamo da je $|W_3 P_0 P_1 P_2| = |W_1 P_0 P_2 P_3|$, pa zbog pozitivnosti svih veličina slijedi $W_3 P_0 P_1 P_2 = W_1 P_0 P_2 P_3$. Analogno dobivamo i ostale jednakosti.

Nadalje, ako je $\vec{a}_i = \overrightarrow{A_0 A_i}$, $i = 1, 2, 3$, onda je $\vec{n}_i = P_i \vec{e}_i$, pa je $\vec{n}_1 = \frac{1}{2} (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$, $\vec{n}_2 = \frac{1}{2} (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1)$, $\vec{n}_3 = \frac{1}{2} (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$. Stoga iz

$$W_0 = \frac{1}{6} [(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \vec{e}_3] = \frac{1}{6 P_1 P_2 P_3} (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \vec{n}_3$$

slijedi, koristeći svojstvo 9) vektorskog produkta:

$$\begin{aligned} W_0 P_1 P_2 P_3 &= \frac{1}{6} (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \vec{n}_3 = \frac{1}{48} [(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \times (\vec{a}_2 \times \vec{a}_1)] (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \\ &= \frac{1}{48} \{[(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \vec{a}_1] [(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) \vec{a}_2] - [(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) \vec{a}_1] [(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \vec{a}_2]\} = \\ &= \frac{1}{48} \{[(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \vec{a}_3]^2 - 0 \cdot 0\} = \frac{1}{48} (6V)^2 = \frac{3}{4} V^2. \end{aligned}$$

Napomenimo da u dimenzijama $n = 2$, $n = 3$ (a i za $n \geq 3$) prvi sinusov teorem glasi (uz očite oznake):

$$P_0 \dots P_{i-1} W_i P_{i+1} \dots P_n = \frac{(nV)^{n-1}}{n!(n-1)!}.$$

b) Prema Primjeru 30 iz prethodnog odjeljka imamo

$$V = \frac{2P_0 P_1 \sin \alpha_{01}}{3|A_0 A_1|}, \quad V = \frac{2P_2 P_3 \sin \alpha_{23}}{3|A_2 A_3|}.$$

Odavde množenjem slijedi $|A_0 A_1| |A_2 A_3| : \sin \alpha_{01} \sin \alpha_{23} = 4P_0 P_1 P_2 P_3 : 9V^2$. ■

Primjer 54. a) Neka su P_0, P_1, P_2, P_3 površine strana tetraedra, a S_0, S_1, S_2 površine strana dopunjenog paralelepipeda čije strane prolaze bridovima tetraedra a paralelne su nasuprotnim bridovima. Dokažite

$$P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = S_0^2 + S_1^2 + S_2^2.$$

b) Neka su h_0, h_1, h_2, h_3 visine tetraedra, a d_0, d_1, d_2 udaljenosti među mimoilaznim bridovima. Dokažite

$$\frac{1}{h_0^2} + \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} = \frac{1}{d_0^2} + \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2}.$$

Rješenje. a) Projekcijom svih strana na P_0 slijedi da je $P_0 = P_1 \cos \alpha_{01} + P_2 \cos \alpha_{02} + P_3 \cos \alpha_{03}$. Nadalje iz prethodnjeg primjera (tvrdnja b)) imamo $P_0^2 + P_1^2 - 2P_0 P_1 \cos \alpha_{01} = S_0^2$, $P_0^2 + P_2^2 - 2P_0 P_2 \cos \alpha_{02} = S_1^2$, $P_0^2 + P_3^2 - 2P_0 P_3 \cos \alpha_{03} = S_2^2$.

Odavde slijedi $S_0^2 + S_1^2 + S_2^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + 3P_0^2 - 2P_0(P_1 \cos \alpha_{01} + P_2 \cos \alpha_{02} + P_3 \cos \alpha_{03}) = P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$.

b) Podijelimo li obje strane jednakosti iz a) sa $9V^2$, gdje je V volumen tetraedra, dobivamo odmah traženu jednakost. ■

Primjer 55. Neka je V volumen, a R radijus opisane sfere tetraedru. Dokažite da vrijedi

$$V \leq \frac{8\sqrt{3}}{27} R^3.$$

Jednakost nastupa ako i samo ako je tetraedar pravilan.

Rješenje. Neka je tetraedar $ABCD$ upisan u sferu radijusa R s centrom O i neka je d udaljenost od O do ravnine BCD . Neka je P površina trokuta $\triangle BCD$, a r radijus opisane kružnice tom trokutu. Očito je $r^2 = R^2 - d^2$. Nadalje, $V \leq \frac{1}{3}P(R+d)$, jer visina na stranu BCD nije veća od $R+d$. Prema narednom primjeru a) (drugi dokaz) imamo da je $P \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}(R^2 - d^2)$. Stoga je

$$V \leq \frac{1}{3}P(R+d) \leq \frac{\sqrt{3}}{4}(R^2 - d^2)(R+d).$$

Aritmetičko-geometrijska nejednakost daje

$$\begin{aligned} (R^2 - d^2)(R+d) &= \frac{1}{2}(2R-2d)(R+d)(R+d) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{2R-2d+R+d+R+d}{3} \right]^3 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4R}{3} \right)^3. \end{aligned}$$

Konačno stoga dobivamo $V \leq \frac{8\sqrt{3}}{27} R^3$. Jednakost će nastupiti ako i samo ako je $2R-2d = R+d \Leftrightarrow d = R/3$. Lako se vidi da to vrijedi samo u slučaju pravilnog tetraedra za koji vrijedi ta jednakost. ■

Primjer 56. a) Dokažite da za površinu P trokuta $\triangle ABC$ čije su duljine stranica a, b i c vrijedi $P \leq (\sqrt{3}/4)(abc)^{2/3}$. Jednakost nastupa samo za jednakostranični trokut.

b) Dokažite da za volumen V tetraedra $A_0A_1A_2A_3$ čije su duljine bridova $a_{ij} = |A_iA_j|$ vrijedi

$$V \leq \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{\prod_{i < j} a_{ij}}.$$

Jednakost se dostiže samo za pravilni tetraedar.

Rješenje. a) **Dokaz I.** Ako su α, β, γ kutovi trokuta, onda množenjem formula za površinu trokuta dobivamo

$$P^3 = \frac{1}{8} a^2 b^2 c^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Sada $\sin \alpha \sin \gamma \sin \beta \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}$ izlazi iz činjenice da je funkcija sinus na $[0, \pi]$ konkavna, tj. takva da je $\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $\forall a, b$. Odavde se onda (indukcijom) dokaže da je $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin x_k \leq \sin\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right)$ za $0 \leq x_1, \dots, x_n \leq \pi$. U našem je slučaju tada

$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, pa iz aritmetičko-geometrijske nejednakosti slijedi tvrdnja.

Dokaz II. Neka je R radijus opisane kružnice trokutu. Tada je zbog $abc = 4RP$ uvedena nejednakost ekvivalentna s $4P \leq 3\sqrt{3}R^2$. Dovoljno je dokazati $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$, jer tada zbog aritmetičko-geometrijske nejednakosti $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ slijedi $4P \leq 3\sqrt{3}R^2$. Neka je t_a težišnica iz vrha A . Dokažimo prvo $4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) \leq 27R^2$. Neka je T težište, a O centar opisane kružnice. Tada imamo $|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 = |OT + TA|^2 + |OT + TB|^2 + |OT + TC|^2 = 3|OT|^2 + |TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 + 2\overrightarrow{OT} \cdot (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC})$. Zbog $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$, slijedi $3R^2 = |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 = |OT|^2 + |TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 \geq |TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 = \frac{4}{9}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)$. Sada je još dovoljno dokazati $(a+b+c)^2 \leq 4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)$. No iz kosinusovog teorema lako slijedi $t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, pa zbrajanjem svih takvih nejednakosti slijedi

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2.$$

b) Uz oznake kao u prvom sinusovom teoremu za tetraedar, neka je E_i tetraedar čiji je volumen W_i , $i = 0, 1, 2, 3$. Svaka dva od njih se očito ne sijeku u unutrašnjostima i njihova unija je tetraedar E koji je upisan u jediničnu kuglu. Za volumen $W = v(E)$ tada vrijedi (prethodni primjer)

$$W \leq \frac{8\sqrt{3}}{27}. \quad (1)$$

Prema prvom sinusovom teoremu za tetraedar imamo

$$V = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{W_0 P_1 P_2 P_3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{W_1 P_0 P_2 P_3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{W_2 P_0 P_1 P_3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{W_3 P_0 P_1 P_2}.$$

Množenjem svih ovih jednakosti slijedi

$$V^4 = \frac{16}{9} \sqrt{(P_0 P_1 P_2 P_3)^3 W_0 W_1 W_2 W_3}. \quad (2)$$

Dalje, koristeći aritmetičko-geometrijsku nejednakost i (1) imamo

$$W_0 W_1 W_2 W_3 \leq \left[\frac{1}{4} (W_0 + W_1 + W_2 + W_3) \right]^4 = \left(\frac{1}{4} W \right)^4 \leq \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{27} \right)^4 = \frac{2^4}{3^{10}}.$$

Stoga iz (2) i tvrdnje a) dobivamo

$$V^4 \leq \frac{16}{9} \cdot \frac{2^2}{3^5} (P_0 P_1 P_2 P_3)^{3/2} \leq \frac{2^6}{3^7} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^4 \left(\prod_{i < j} a_{ij}^2 \right)^{2/3} \right]^{3/2} = \frac{1}{3^4 \cdot 4^3} \left(\prod_{i < j} a_{ij} \right)^2,$$

odakle neposredno slijedi tvrdnja.

Napomenimo da za dimenzije $n = 2$, $n = 3$ (a i za $n \geq 3$) uz očite oznake vrijedi

$$V \leq \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \left(\prod_{0 \leq i < j \leq n} a_{ij} \right)^{\frac{2}{n+1}}$$

s jednakošću ako i samo ako je simpleks pravilan. Isto tako je i

$$V^{n+1} \leq n! \sqrt{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{3n}}} \left(\prod_{i=0}^n P_i \right)^{\frac{n+1}{n}}. \blacksquare$$

Primjer 57. Dokažite izoperimetrijske nejednakosti za

a) **trokut**, tj. da je $P \leq \frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}(2s)^2$, gdje je P površina, a $2s = a+b+c$ opseg trokuta i

b) **tetraedar**, tj. da je $V \leq \frac{\sqrt{12}}{36}O^{3/2}$, gdje je V volumen, a O oplošje tetraedra.

Rješenje. a) Iz prethodnog primjera a) i A-G nejednakosti imamo $P \leq \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{2/3} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2$.

b) Iz rješenja prethodnog primjera i A-G nejednakosti neposredno imamo

$$\begin{aligned} V^4 &= \frac{16}{9}(P_0 P_1 P_2 P_3)^{3/2} (W_0 W_1 W_2 W_3)^{1/2} \leq \frac{16}{9}(P_0 P_1 P_2 P_3)^{3/2} \cdot \frac{2^2}{3^5} = \\ &= \frac{2^6}{3^7}(P_0 P_1 P_2 P_3)^{3/2} \leq \frac{2^6}{3^7} \left(\frac{P_0 + P_1 + P_2 + P_3}{4} \right)^6 = \frac{2^6}{3^7 \cdot 2^{12}} O^6 = \frac{1}{2^6 \cdot 3^7} O^6. \end{aligned}$$

Odavde korijenovanjem odmah slijedi tvrdnja. \blacksquare

Napomena 1. Ovim se nejednakostima odgovara na tzv. **izoperimetrijski problem za trokut i tetraedar**, koji glasi ovako: koju najveću vrijednost površine može imati figura u ravnini (u našem slučaju trokut) zadanog opsega? Analogno u prostoru: koji najveći volumen može imati tetraedar zadanog oplošja. Iz rješenja se odmah vidi da se jednakost u a) dostiže samo za pravilni trokut, a u b) samo za pravilni tetraedar. O općem izoperimetrijskom problemu bit će još riječi u §8.

Primjer 58. a) Ako su zadane duljine stranica a, b, c trokuta, izračunajte površinu P tog trokuta.

b) Ako su zadane duljine svih bridova a, a', b, b', c, c' tetraedra odredite volumen V tog tetraedra (a i a' su nasuprotni bridovi itd.).

Rješenje. a) Vektorizirajmo trokut $\triangle ABC$ u koordinatnoj ravnini Oxy (v. pogl. VI), tako da je $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$. Tada je površina P polovina površine paralelograma razapetog vektorima \vec{a} , \vec{b} , a to je opet duljina vektorskog produkta $\vec{a} \times \vec{b}$. No, samo je z -komponenta tog vektorskog produkta različita od nule. Stoga je

$$2P = |a_x b_y - a_y b_x|.$$

Ovo možemo napisati u obliku determinante kao

$$2P = \pm \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

(pri tom uzimamo znak $+$ ako je determinanta pozitivna, a znak $-$ inače). Ako je $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$, onda skalarnim kvadriranjem dobijemo

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a}, \quad \text{odnosno} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Kvadriranje gornje determinante ("reci puta reci") daje

$$4P^2 = \begin{vmatrix} a_x^2 + b_y^2 & a_x b_x + a_y b_y \\ b_x a_x + b_y a_y & b_x^2 + b_y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & b^2 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \\ \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) & b^2 \end{vmatrix}.$$

Ako sada iz svakog retka izlučimo $-1/2$, zatim determinantu obrubimo (tj. vrijednost joj se ne mijenja), pa konačno prvi redak pribrojimo drugom i trećem, a prvi stupac drugom i trećem, dobivamo redom

$$4P^2 = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -2a^2 & c^2 - a^2 - b^2 \\ c^2 - a^2 - b^2 & -2b^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & -2a^2 & c^2 - a^2 - b^2 & 0 \\ b^2 & c^2 - a^2 - b^2 & -2b^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow 16P^2 = - \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

b) Ako je $ABCD$ tetraedar u prostornom koordinatnom sustavu $Oxyz$, stavimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$, $\vec{a}' = \overrightarrow{CD} = \vec{c} - \vec{b}$, $\vec{b}' = \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{c}$, $\vec{c}' = \overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$.

Kvadriranje daje $a'^2 = b^2 + c^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c}$, pa je $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a'^2)$ i analogno $\vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}(a'^2 + c^2 - b'^2)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c'^2)$. Tada je (v. Primjer 51):

$$6V = \pm \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

(gdje vrijedi znak +, odnosno -, prema tome da li je determinanta pozitivna ili negativna). Kvadriranje i slična procedura kao u a) daje

$$36V^2 = \begin{vmatrix} a^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & b^2 & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c'^2) & \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b'^2) \\ \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c'^2) & \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b'^2) & \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a'^2) \\ \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b'^2) & \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a'^2) & c^2 \end{vmatrix} = \\ = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} -2a^2 & c'^2 - a^2 - b'^2 & b'^2 - a^2 - c'^2 \\ c'^2 - a^2 - b'^2 & -2b^2 & a'^2 - b^2 - c'^2 \\ b'^2 - a^2 - c'^2 & a'^2 - b^2 - c'^2 & -2c^2 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & -2a^2 & c'^2 - a^2 - b'^2 & b'^2 - a^2 - c'^2 & 0 \\ b^2 & c'^2 - a^2 - b'^2 & -2b^2 & a'^2 - b^2 - c'^2 & 0 \\ c^2 & b'^2 - a^2 - c'^2 & a'^2 - b^2 - c'^2 & -2c^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 & 1 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 & 1 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Odavde konačno dobivamo

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ c^2 & b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \blacksquare$$

Napomena 2. U dimenzijama $n = 2$, $n = 3$ (a i za $n \geq 3$), volumen V_n n -dimenzionalnog simpleksa $A_0A_1 \dots A_n$ pomoću bridova $a_{ij} = |A_iA_j|$ dan je pomoću determinante $(n+2)$ -tog reda:

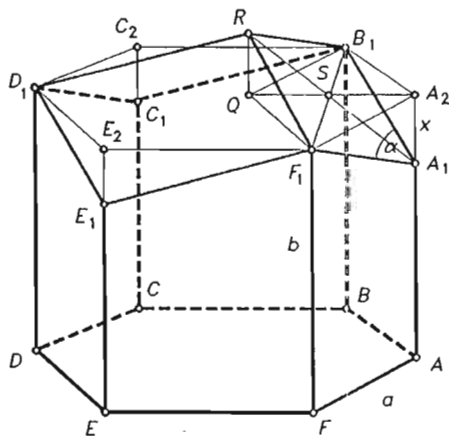
$$2^n(n!)^2V^2 = \begin{vmatrix} 0 & a_{01}^2 & a_{02}^2 & \dots & a_{0n}^2 & 1 \\ a_{10}^2 & 0 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n0}^2 & a_{n1}^2 & \dots & a_{n,n-1}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ova formula zove se **Heronova formula** za simpleks.

Primjer 59. (Problem pčelinjeg saća) Pčele u saću grade ćelije prizmatičnog oblika, s čije je jedne strane otvor u obliku pravilnog šesterokuta, a s druge je ćelija zatvorena s tri romba kao na sl. 203. Problem je u tome da se odredi položaj rombova tako da površina ćelije bude najmanja, tj. da se pri tom utroši najmanje voska za njenu izgradnju.

Rješenje. Označimo stranicu pravilnog šesterokuta $|AB| = |A_2B_1| = a$ i neka je dalje $|AA_2| = b$, $|A_1A_2| = x$. Tada položaj romba ovisi o x . Površina ćelije sastoji se od tri sukladna romba i šest sukladnih trapeza. Neka je p_1 površina romba $F_1A_1B_1R$, a p_2 površine trapeza ABB_1A_1 . Tada je površina ćelije $P = 3p_1 + 6p_2$.

Prije nego što izračunamo tu površinu, uočimo da ova ćelija i pravilna šesterostrana prizma $ABCDEF A_2B_1C_2D_1E_2F_1$ imaju jednake volumene. Naime, ako je Q središte



Sl. 203.

pravilnog šesterokuta $A_2B_1C_2D_1E_2F_1$, onda je $\triangle A_2B_1F_1 \cong \triangle QF_1B_1$, a isto tako i $\triangle A_2A_1B_1 \cong \triangle QRF_1$. Nasuprot jednakih kutova kod vrhova B_1 i F_1 leže i jednake stranice u ovim trokutima, pa je $|A_2A_1| = |QR|$. Stoga tetraedri $A_2B_1F_1A_1$ i QF_1B_1R imaju jednake volumene, a odavde slijedi da ćelija ima volumen kao i navedena prizma.

Vratimo se računanju. Kako je $p_1 = \frac{1}{2}|F_1B_1||A_1R|$, a romb $F_1A_2B_1Q$ se sastoji od dva jednakostranična trokuta stranica a , to je $|F_1B_1|$ jednaka dvostrukoj visini tog trokuta, tj. $|F_1B_1| = a\sqrt{3}$. Iz pravokutnog trokuta $\triangle A_1A_2S$ je $|A_1S|^2 = |A_1A_2|^2 + |A_2S|^2$, pa zbog $2|A_2S| = |A_2Q| = a$ i $|A_1R| = 2|A_1S|$ slijedi

$$|A_1R| = 2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}, \quad \text{te stoga} \quad p_1 = a\sqrt{3x^2 + \frac{3a^2}{4}}.$$

Kako je površina trapeza ABB_1A_1 očito $p_2 = a\frac{2b-x}{2}$, to konačno dobivamo da je površina ćelije jednaka

$$P = P(x) = 6ab - 3ax + \frac{3a}{2}\sqrt{12x^2 + 3a^2}.$$

Da odredimo minimum funkcije $P(x)$, nađimo derivaciju $P'(x)$. Koristeći poznata pravila, dobijamo $P'(x) = -3a + 18ax/\sqrt{12x^2 + 3a^2}$. Iz $P'(x) = 0$ dobivamo $x = a\sqrt{2}/4$. Kako je $P''(x) = 54a^3/\sqrt{(12x^2 + 3a^2)^3}$, pa je $P''(a\sqrt{2}/4) > 0$, slijedi da je površina $P(x)$ najmanja za $x = a\sqrt{2}/4$ i iznosi $P(a\sqrt{2}/4) = 3a(4b + a\sqrt{2})/2$.

Stavimo li $\angle F_1A_1B_1 = \alpha$, odmah se dobiva $\text{tg } \alpha/2 = |SB_1|/|A_1S| = |F_1B_1|/|A_1R| = a\sqrt{3}/\sqrt{4x^2 + a^2}$. Za $x = a\sqrt{2}/4$ je $\text{tg } \alpha/2 = \sqrt{2}$, pa dobivamo $\alpha \approx 109^\circ 28' 16''$ (dakle neovisno o a i b).

Mnogo tisuća mjerenja odgovarajućeg kuta na ćelijama koje grade pčele pokazala su da je prosječna vrijednosti tog kuta doista $109^\circ 28'$.

Napomenimo još ovo. Kada bi ćelija bila zatvorena ravnim dnom, njezin bi obujam, kao što smo pokazali, ostao nepromijenjen. No, površina takve šesterostrane otvorene prizme bila bi jednaka $3a(4b + a\sqrt{3})/2$, dok je površina ćelije samo $3a(4b + a\sqrt{2})/2$, tako da je za ovakav oblik ćelije utrošeno manje voska nego za oblik šesterostrane prizme.

Isto tako, i šesterokutni oblik ćelije je svrhovito odabran. Ako, naime, ravninu želimo prekriti (parketirati) pravilnim poligonima, onda se to može učiniti samo s pravilnim trokutima, kvadratima i šesterokutima. No za istu površinu P , šesterokut ima najmanji opseg ($o_3 = \sqrt{12P\sqrt{3}}$, $o_4 = \sqrt{16P}$, $o_6 = \sqrt{8P\sqrt{3}}$), pa će bočna površina ćelije sa šesterokutnom osnovkom biti najmanja.

Problem pčelinjeg saća proučavao je i Ruder Bošković. ■

5.7. Jednakosastavljenost u prostoru – treći Hilbertov problem

Kao i u ravnini (1. dio, str. 275), u prostoru se pojavljuje analogan problem jednakosastavljenosti poliedara, tj. da li jedan od njih možemo "raspiliti" u komadiće i od njih sastaviti drugi. Precizna definicija jednakosastavljenosti (rastavne jednakosti) poliedara je posve analogna onoj u ravnini samo što riječ "poligon" zamijenimo s "poliedar". Za jednakosastavljenost poliedara P i Q pišemo $P \equiv Q$.

Zbog svojstava volumena v očito je da jednakosastavljenost povlači jednakost volumena, tj. $P \equiv Q \Rightarrow v(P) = v(Q)$. **Treći Hilbertov¹⁷ problem** pita da li vrijedi i obrat. Pokazat ćemo da je odgovor negativan. No, prije nego se upustimo u detalje, navedimo zanimljivu i poučnu priču o povijesti tog problema.

Hilbert je svojedobno od njemačkog ministarstva prosvjete dobio narudžbu da napiše srednjoškolski udžbenik iz stereometrije. Znajući da trokut može presložiti u pravokutnik, pomislio je da će i tetraedar moći "raspiliti" i presložiti u kvadar. Time bi tada jednostavno dobio formulu za volumen tetraedra. Nakon mnogo pokušaja to mu nije uspjelo. Znajući za Bolyajev teorem (1. dio, str. 279), Hilbert je tada formulirao analogni problem za prostor¹⁸. Bio je to jedan od znamenitih dvadeset i tri problema tzv. **Hilbertovih problema**, koje je Hilbert prezentirao na Drugom svjetskom kongresu matematičara u Parizu 1900. godine, kao naslijeđe koje devetnaesto stoljeće ostavlja dvadesetom stoljeću. Spomenuti je problem bio treći u tom popisu problema, pa odatle i naziv treći Hilbertov problem. Neki su od tih problema do danas (1994. g.) ostali neriješeni (npr. Poincaréova slutnja, Riemannova slutnja i još neki), a neki su u međuvremenu riješeni, ali što je najvrednije, oni su dali velik impuls razvoju matematike i pridonijeli stvaranju i razvoju njezinih novih grana.

Treći Hilbertov problem je od sva 23 bio nakon kongresa u Parizu prvi riješen. Riješio ga je, i to negativno, Dehn¹⁹ 1901. godine.

To negativno rješenje tada pokazuje da se volumen tetraedra ne može izračunati elementarno, nego se mora pribjeći sredstvima matematičke analize, npr. pomoću "đavoljih stuba", Cavalierijeveog principa ili tomu slično. Dakle, za razliku od ravnine, gdje vrijedi "jednakosastavljenost \Leftrightarrow jednake površine", to negativno rješenje pokazuje da je pojam volumena mnogo suptilniji od pojma površine, iako su aksiomi za površinu i volumen formalno gotovo isti.

Dehnov originalni dokaz je prilično zamršen, pa ćemo mi prezentirati elementarni dokaz Hadwiger²⁰ iz 1956. g. Još jedno elementarno rješenje trećeg Hilbertovog problema nezavisno je dao ruski matematičar V. F. Kagan.²¹

Da bismo formulirali Hadwigerov teorem, trebamo prvo definirati neke pojmove. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ neki skup. Za brojeve $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ ćemo reći da su zavisni ako postoje $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ koji nisu svi jednaki nuli tako da vrijedi

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k = 0. \quad (0)$$

Svaku takvu relaciju ćemo zvati zavisnost. Ako (0) povlači $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 0$, onda ćemo reći da su brojevi x_1, x_2, \dots, x_k nezavisni. Funkcija $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ je aditivna na skupu S ako za svaku zavisnost (0) među elementima iz S vrijedi

$$n_1 f(x_1) + n_2 f(x_2) + \dots + n_k f(x_k) = 0.$$

¹⁷David Hilbert (1862 – 1943), njemački matematičar.

¹⁸Hilbert je tada spoznao da je o tom prirodnom problemu razmišljao davno ranije i Gauss.

¹⁹Max Dehn (1872–1952), njemački matematičar.

²⁰Hugo Hadwiger (1908–1981), švicarski matematičar.

²¹Veniamin F. Kagan (1869 – 1953), ruski matematičar.

v-5

Neka je sada P bilo koji poliedar, $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ svi njegovi diedri (izraženi u radijanima), te a_1, \dots, a_p duljine pripadnih bridova. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ bilo koji skup koji sadrži brojeve $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, a f bilo koja aditivna funkcija na S . Tada se broj

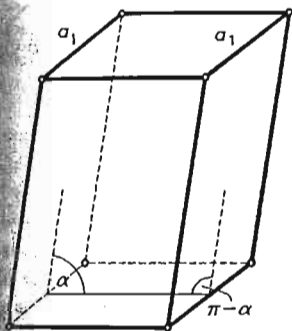
$$f(P) = a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + \dots + a_p f(\alpha_p)$$

zove Dehnova invarijanta poliedra P (ili bridna zakrivljenost od P).

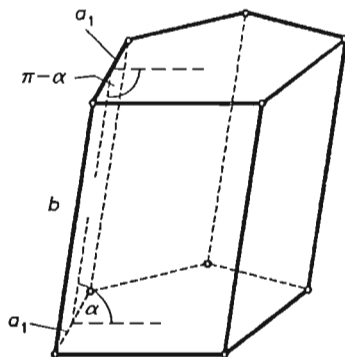
Tako je npr. Dehnova invarijanta paralelepipeda P jednaka nuli. Zaista, pogledajmo prvo kako stvar izgleda na jednoj strani. Uz oznake kao na sl. 204, neka je S bilo koji skup koji sadrži π , α i $\pi - \alpha$. Između njih imamo zavisnost $(-1)\pi + 1 \cdot \alpha + 1 \cdot (\pi - \alpha) = 0$, pa za svaku aditivnu funkciju f mora biti.

$$-f(\pi) + f(\alpha) + f(\pi - \alpha) = 0.$$

Uzmemo li da je $f(\pi) = 0$ slijedi $f(\alpha) + f(\pi - \alpha) = 0$. Odavde slijedi da je $a_1 f(\alpha) + a_1 f(\pi - \alpha) = 0$. Kako to vrijedi za svaki par bridova na istoj strani, slijedi da je $f(P) = 0$.



Sl. 204.



Sl. 205.

Slično se vidi da je Dehnova invarijanta prizme P također nula. Naime, uz oznake kao na sl. 205 opet je $a_1 f(\alpha) + a_1 f(\pi - \alpha) = 0$. Prema tome, sumandi koji sadrže bridove donje i gornje osnovke u Dehnovoj invarijanti daju nulu. Preostaju samo sumandi koji kao faktore sadrže pobočne bridove. Neka je pobočni brid prizme duljine b . Tada je

$$f(P) = b f(\alpha_1) + \dots + b f(\alpha_n),$$

gdje su $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ odgovarajući diedri. No $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ su unutrašnji kutovi poligona kojeg dobivamo kada prizmu presiječemo ravninom okomitom na pobočne bridove. Stoga je $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - (n - 2)\pi = 0$. Ako je f bilo koja aditivna funkcija na $S \supseteq \{\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, onda je $f(\alpha_1) + \dots + f(\alpha_n) - (n - 2)f(\pi) = 0$. Uzmemo li opet da je $f(\pi) = 0$, odatle slijedi da je $f(P) = 0$.

Sada formulirajmo najavljeni (malo općenitiji) teorem.

TEOREM 18 (Hadwiger, 1956). Neka je P poliedar s diedrima $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, Q poliedar s diedrima β_1, \dots, β_q , a $S \subseteq \mathbb{R}$ bilo koji skup koji sadrži brojeve $\pi, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$. Ako na S postoji aditivna funkcija f takva da je $f(\pi) = 0$ i $f(P) \neq f(Q)$, onda P i Q nisu jednakosastavljivi.

Za dokaz nam trebaju dvije leme.

LEMA 3. Neka je f aditivna funkcija na nekom skupu S , a $\gamma \in \mathbb{R} \setminus S$. Tada se f može proširiti do aditivne funkcije na skupu $S^* = S \cup \{\gamma\}$.

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja.

1°. Među elementima iz S^* ne postoji zavisnost

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k + n\gamma = 0$$

u kojoj je $n \neq 0$. Drugim riječima, γ ne ulazi ni u jednu zavisnost od S^* . No u tome slučaju možemo definirati $f(\gamma) = a$, gdje je a bilo koji realni broj. Na taj smo način proširili f do aditivne funkcije u S^* .

2°. Postoji zavisnost u S^* oblika

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k + n\gamma = 0, \quad (1)$$

gdje je $n \neq 0$. Uzmimo jednu takvu zavisnost (1). Tada bi za $f(\gamma)$ moralo vrijediti

$$n_1 f(x_1) + n_2 f(x_2) + \dots + n_k f(x_k) + n f(\gamma) = 0. \quad (2)$$

Zbog $n \neq 0$ odavde slijedi da je

$$f(\gamma) = -\frac{n_1}{n} f(x_1) - \frac{n_2}{n} f(x_2) - \dots - \frac{n_k}{n} f(x_k).$$

Dokažimo da smo time proširili f do aditivne funkcije na S^* . U tu svrhu uzmimo sada bilo koju zavisnost među elementima iz S^* . Ako u tu zavisnost ne ulazi γ smatrat ćemo da se on tu pojavljuje s koeficijentom nula, a slično ćemo smatrat ako se neki od x_1, \dots, x_k ne pojavljuju. Dakle, općenita zavisnost u S^* je oblika

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k + p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_l y_l + m\gamma = 0, \quad (3)$$

gdje su $m_1, \dots, m_k \geq 0$, $p_1, \dots, p_l \in \mathbb{N}$, a $y_1, \dots, y_l \in S$ različiti od x_1, \dots, x_k .

Treba pokazati da naše proširenje od f zadovoljava uvjet

$$m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \dots + m_k f(x_k) + p_1 f(y_1) + p_2 f(y_2) + \dots + p_l f(y_l) + m f(\gamma) = 0. \quad (4)$$

U tu svrhu pomnožimo (3) s n i od toga oduzmimo (1) pomnožen s m . Dobivamo

$$(m_1 n - m n_1) x_1 + \dots + (m_k n - m n_k) x_k + p_1 n y_1 + \dots + p_l n y_l = 0. \quad (5)$$

Ova jednakost je zavisnost među elementima iz S , a kako je f aditivna na S , to iz (5) slijedi

$$(m_1 n - m n_1) f(x_1) + \dots + (m_k n - m n_k) f(x_k) + p_1 n f(y_1) + \dots + p_l n f(y_l) = 0.$$

V-5

Ako toj jednadžbi dodamo (2) pomnožen s m , dobit ćemo

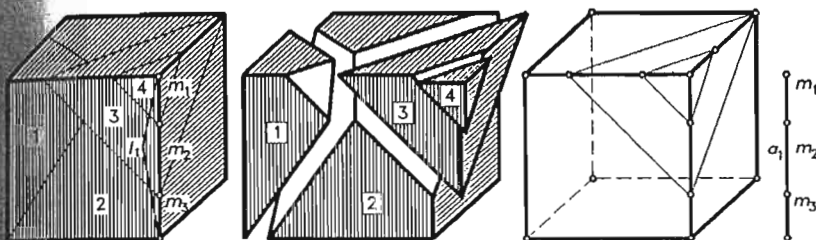
$$m_1 n f(x_1) + \dots + m_k n f(x_k) + p_1 n f(y_1) + \dots + p_l n f(y_l) + m n f(\gamma) = 0.$$

Ako to skratimo s $n \neq 0$, dobit ćemo (4) i lema je dokazana. ■

LEMA 4. Neka je poliedar P prikazan kao zbroj $P = P_1 + P_2 + \dots + P_k$ poliedara P_1, \dots, P_k . Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup koji sadrži broj π i radijanske mjere svih diedara poliedara P, P_1, \dots, P_k , te neka je f aditivna funkcija na S takva da je $f(\pi) = 0$. Tada za Dehnovu invarijantu ovih poliedara vrijedi

$$f(P) = f(P_1) + f(P_2) + \dots + f(P_k). \quad (*)$$

Dokaz. Promotrimo sve bridove poliedara P, P_1, \dots, P_k i na svakom od njih odimo vrhove i sve točke koje su vrhovi tih poliedara. Na taj smo način bridove tim točkama razbili na manje dužine. Nazovimo te manje dužine **karikama**. Tako npr. na kocki koja je rastavljena kao na sl. 206 brid a_1 sastoji se od tri karike m_1, m_2, m_3 .



Sl. 206.

Uočimo sada neki brid od P , kariku duljine m na tom bridu i diedar $\alpha \in S$ poliedra P uz taj brid. Tada je potpuno određen i broj $f(\alpha)$. Produkt $m \cdot f(\alpha)$ ćemo zvati **težina karika** u poliedru P . Na isti način definiramo težine karika u poliedrima P_1, \dots, P_k .

Uzmimo sada sve karike na bridovima od P , nađimo njihove težine u P i zbrojimo ih. Taj zbroj je tada jednak Dehnovoj invarijanti $f(P)$. Naime, uzmimo neki brid od P duljine a_1 . Neka su na njemu sve karike npr. m_1, m_2, m_3 . Tada je suma težina svih karika na tom bridu jednaka $m_1 f(\alpha_1) + m_2 f(\alpha_1) + m_3 f(\alpha_1) = (m_1 + m_2 + m_3) f(\alpha_1) = a_1 f(\alpha_1)$, gdje je α_1 diedar uz brid a_1 . Isto tako je zbroj svih težina na drugom bridu $a_2 f(\alpha_2)$ itd., pa je zbroj težina svih karika jednak $a_1 f(\alpha_1) + \dots + a_p f(\alpha_p) = f(P)$. Na isti je način zbroj težina svih karika u P_i jednak $f(P_i)$.

Da odredimo zbroj na desnoj strani (*), moramo naćiniti zbroj svih karika u svim poliedrima P_1, \dots, P_k . Uzmimo jednu kariku m i nađimo koeficijent s kojim ona ulazi u taj zbroj. Ista karika m može biti na bridovima nekih od poliedara P_1, \dots, P_k . Oznaćimo diedre pridrućene karici m sa $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in S$. Tada je težina

karika m u poliedru kojem je γ_i diedar jednaka $m \cdot f(\gamma_i)$, pa je zbroj težina karika m obzirom na sve poliedre P_1, \dots, P_k jednaka

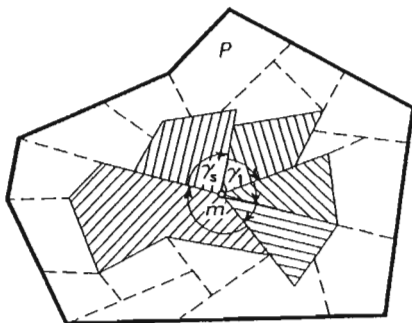
$$mf(\gamma_1) + \dots + mf(\gamma_s). \quad (*)$$

Sada skup svih karika rastavimo na tri klase.

I) U ovu klasu uzimamo sve karike koje su unutar poliedra P , osim eventualno njihovih krajeva.

Tu razlikujemo dva podslučaja.

Ia) m je na bridovima nekih od poliedara P_1, \dots, P_k . U ovom slučaju ako poliedar P i P_1, \dots, P_k presiječemo ravninom okomitom na m kroz neku unutrašnju točku od m , dobijemo situaciju kao na sl. 207. Očito je tada $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_s = 2\pi$.



Sl. 207.

tj. $\gamma_1 + \dots + \gamma_s - 2\pi = 0$. Iz aditivnosti f slijedi $f(\gamma_1) + \dots + f(\gamma_s) - 2f(\pi) = 0$, pa zbog $f(\pi) = 0$ dobivamo $f(\gamma_1) + \dots + f(\gamma_s) = 0$. Dakle, u slučaju Ia) karike na desnoj strani od (*) daju sumand koji je jednak nuli.

Ib) m je unutar P i m se nalazi na jednoj strani jednog od poliedara P_1, \dots, P_k a ne na njegovom bridu.

U tom slučaju situacija je kao na sl. 208. Tada imamo da je $\gamma_1 + \dots + \gamma_s = \pi$, pa stoga $f(\gamma_1) + \dots + f(\gamma_s) = 0$. Dakle, zaključak je isti kao u slučaju Ia).

Istaknimo ovdje da slučaj kada m leži na stranama (a ne na bridu) dvaju poliedara P_i i P_k ne može nastupiti jer m ne bi bio karika po definiciji karike.

Dakle, u slučaju I) zbroj svih težina od m , obzirom na P_1, \dots, P_k jest nula i doprinos na desnoj strani od (*) je nula.

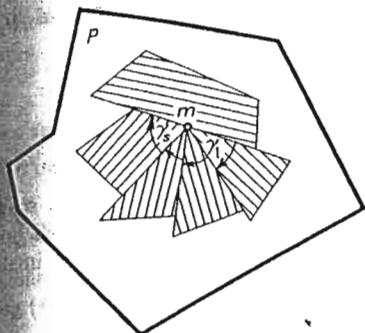
II) m je na nekoj strani od P , ali nije ni na jednom od njegovih bridova.

U tom slučaju je situacija kao na sl. 209.

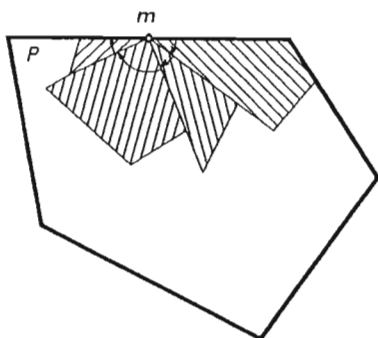
Stoga je u ovoj situaciji $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_s = \pi$, pa opet kao u I) zaključujemo da je doprinos na desnoj strani od (*) jednak nuli.

III) m je na nekom bridu poliedra P .

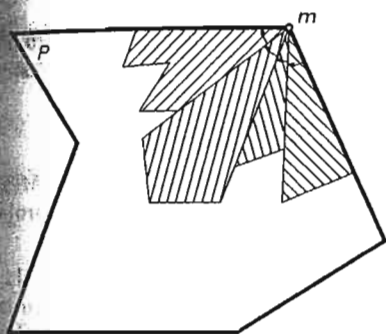
U tom slučaju neka je α diedar u P pridružen tom bridu. Sa slike 210a), b) vidimo da je tada $\gamma_1 + \dots + \gamma_s = \alpha$ ili $\gamma_1 + \dots + \gamma_s = \alpha - \pi$:



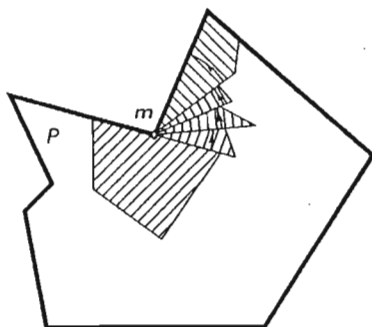
Sl. 208.



Sl. 209.



a)



b)

Sl. 210.

U oba ova slučaja vrijedi $f(\gamma_1) + \dots + f(\gamma_s) = f(\alpha)$, pa je doprinos takve karike $m \cdot f(\alpha)$.

Iz I), II) i III) slijedi da je desna strana od (*) zapravo zbroj težina svih karika, ali u odnosu na P , tj. to je Dehnova invarijanta $f(P)$. Time je lema dokazana. ■

Dokaz Hadwigerovog teorema. Pretpostavimo suprotno, tj. da su P i Q jednakosastavljivi i neka je

$$P = P_1 + \dots + P_k, \quad Q = Q_1 + \dots + Q_k, \quad P_1 \cong Q_1, \dots, P_k \cong Q_k.$$

Pokažimo da je tada $f(P) = f(Q)$. To će biti kontradikcija s pretpostavkom da je $f(P) \neq f(Q)$.

Prema Lemi 3 aditivnu funkciju f na S možemo proširiti do aditivne funkcije na skupu S' koji se dobije tako da skupu S dodamo sve diedre svih poliedara P_1, \dots, P_k . Kako su diedri poliedara Q_1, \dots, Q_k radi navedenih kongruencija jednaki diedrima od P_1, \dots, P_k , to prema Lemi 4 za Dehnovu invarijantu imamo

$$f(P) = f(P_1) + \dots + f(P_k), \quad f(Q) = f(Q_1) + \dots + f(Q_k).$$

Iz $P_i \cong Q_i$ slijedi da je $f(P_i) = f(Q_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, pa je konačno $f(P) = f(Q)$. Time je teorem dokazan. ■

LEMA 5. Za svako $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, broj $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{n}$ je iracionalan broj.

Dokaz. Neka je $\varphi = \arccos \frac{1}{n}$, tj. $\cos \varphi = \frac{1}{n}$. Pretpostavimo suprotno da je $\varphi/\pi = l/k$, za neke $k, l \in \mathbf{N}$. Tada je $k\varphi = l\pi$, pa je $\cos k\varphi = \pm 1$, tj. $\cos k\varphi$ je cijeli broj. Dokažimo sada da za svako $k \in \mathbf{N}$, broj $\cos k\varphi$ nije cijeli broj. To ćemo pokazati indukcijom po k . Za $k = 1$ je $\cos \varphi = 1/n$. Nadalje, imamo $\cos(k+1)\varphi + \cos(k-1)\varphi = 2 \cos k\varphi \cos \varphi$, pa zbog $\cos \varphi = 1/n$ slijedi

$$\cos(k+1)\varphi = \frac{2}{n} \cos k\varphi - \cos(k-1)\varphi. \quad (++)$$

Promotrit ćemo posebno dva slučaja: n paran, odnosno neparan.

1) n neparan. Pokažimo da je u tom slučaju $\cos k\varphi$ razlomak s nazivnikom n^k i brojnikom koji je relativno prost s brojem n . Zaista, za $k = 1$ i $k = 2$ to je istina.

$$\cos \varphi = \frac{1}{n}, \quad \cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 = \frac{2}{n^2} - 1 = \frac{2 - n^2}{n^2}.$$

Kako je n neparan, to je najveća zajednička mjera $M(2, n) = 1$, i stoga i $M(2 - n^2, n) = 1$. Sada pretpostavimo da je za neko $k \geq 2$ tvrdnja istinita za sve brojeve $1, 2, \dots, k$ i dokažimo je za $k+1$. Prema pretpostavci indukcije imamo

$$\cos k\varphi = \frac{a}{n^k}, \quad \cos(k-1)\varphi = \frac{b}{n^{k-1}},$$

gdje su $a, b \in \mathbf{N}$ i $M(a, n) = M(b, n) = 1$. Zbog $(++)$ slijedi

$$\cos(k+1)\varphi = \frac{2}{n} \cdot \frac{a}{n^k} - \frac{b}{n^{k-1}} = \frac{2a - bn^2}{n^{k+1}}.$$

Kako je $M(a, n) = M(2, n) = 1$, to je $M(2a, n) = 1$, pa zbog $M(b, n) = 1$ slijedi da je i $M(2a - bn^2, n) = 1$. Time je lema dokazana za neparno n .

2) n paran. Neka je $n = 2m$, $m \geq 2$. Pokažimo da je u tom slučaju $\cos k\varphi$ razlomak s nazivnikom $2m^k$ i brojnikom relativno prostim s brojem m . To se dokazuje sasvim analogno indukcijom po k .

Dakle, u svakom slučaju $\cos k\varphi$ nije cijeli broj ni za koji $k \in \mathbf{N}$. To je kontradikcija i lema je dokazana. ■

TEOREM 19 (Dehn, 1901). Pravi tetraedar T nije jednakosastavljen s kockom K istog obujma.

Dokaz. Neka je φ diedar pravilnog tetraedra T . Tada je (Primjer 22, §5.4) $\cos \varphi = \frac{1}{3}$. Diedar kocke K je očito $\frac{\pi}{2}$. Uzmimo skup $S = \left\{ \pi, \frac{\pi}{2}, \varphi \right\}$ i na tom skupu zadajmo funkciju f s vrijednostima

$$f(\pi) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f(\varphi) = 1. \quad (**)$$

Pokažimo da je f aditivna na S . Neka je

$$n_1\pi + n_2\frac{\pi}{2} + n_3\varphi = 0,$$

neka zavisnost među elementima iz S , tj. $n_1, n_2, n_3 \in \mathbf{Z}$. Pretpostavimo da je $n_3 \neq 0$. Tada dobivamo da je

$$\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3} = \frac{\varphi}{\pi} = -\frac{2n_1 + n_2}{2n_3}$$

racionalan broj, što je kontradikcija s prethodnom lemom. Stoga je $n_3 = 0$, pa zbog (**) slijedi da je

$$n_1f(\pi) + n_2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + n_3f(\varphi) = 0,$$

što znači da je f aditivna na S . Izračunajmo Dehnovu invarijantu. Kocka K duljine brida a ima Dehnovu inavrijantu

$$f(K) = 12af\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Označimo sa b duljinu brida tetraedra T . Tada je

$$f(T) = 6bf(\varphi) = 6b \neq 0.$$

Dakle, $f(K) \neq f(T)$, pa prema Hadwigerovom teoremu T i K nisu jednakosastavljivi poliedri. ■

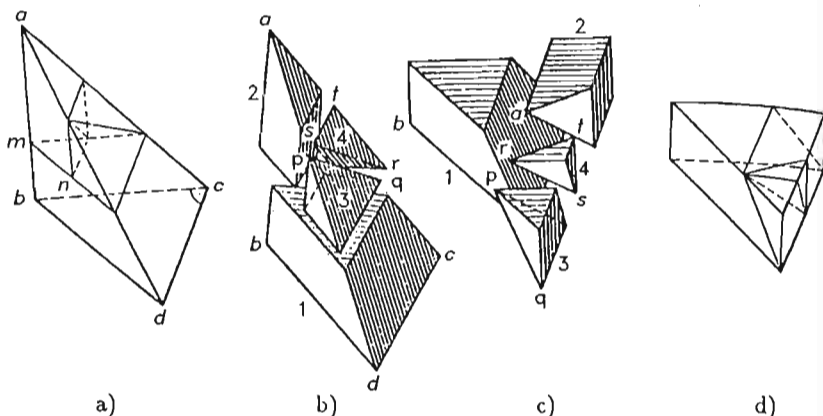
Slično se pokazuje da tetraedar kojemu su tri brida što izlaze iz istog vrha okomiti i iste duljine nije jednakosastavljiv s kockom jednakog volumena.

Međutim, ima tetraedara koji jesu jednakosastavljivi s kockom istog volumena. Takav je npr. Hillov tetraedar $ABCD$ za kojeg je $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, $|AB| = |BD| = |CD| = a$.

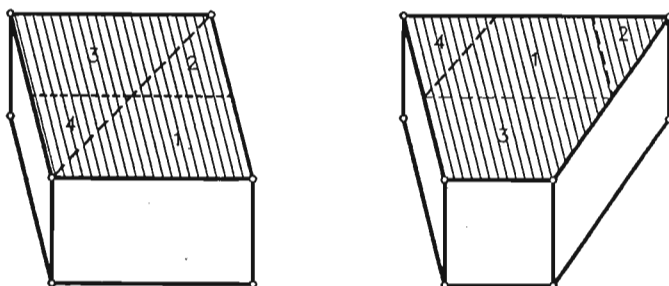
Na slici 211 vidimo kako je Hillov tetraedar jednakosastavljiv s trostranom prizmom, a ona je jednakosastavljiva s kockom.

"Nasumice" odabrani poliedri jednakih volumena najčešće neće biti jednakosastavljivi. No, za neke će klase poliedara to ipak vrijediti. Tako, npr., može se pokazati da su dva konveksna poliedra jednakih volumena jednakosastavljiva ako su im sve strane centralno simetrične. Isto tako iz Bolyaijevog teorema (1. dio, str. 279) odmah slijedi da su dvije prizme jednakih volumena i visina jednakosastavljive (sl. 212), a odavde slijedi da su svake dvije prizme jednakih volumena jednakosastavljive.

Dva su poliedra dopunsko jednaki ako im se mogu dodati u parovima kongruentni poliedri, tako da su dobiveni poliedri rastavno jednaki. Nije teško pokazati da su dva poliedra dopunski jednaka ako i samo ako su rastavno jednaka (tj. jednakosastavljiva), pa stoga i svi teoremi o rastavnoj jednakosti poliedara vrijede i za dopunsko jednake poliedre. (Zapravo, Hilbert je prvotno i razmatrao dopunsku jednakost.)



Sl. 211.



Sl. 212.

Napomenimo također da Hadwigerov teorem povlači jedan “prirodan” uvjet za jednakosastavljive poliedre. Vrijedi, naime, ovaj teorem (koji je, ustvari, Dehn prvo i dokazao).

TEOREM 20 (Dehn, 1901). *Neka su P i Q poliedri s diedrima (u radijanima) redom $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ i β_1, \dots, β_q . Ako su P i Q jednakosastavljivi, onda postoje prirodni brojevi k_1, \dots, k_p i l_1, \dots, l_q i cijeli broj n , tako da vrijedi*

$$\sum_{i=1}^p k_i \alpha_i - \sum_{j=1}^q l_j \beta_j = n\pi.$$

Iz ovog teorema onda također lagano slijedi da pravilni tetraedar i kocka istog volumena nisu jednakosastavljivi (i tako je to Dehn prvi i pokazao).

Napomenimo nadalje da i u svim dimenzijama $n \geq 3$ pravilni n -simpleks i n -dimenzionalna kocka istog “hiper-volumena” nisu jednakosastavljivi.

Malo općenitiji pojam od jednakosastavljivosti je tzv. G -jednakosastavljivost, gdje je G podgrupa grupe izometrija prostora. U tom slučaju se zahtijeva da sastavni dijelovi budu u parovima G -izometrični, tj. da se jedan iz drugoga dobiju izometrijom iz podgrupe G . I tu vrijede tvrdnje analogne Hadwigerovom teoremu.

Tek je 1965. godine je dokazano da su nužni uvjeti iz Hadwigerovog teorema i dovoljni uvjeti za jednakosastavljivost. To je dokazao J. Sydler. Tako konačno imamo.

TEOREM 21 (Dehn-Hadwiger-Sydler, 1965). *Dva su poliedra P i Q jednakosastavljiva ako i samo ako su im volumeni jednaki i sve Dehnove invarijante jednake, tj. $f(P) = f(Q)$, za sve aditivne funkcije f za koje je $f(\pi) = 0$.*

Napomenimo da je mnoge dokaze spomenutih teorema uvelike pojednostavio V. G. Boltjanski²² u svojoj knjizi *Tretja problema Gilberta*, Nauka, Moskva, 1977.

§ 6. Izmjerivi skupovi točaka u prostoru i njihov volumen

6.1. Izmjerivost i volumen

Kažemo da je skup točaka S u prostoru **izmjeriv** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoje poliedri (tj. zbrojevi konačno jednostavnih poliedara) P i P' , tako da je

$$P \subseteq S \subseteq P' \quad \text{i} \quad v(P') - v(P) < \varepsilon.$$

Poliedar P je **upisan**, a P' **opisan** skupu S . Možemo, dakle, reći da je skup točaka izmjeriv ako se razlika volumena tom skupu opisanog i upisanog poliedra može učiniti po volji malim.

Očito je poliedar izmjeriv skup, jer se za upisani i opisani uzme sam taj poliedar.

Neka je \mathcal{M} skup (množina) svih izmjerivih skupova u prostoru (uključujući prazan skup \emptyset). Tada je skup svih poliedara \mathcal{P} sadržan u \mathcal{M} . Kao i u slučaju površine (1. dio, str. 267), za dani skup S promotrimo skupove $\mathcal{U}(S)$ i $\mathcal{O}(S)$ upisanih i opisanih poliedara, i u svezi s time **unutarnju mjeru (volumen)**

$$v_{\mathcal{U}}(S) = \sup\{v(P) \mid P \in \mathcal{U}(S)\}$$

i **vanjsku mjeru (volumen)**

$$v_{\mathcal{O}}(S) = \inf\{v(P) \mid P \in \mathcal{O}(S)\}.$$

²²Vladimir G. Boltjanski (r. 1925), ruski matematičar.

I ovdje je $v_u(S) \leq v_o(S)$. Ekvivalentna definicija izmjerivosti je da je skup S izmjeriv ako je $v_u(S) = v_o(S)$, te definiramo njegovu mjeru (ili volumen u Jordanovom smislu) $v(S)$ formulom

$$v(S) = v_u(S) = v_o(S).$$

Kao što se u srednjoškolskoj nastavi planimetrije govori o “površini lika”, tako se u nastavi stereometrije govori o “volumenu tijela”, pri čemu se ima na umu gornji pojam.

Sada bismo u istom duhu kao i za površinu mogli nastaviti teoriju volumena, ali je to tehnički puno teže, a uostalom i nije jako korisno, ako se zna da je ta teorija Jordanove mjere mnogo uža od teorije Lebesgueove mjere (v. S. Mardešić, *Matematička analiza*, II dio. *Integral i mjera*, Školska knjiga, Zagreb, 1977). Umjesto, dakle, da krenemo tim “klasičnim” putem u izgradnji teorije volumena, mi ćemo prvo samo ukratko ukazati na taj put, a onda dati jedan alternativni način.

Prvo, ako je \mathcal{M} familija svih izmjerivih (u Jordanovom smislu) skupova u prostoru, a $v : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ funkcija volumena (u Jordanovom smislu), onda vrijedi sljedeće

TEOREM 1. a) Familija \mathcal{M} i funkcija volumena $v : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ imaju ova svojstva

1. $v(S) \geq 0$, za sve $S \in \mathcal{M}$;
2. $v(\emptyset) = 0$;
3. Ako su $S, S' \in \mathcal{M}$, onda je $S \cup S', S \setminus S', S \cap S' \in \mathcal{M}$;
4. Ako su $S, S' \in \mathcal{M}$ i $S \cap S' = \emptyset$, onda je $v(S \cup S') = v(S) + v(S')$;
5. Ako su $S, S' \in \mathcal{M}$, $S \subseteq S'$, onda je $v(S \setminus S') = v(S) - v(S')$, pa je posebnob) *monotona*;
6. Ako su $S, S' \in \mathcal{M}$ i $v(S \cap S') = 0$, onda je $v(S \cup S') = v(S) + v(S')$;
7. Funkcija v se na skupu poliedara $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ poludara s volumenom poliedara definiranim ranije.

b) Funkcija v sa svojstvima iz a) je jedinstvena.

Često koristan kriterij za izmjerivost skupova je tzv. svojstvo potpunosti skupa \mathcal{M} . Vrijedi naime ovo.

PROPOZICIJA 1. Neka je S skup točaka u prostoru. Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoje izmjerivi skupovi $A, B \in \mathcal{M}$, takvi da je $A \subseteq S \subseteq B$ i $v(B) - v(A) < \varepsilon$, onda je i S izmjeriv, tj. $S \in \mathcal{M}$.

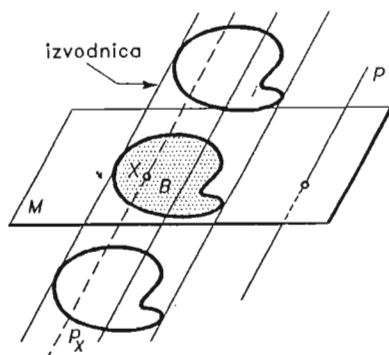
Dokaz. Za dano $\varepsilon > 0$, postoji $R, T \in \mathcal{M}$ tako da je $R \subseteq S \subseteq T$ i $v(T) - v(R) < \frac{\varepsilon}{3}$. Kako je R izmjeriv, postoji poliedar P , tako da je $P \subseteq R$, $v(R) - v(P) < \frac{\varepsilon}{3}$, a kako je T izmjeriv, postoji poliedar Q , tako da je $T \subseteq Q$ i $v(Q) - v(T) < \frac{\varepsilon}{3}$. Odavde slijedi da je $P \subseteq S \subseteq Q$, a zatim da vrijedi $v(Q) - v(P) = (v(Q) - v(T)) + (v(T) - v(R)) + (v(R) - v(P)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Kako je $\varepsilon > 0$ po volji dani broj, to slijedi da je $S \in \mathcal{M}$. ■

Da bismo upoznali konkretne izmjerive skupove (“tijela”), definirat ćemo valjak, stožac i kuglu.

Valjak, stožac i kugla i njihovi volumeni

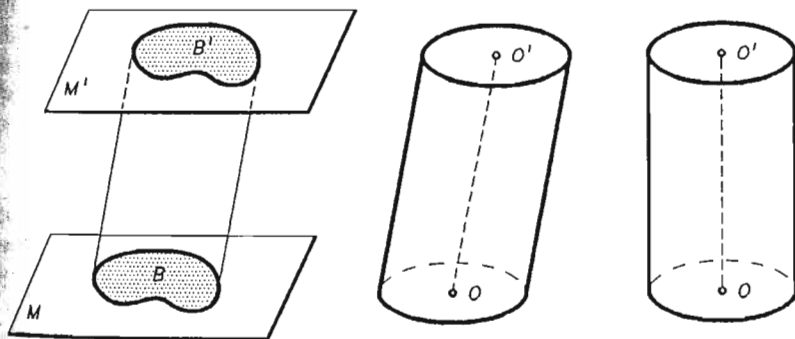
Neka je u ravnini M dan bilo koji skup točaka B i neka je p bilo koji pravac koji nije paralelan s ravninom M .



Sl. 213.

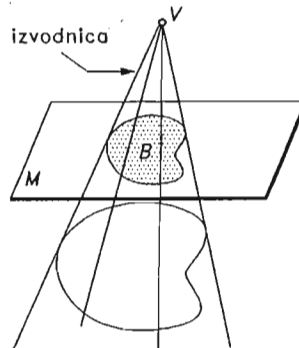
Unija svih pravaca p_X paralelnih sa p koji prolaze nekom točkom $X \in B$ zove se **neomeđeni valjak** (ili **cilindar**). Ako B ima rubnih točaka, onda se svaki pravac paralelan sa p koji prolazi rubnom točkom od B zove **izvodnica** tog neomeđenog valjka. Unija svih izvodnica zove se **plašt** tog valjka. Očito je plašt neomeđenog valjka zapravo njegov rub.

Ako je M' neka ravnina paralelna s M , onda one određuju zatvoreni sloj omeđen s $M \cup M'$. Presjek tog sloja s neomeđenim valjkom zove se **valjak** (**cilindar**). Presjeci B i B' neomeđenog valjka s ravninama M i M' zovu se **osnovke** (**baze**) valjka. Presjek izvodnice neomeđenog valjka sa spomenutim slojem zove se **izvodnica valjka**, a unija svih izvodnica se zove **plašt valjka**. Rub valjka očito je (?) unija osnovaka i plašta.



Sl. 214.

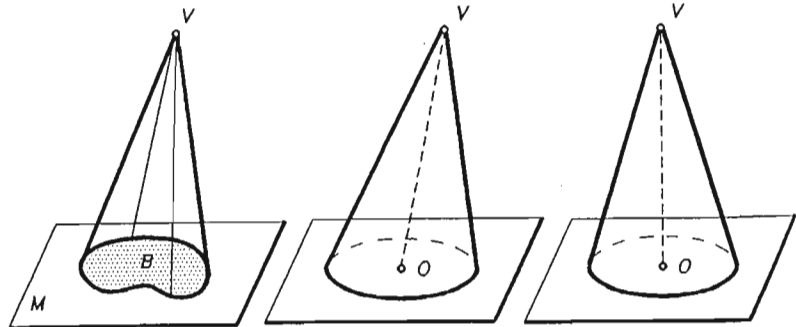
Ako je dani skup B jedan n -terokut, onda je dobiveni valjak jedna n -terostrana prizma. Dakle, prizma je poseban slučaj valjka. Od posebnog je interesa **kružni valjak**, a to je onaj kojemu su osnovke krugovi. Os kružnog valjka je spojnica središta baza. Valjak je **uspravan** ako mu je izvodnica okomita na ravninu osnovke. **Visina** valjka je udaljenost ravnina njegovih osnovaka. Očito su osnovke valjka izometrični skupovi (jedna iz druge se dobije translacijom), te da su duljine svih izvodnica jednake. Također je očito da ako je baza konveksan skup, da je onda valjak konveksan skup. Očito je prizma zapravo valjak čija je baza poligon.



Sl. 215.

Neka je sada u ravnini M dan neki skup točaka B i neka je V bilo koja točka izvan M . Unija svih polupravaca s početkom V koji sadrži neku točku skupa B zove se **neomeđeni stožac** (ili **konus**). Svaki polupravac s početkom V koji sadrži neku točku ruba od B zove se **izvodnica** tog neomeđenog stošca. Unija svih izvodnica se zove **plašt** tog stošca. Očito je plašt neomeđenog stošca zapravo njegov rub.

Unija svih dužina \overline{VX} , gdje je $X \in B$ zove se **stožac** (**konus**, **čunj**) nad B ili s **osnovkom** (**bazom**) B i **vrhom** V . Svaka dužina \overline{VX} , gdje je X rubna točka skupa B zove se **izvodnica** stošca, a unija svih izvodnica **plašt** stošca.



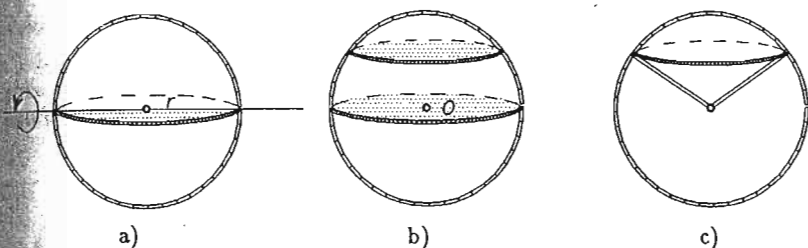
Sl. 216.

Rub stošca je unija osnovke i plašta. Ako je dani skup B jedan n -terokut, onda je dobiveni stožac jedna n -terostrana piramida, tj. piramide su posebni slučajevi stošca. Od posebnog je interesa **kružni stožac**, a to je onaj kojemu je osnovka krug. Os kružnog stošca je dužina koja spaja vrh V i središte baze.

Kružni stožac je uspravan ako mu je os okomita na ravninu baze. Visina stošca je udaljenost vrha do ravnine baze. Neomeđeni dvostruki konus je unija svih pravaca XV , kada X prolazi skupom B .

Uspravni kružni valjci i stošci pripadaju u tzv. **rotaciona tijela**, jer se dobivaju rotacijom, i to valjak rotacijom pravokutnika oko osi OO' , a stožac rotacijom pravokutnog trokuta oko katete OV .

Neka je O točka u prostoru, a $r \geq 0$ dani realni broj. **Kugla** sa središtem (ili centrom) O i radijusom (polumjerom) r je skup svih točaka X u prostoru za koje je $|OX| \leq r$. Rub kugle se zove **kuglina ploha** ili **sfera** s centrom O i radijusom r . Sfera je, dakle, skup svih točaka koje imaju jednaku udaljenost r od centra O . **Dijametar** sfere (ili kugle) je dužina kojoj su krajevi na sferi, a prolazi centrom. Ti krajevi su **dijametralno suprotne točke** ili **antipodalne točke** na sferi (kratko **antipodi**). Kao što su valjak i stožac rotaciona tijela, tako je to i kugla. Ona se dobiva rotacijom polukruga oko dijametra kao osi (v. sl. 217a). Svaki presjek kugle ravninom je krug (ili \emptyset), presjek kugle s ravninom kroz središte je tzv.



Sl. 217.

veliki krug, a on je omeđen tzv. **velikom kružnicom** sfere. Svaka ravnina kroz središte zove se **ekvatorijalna ravnina** kugle ili sfere (sl. 217b). Ona dijeli kuglu (sferu) na dvije simetrične **polukugle** (polusfere). **Kuglina kapica** (odsječak ili kalota) dio je kugle kojega odsijeca ravnina, a **kuglin isječak** je kuglin odsječak zajedno sa stošcem kojemu je vrh u centru kugle, a baza presjek ravnine s kuglom (sl. 217c).

TEOREM 2. a) Neka je B baza, a h visina valjka C . Ako je B izmjeriv skup (u ravnini), onda je valjak izmjeriv (tj. ima volumen) i $v(C) = p(B) \cdot h$, gdje je $p(B)$ površina baze.

b) Neka je B baza, a h visina stošca S . Ako je B izmjeriv skup (u ravnini), onda je stožac izmjeriv i volumen mu je $v(S) = \frac{1}{3}p(B) \cdot h$.

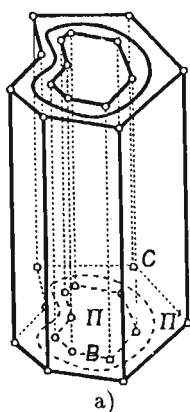
Dokaz. a) Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji broj. Kako je B izmjeriv skup točaka, postoje poligoni Π, Π' (u ravnini M baze B) takvi da je

$$\Pi \subseteq B \subseteq \Pi' \quad \text{i} \quad p(\Pi') - p(\Pi) < \frac{\varepsilon}{h}.$$

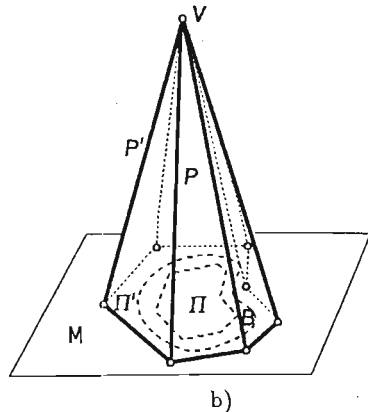
Neka su P i P' prizme s osnovkama Π i Π' i visinom h (sl. 218a). Tada je $P \subseteq C \subseteq P'$ i zbog $v(P) = p(\Pi) \cdot h$, $v(P') = p(\Pi') \cdot h$ imamo da je $v(P') - v(P) < \varepsilon$. Stoga je C izmjeriv skup točaka. Nadalje, iz $p(\Pi) \leq p(B) \leq p(\Pi')$, množenjem sa h dobivamo $v(P) \leq p(B) \cdot h \leq v(P')$. S druge je strane $v(P) \leq v(C) \leq v(P')$, pa iz posljednje dvije nejednakosti zaključujemo da je

$$|v(C) - p(B) \cdot h| \leq v(P') - v(P) < \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bilo koji broj, to slijedi nužno $v(C) = p(B) \cdot h$.



a)



b)

Sl. 218.

b) Ideja je slična kao u a). Uzmimo bilo koji $\varepsilon > 0$. Zbog izmjerivosti baze B , postoje poligoni Π i Π' , tako da je

$$\Pi \subseteq B \subseteq \Pi' \quad \text{i} \quad p(\Pi') - p(\Pi) < \frac{3\varepsilon}{h}.$$

Neka su P i P' piramide s osnovkama Π i Π' i vrhom u vrhu V stošca S (sl. 218b). Tada je očito $P \subseteq S \subseteq P'$ i $v(P') - v(P) < \varepsilon$, jer su volumeni piramide $v(P) = \frac{1}{3}p(\Pi) \cdot h$, $v(P') = \frac{1}{3}p(\Pi') \cdot h$. Stoga je stožac S izmjeriv skup. Množenjem nejednakosti $p(\Pi) \leq p(B) \leq p(\Pi')$ sa $h/3$ slijedi $v(P) \leq \frac{1}{3}p(B) \cdot h \leq v(P')$, pa to zajedno s $v(P) \leq v(S) \leq v(P')$ i $v(P') - v(P) < \varepsilon$ povlači

$$\left| v(S) - \frac{1}{3}p(B) \cdot h \right| \leq v(P') - v(P) < \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ je bilo koji broj, pa je stoga $v(S) = \frac{1}{3}p(B) \cdot h$. ■

KOROĐAR 1. a) Volumen V kružnog valjka polumjera osnovke r i visinom duljine h je dan formulom $V = r^2 h \pi$.

b) Volumen kružnog stošca polumjera osnovke r i visinom duljine h je dan formulom $V = \frac{1}{3} r^2 h \pi$. ■

Primjer 1. Izračunajte volumen krnjeg stošca $S \setminus S'$, gdje su S i S' stošci sa zajedničkim vrhom V i osnovkama B i B' , a B' je presjek stošca S ravninom paralelnom s ravninom od B udaljenom za h od te ravnine.

Rješenje. Potpuno istim postupkom kao kod računanja volumena krnje piramide (v. Primjer 25, §5) dobivamo istu formulu

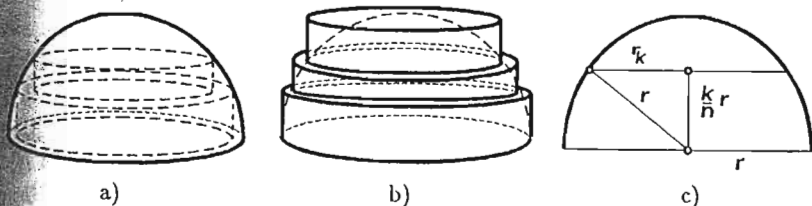
$$v(S \setminus S') = \frac{h}{3} \left[p(B) + \sqrt{p(B)p(B')} + p(B') \right].$$

Posebno, ako su B i B' krugovi s polumjerima r i r' , dobivamo da je $v(S \setminus S') = \frac{h\pi}{3} (r^2 + rr' + r'^2)$. ■

TEOREM 3. Kugla K je izmjeriv skup točaka i ako je r njen radijus, onda je njen volumen $v(K) = \frac{4}{3} r^3 \pi$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je jedna od polukugli K_1, K_2 izmjeriv skup volumena $\frac{2}{3} r^3 \pi$.

Ideja je da "upišemo" u polukuglu K_1 velik broj n valjaka visine r/n i isto tako da oko polukugle K_1 "opišemo" valjke, tj. da unutar K_1 i izvan K_1 izgradimo "tornjeve". (v. sl. 219a, b).



Sl. 219.

Tehnički to možemo provesti ovako (ali bez suvišnih detalja, jer ćemo volumen kugle ionako izvesti na još dva načina). Neka je $\varepsilon > 0$. Uzmimo $n \in \mathbb{N}$, tako da je

$$n > \frac{r^3 \pi}{\varepsilon}.$$

Označimo sa B_0 osnovku (veliki krug) polukugle K_1 , sa M_0 ravninom od B_0 , a sa M_1, M_2, \dots, M_{n-1} redom ravnine paralelne s M_0 koje sijeku polukugle, a svake dvije susjedne iz niza M_1, M_2, \dots, M_{n-1} udaljene su za po r/n . Neka je $B_k = M_k \cap K_1$ ($0 \leq k \leq n-1$). B_k je krug radijusa r_k (sl. 219c). Neka je C_k uspravan kružni valjak s bazom B_{k+1} i visinom r/n , tako da su C_k i ravnina M_0 s iste strane ravnine M_{k+1} ($0 \leq k \leq n-2$). Neka je C'_k ($0 \leq k \leq n-1$), uspravni valjak s osnovkom

B_k i visinom r/n , tako da su M_0 i C'_k s raznih strana od M_k za $k \geq 1$, a da je valjak C'_0 s iste strane od M_0 kao i polukugla. Neka je $C = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_{n-2}$, $C' = C'_0 \cup C'_1 \cup \dots \cup C'_{n-1}$. Tada je $C \subseteq K_1 \subseteq C'$. Valjci C_0, C_1, \dots, C_{n-2} , odnosno $C'_0, C'_1, \dots, C'_{n-1}$ imaju disjunktne unutrašnjosti, pa je stoga

$$v(C) = \sum_{i=0}^{n-2} v(C_i), \quad v(C') = \sum_{i=0}^{n-1} v(C'_i).$$

Lakim računom se dobiva

$$v(C) = r^3\pi - \frac{r^3\pi}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2, \quad v(C') = r^3\pi - \frac{r^3\pi}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2. \quad (*)$$

Stoga je $v(C') - v(C) = \frac{r^3\pi}{n} < \varepsilon$. Kako je $\varepsilon > 0$ bilo koji broj, a C i C' izmjerivi skupovi, to iz Propozicije o potpunosti slijedi da je i polukugla K_1 izmjeriva, pa stoga i kugla K .

Sada izračunajmo volumen od K_1 . Prvo imamo da je $v(C) \leq v(K_1) \leq v(C')$. S druge strane, indukcijom se lako dokaže nejednakost

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2.$$

Oдавde i iz (*) sada dobivamo da je

$$v(C) < r^3\pi - \frac{r^3\pi}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot r^3\pi, \quad v(C') > r^3\pi - \frac{r^3\pi}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot r^3\pi.$$

Prema tome je

$$v(C) < \frac{2}{3}r^3\pi < v(C').$$

Oдавde i iz nejednakosti $v(C) \leq v(K_1) \leq v(C')$ slijedi

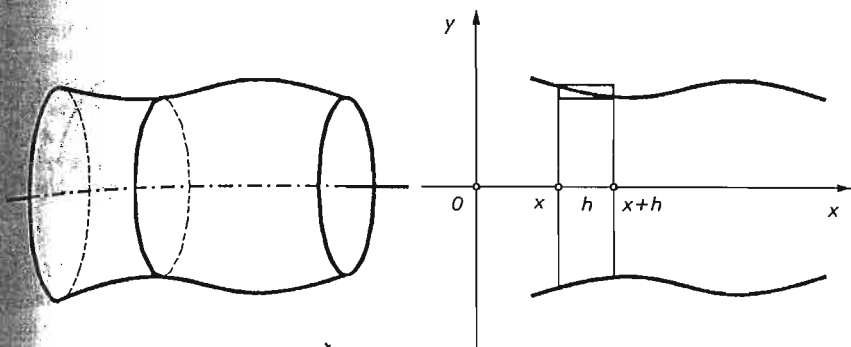
$$\left| v(K_1) - \frac{2}{3}r^3\pi \right| < v(C') - v(C) < \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ po volji (mali broj), slijedi da je $v(K_1) = \frac{2}{3}r^3\pi$. ■

6.2. Volumen rotacionog tijela

U najjednostavnijem obliku **rotaciono tijelo** je skup točaka u prostoru za koje postoji pravac (os rotacije), tako da je presjek tog skupa sa svakom ravninom okomitom na taj pravac krug s centrom na pravcu (ili je taj presjek \emptyset), v. sl. 220. Npr., uspravni kružni valjak i stožac, kao i kugla su rotaciona tijela.

Da odredimo volumen rotacionog tijela, koristit ćemo malo analitičke geometrije (v. pogl. VI) i integralni račun u rudimentarnoj formi.



Sl. 220.

Kroz os rotacije položimo ravninu i u toj ravnini uvedimo Kartezijev koordinatni sustav xy , tako da os rotacije bude os x .

Neka je presjek te ravnine s rotacionim tijelom krivulja koja u tom sustavu ima jednadžbu $y = f(x)$, i za koju je $y \geq 0$. (Obično se pretpostavlja da je funkcija f barem neprekidna.) Točkom $(x, 0)$ položimo okomitu ravninu na os x i sa $V(x)$ označimo volumen rotacionog tijela koji je lijevo od te ravnine. Razlika $V(x+h) - V(x)$ je volumen sloja debljine h , omeđenog sa ravninama okomitim na os x koje prolaze točkama s apscisama x i $x+h$. Neka je M najveća, a m najmanja vrijednost funkcije f na segmentu $[x, x+h]$. Tada taj sloj rotacionog tijela sadrži uspravni kružni valjak radijusa baze m i visine h , a sadržan je u takvom valjku radijusa baze M . Zato dobivamo

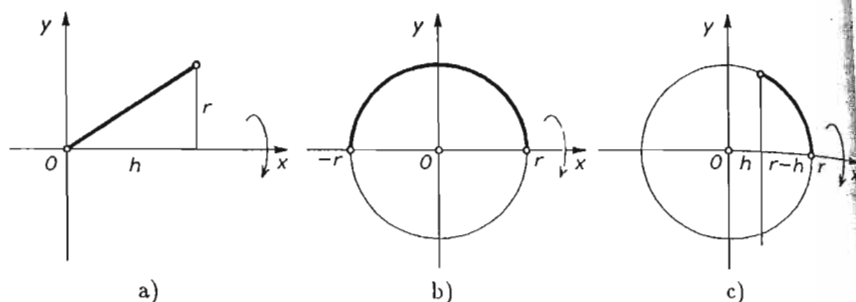
$$m^2 h \pi \leq V(x+h) - V(x) \leq M^2 h \pi, \quad \text{tj.} \quad m^2 \pi \leq \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \leq M^2 \pi.$$

Kada pustimo da visina h teži k nuli, lijeva i desna strana posljednje nejednakosti teži istoj veličini $f^2(x)\pi$. No limes veličine u sredini kada $h \rightarrow 0$ je derivacija $V'(x)$ funkcije V u točki x . Prema tome je $V'(x) = f^2(x)\pi$.

Stoga, ako želimo izračunati volumen dijela rotacionog tijela koje se nalazi između paralelnih ravnina $x = a$ i $x = b$ ($a < b$), onda iz poznate Newton-Leibnizove formule dobivamo

$$V(b) - V(a) = \int_a^b V'(x) dx = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

Kao primjer izračunajmo na taj način volumen stošca, kugle i kugline kapice. Za stožac imamo prema sl. 221a. da on nastaje rotacijom oko osi x dužine koja spaja ishodište i točku (h, r) . Jednadžba te dužine je $y = \frac{r}{h}x$, $0 \leq x \leq h$. Stoga je



Sl. 221.

volumen stošca jednak

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} r^2 h \pi.$$

Kugla nastaje rotacijom gornjeg polukruga (sl. 221b), čija rubna polukružnica ima jednadžbu $x^2 + y^2 = r^2$, $-r \leq x \leq r$. Dakle, tu je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$. Stoga je volumen kugle

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Kuglina kapica visine h nastaje rotacijom dijela gornjeg polukruga omeđenog krivuljom $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $r - h \leq x \leq r$, pa je volumen kapice jednak

$$V = \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{r-h}^r = \left(r - \frac{h}{3} \right) h^2 \pi.$$

Odavde se lako dobije i formula za volumen kuglinog isječka.

Primjer 2. a) Neka je u ravnini zadana neka jednostavna zatvorena krivulja čije je duljina l , a koja zatvara konveksnu figuru površine P . Izračunajte površinu skupa svih točaka u toj ravnini koje su za najviše d udaljene od te figure F (tzv. poopćeni krug), te izračunajte volumen skupa Φ (tzv. poopćena kugla) svih točaka u prostoru koje su za najviše d udaljene od F .

b) Volumen konveksnog poliedra je V , oplošje O , duljine bridova a_i , te pripadni diedri φ_i . Izračunajte volumen tijela čije su sve točke na udaljenosti najviše d od poliedra.

Rješenje. a) Uzmimo prvo da je F konveksni n -terokut. Tada se poopćeni krug oko tog poligona sastoji od F , od n pravokutnika visine d i čije su baze stranice poligona, te od n kružnih isječka od kojih možemo složiti krug radijusa d . Opišimo detaljnije ove kružne isječke. Krug radijusa d razrežimo sa n radijusa paralelnih okomicama na stranice poligona. To je i razlog zašto od tih n kružnih isječka možemo složiti krug. Prema tome,

u slučaju konveksnog poligona tražena je površina jednaka $P + l \cdot d + d^2 \pi$. Aproximacijama konveksnim poligonima dobiva se da formula ostaje valjana i općenito.

Da izračunamo volumen $v(\Phi)$, opet prvo pretpostavimo da je F konveksni n -terokut. Tada se Φ sastoji od prizme volumena $2dP$, od n poluvaljaka s ukupnim volumenom $\frac{1}{2}\pi d^2$ i od n tijela iz kojih se može složiti kugla radijusa d . Naime, kuglu radijusa d razrežemo sa n velikih polukrugova paralelnih bazama poluvaljaka, pa dobivamo slaganje tih tijela u kuglu. Dakle,

$$v(\Phi) = 2dP + \frac{1}{2}d^2 l \pi + \frac{4}{3}d^3 \pi.$$

b) Slično kao i u a), to tijelo se sastoji od polaznog poliedra, prizmi koje odgovaraju stranama poliedra, dijelova valjaka koji odgovaraju bridovima i dijelova kugli radijusa d koje odgovaraju vrhovima poliedra. Sada se lako vidi da je traženi volumen jednak

$$V + dP + \frac{1}{2}d^2 \sum_i (\pi - \varphi_i) a_i + \frac{4}{3}d^3 \pi. \quad \blacksquare$$

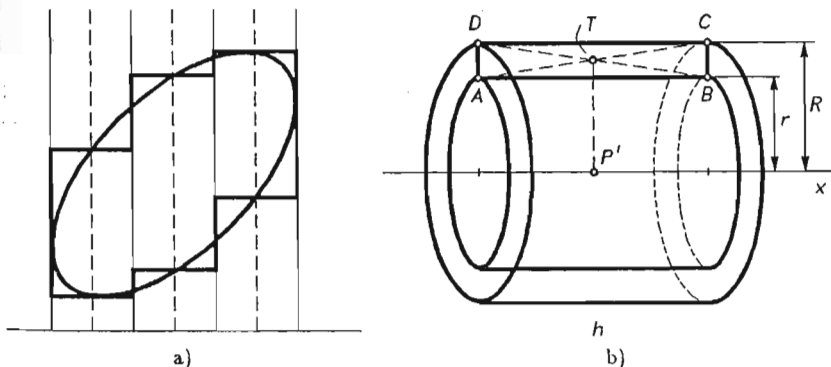
Primjer 3. (Guldinovo²³ pravilo za volumen). Neka je u ravnini M dan neki skup S koji ima površinu P . Neka je x pravac u M koji ne siječe S i neka je R rotaciono tijelo dobiveno rotacijom skupa S oko pravca x . Dokažite da je volumen $V = v(R)$ dan formulom

$$V = 2\pi d(T, x) \cdot P,$$

gdje je T centar masa (težište) od S , a $d(T, x)$ njegova udaljenost od osi x . Riječima: volumen rotacionog tijela je jednak produktu površine figure koja rotira i duljine puta kojeg pri jednom okretu opiše težište figure.

(Ako na S gledamo kao na homogenu ploču, tj. konstantne gustoće 1, onda je taj centar masa težište ploče u fizikalnom smislu.)

Rješenje. (heurističko). Kako S ima površinu, to ga možemo aproksimirati pravokutnicima (kao na sl. 222a) koji imaju dvije stranice paralelne pravcu x . Stoga i rotaciono tijelo možemo aproksimirati rotacionim tijelima dobivenim rotacijama tih pravokutnika.



Sl. 222.

²³Paul Guldin (1577 - 1643), švicarski matematičar. Guldinovo pravilo je poznavao već Pappus u 3. st.

Stoga je prvi korak da se tvrdnja dokaže za pravokutnik i njegovu rotaciju oko pravca paralelnog s njegove dvije stranice.

Neka je $ABCD$ takav pravokutnik (sl. 222b) i neka rotira oko osi x . Volumen V dobivenog rotacionog tijela je razlika volumena valjaka čija je zajednička os x , visina h , a radijusi baza R i r . Dakle

$$V = R^2 h \pi - r^2 h \pi = h \pi (R^2 - r^2).$$

S druge strane, površina pravokutnika je $P = (R - r)h$.

Nadalje, težište T pravokutnika (tj. presjek njegovih dijagonala) je od osi x udaljen $d(T, x) = r + \frac{1}{2}(R - r) = \frac{1}{2}(R + r)$. Stoga je duljina puta tog težišta pri jednom okretu jednaka $2\pi \cdot \frac{1}{2}(R + r) = \pi(R + r)$. Prema tome je

$$2\pi d(T, x) \cdot P = \pi(R + r) \cdot (R - r)h = \pi(R^2 - r^2)h = V,$$

čime je tvrdnja dokazana za taj pravokutnik.

Sada taj rezultat proširimo na nekoliko takvih pravokutnika. Neka su P_1, P_2, \dots, P_n površine tih pravokutnika, a y_i udaljenost težišta i -tog pravokutnika od osi x . Prema već dokazanome, imamo

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n 2\pi y_i P_i = 2\pi \cdot \frac{\sum_{i=1}^n y_i P_i}{P} \cdot P,$$

gdje je $\sum_{i=1}^n P_i$ površina "uglate" figure. Iz oblika radiusvektora težišta lako se pokazuje (pogl. VI, Analitička geometrija) da je udaljenost y težišta od osi x dana sa

$$\frac{\sum y_i P_i}{\sum P_i}.$$

Prema tome, i u ovom je slučaju $V = 2\pi y P$, jer je y radijus kružnice koju čini težište pri rotaciji.

Opći slučaj se sada dobiva standardnim aproksimacijama. Više detalja o toj aproksimaciji dat ćemo u izvodu Guldinovo pravila za oplošje. (Za sasvim korektan izvod trebalo bi više integralnog računa.)

Ako je dakle poznat položaj težišta, onda nam Guldinovo pravilo omogućava naći volumen rotacionog tijela i obratno, ako znamo volumen rotacionog tijela, onda možemo naći položaj težišta. ■

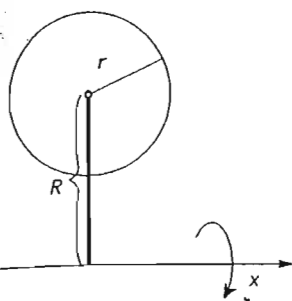
Primjer 4. Izračunajte volumen punog torusa, koji se dobije kada krug rotira oko nekog pravca u istoj ravnini, koji je disjunktan s krugom (v. sl. 223)

Rješenje. Neka je centar kruga udaljen od osi rotacije za R , i neka je r radijus kruga. Prema Guldinovu pravilu je volumen punog torusa jednak

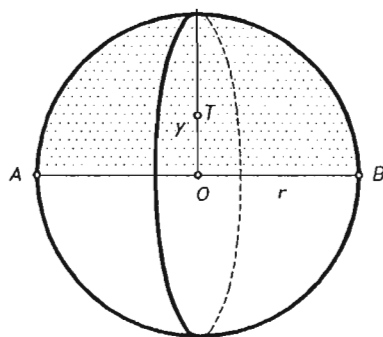
$$V = 2\pi R \cdot r^2 \pi = 2Rr^2 \pi^2.$$

Pokušajte tu formulu dobiti i pomoću formule za volumen rotacionog tijela. ■

Primjer 5. Odredite položaj težišta polukruga.



Sl. 223.



Sl. 224.

Rješenje. Rotacijom polukruga radijusa r oko dijametra \overline{AB} (sl. 224) dobije se kugla, kojoj je volumen $\frac{4}{3}r^3\pi$. Jasno je da težište T polukruga mora biti na osi simetrije polukruga, tj. na okomici kroz centar O na promjer \overline{AB} . Neka je y udaljenost težišta do pravca AB . Prilikom rotacije, težište T opiše put $2\pi y$. Površina polukruga je $\frac{1}{2}r^2\pi$.

Zato iz Guldinovog pravila imamo

$$\frac{4}{3}r^3\pi = 2\pi y \cdot \frac{1}{2}r^2\pi \Rightarrow y = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,4r. \blacksquare$$

6.3. Volumeni i Cavalierijev princip

Kao što smo na početku ovog §-a najavili, sada ćemo dati jedan alternativni pristup problemu volumena. To je vrlo operativan pristup, jer se njime mogu vrlo brzo u izgradnji teorije izvesti sve potrebne operativne formule.

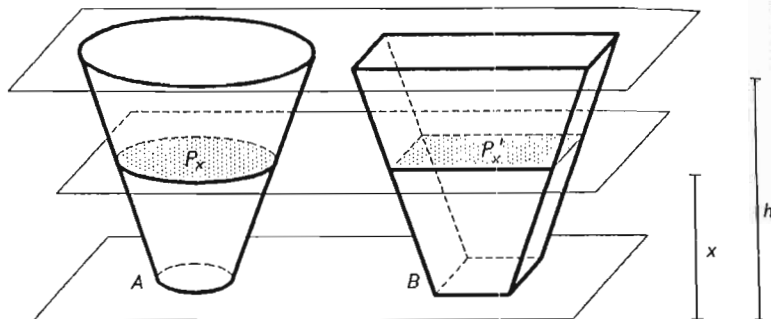
Neka je \mathcal{V} familija (množina) skupova u prostoru, koje ćemo opet zvati **izmjerivim skupovima**. Neka je na \mathcal{V} zadana realna funkcija $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}$ koju ćemo (opet) zvati **funkcija volumena** (ili kraće **volumen**) s ovim svojstvima

- (CV1) $v(A) \geq 0$, za svako $A \in \mathcal{V}$;
- (CV2) Svaki konveksni skup je član familije \mathcal{V} ;
- (CV3) $A, B \in \mathcal{V}$ povlači $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{V}$;
- (CV4) v je monotona, tj. $A, B \in \mathcal{V}, A \subseteq B \Rightarrow v(A) \leq v(B)$;
- (CV5) Za $A, B \in \mathcal{V}$, iz $v(A \cap B) = 0$ slijedi $v(A \cup B) = v(A) + v(B)$;
- (CV6) v je invarijantna na izometrije, tj. $A, B \in \mathcal{V}, A \cong B \Rightarrow v(A) = v(B)$;
- (CV7) Ako je K kvadar s duljinama bridova iz jednog vrha jednakim a, b i c , onda je $v(K) = abc$;

(CV8) (**Cavalierijev princip**). Neka su $A, B \in \mathcal{V}$ i M_0 neka ravnina. Ako su za svaku ravninu $M \parallel M_0$, presjeci $A \cap M$ i $B \cap M$ izmjerivi skupovi u ravnini M i ako je $p(A \cap M) = p(B \cap M)$, onda je

$$v(A) = v(B).$$

Cavalierijev princip se riječima izriče često ovako (iako malo neprecizno): Ako su dva tijela između dviju paralelnih ravnina i ako svi paralelni presjeci s tim tijelima imaju jednake površine, onda ta dva tijela imaju jednake volumene (sl. 225).



Sl. 225.

U terminima integralnog računa, često se Cavalierijev princip simbolički izriče ovako (uz oznake na slici):

$$P_x = P'_x, \quad \forall x \in [0, h] \Rightarrow v(A) = \int_0^h P_x dx = \int_0^h P'_x dx = v(B).$$

Već je Arhimed uočio taj princip (pa ga neki i zovu Arhimedov princip), ali naravno, tada još nije znao prave razloge za valjanost tog principa. Cavalierijev princip je, zapravo, neposredna posljedica Fubinijevog²⁴ teorema, koji, grubo govoreći, kaže da se višestruki integral računa uzastopnim integriranjem po jednoj varijabli u bilo kojem poretku. No, kao i u ravnini (1. dio, str. 273), taj je princip intuitivno vrlo prihvatljiv. (Za dokaz vidi S. Mardesić, *Matematička analiza II*, Školska knjiga, Zagreb, 1977 ili V. A. Zorič, *Matematički analiz II*, Nauka Moskva, 1984.) Stoga se u srednjoškolskoj nastavi volumen često obrađuje tako da se počne od aksioma (CV1), (CV5), (CV6), (CV7) i (CV8).

Pokazuje se da se ova klasa \mathcal{V} i funkcija v podudaraju s ranije definiranim klasom \mathcal{M} izmjerivih skupova i na njoj definiranim volumenom. Dokaz te činjenice konceptualno nije jako težak, ali je tehnički malo poduži, pa ga nećemo provesti. Umjesto toga pokažimo kako se mogu odavde izvesti sve poznate formule za volumene: prizme, valjka, piramide, stošca i kugle.

Iz (CV6) i (CV7), dopunjavanjem (kao i prije) slijedi da je volumen svake prizme jednak umnošku površine baze i pripadne visine.

Ako imamo valjak, onda između ravnina njenih osnovaka uzmemo prizmu s jednakim površinama osnovaka kao od valjka. Svi paralelni presjeci tada imaju jednake

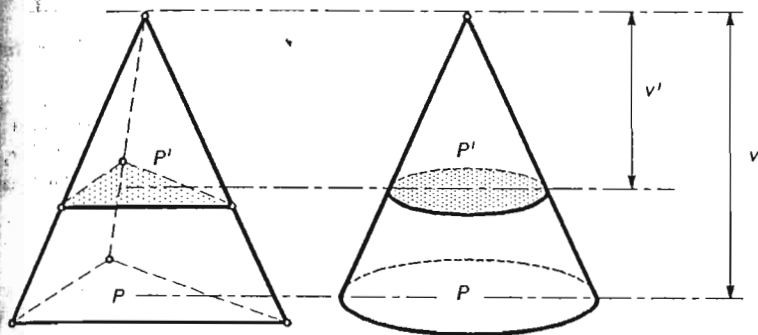
²⁴ Gvido Fubini (1879–1943), talijanski matematičar.

površine, jer su ti paralelni presjeci translati osnovke. Na temelju Cavalierijevog principa tada dobivamo.

PROPOZICIJA 2. *Volumen prizme kao i valjka jednak je produktu površine baze i pripadne visine. Posebno je volumen V kružnog valjka s radijusom baze r i visinom v dan formulom*

$$V = r^2 \pi v. \blacksquare$$

Da izračunamo volumen piramide i stošca, trebamo prvo sljedeću činjenicu (sl. 226). Neka je P površina baze a v visina piramide ili stošca. Ako tu piramidu ili



Sl. 226.

stožac presječemo paralelnom ravninom ravnini baze i to na udaljenosti v' od te baze, onda je površina P' presjeka s tom paralelnom ravninom jednaka

$$P' = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 P.$$

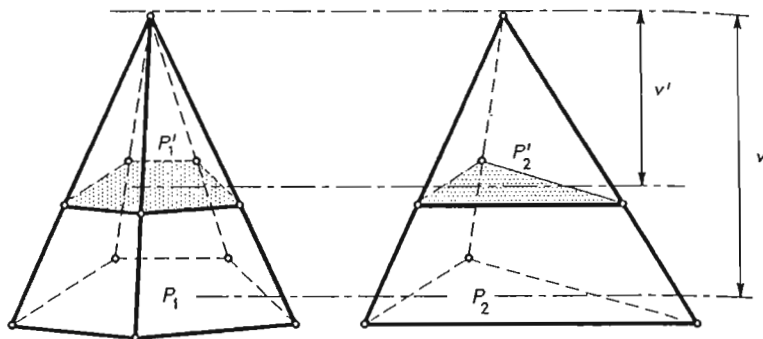
To izlazi iz sličnosti presjeka s bazom. Koeficijent sličnosti je očito v'/v , pa je odnos površina jednak kvadratu tog koeficijenta.

Uzmemo li sada bilo koje dvije piramide s bazama u nekoj ravnini i s jednakim površinama baza i jednakim visinama, iz gornje formule slijedi da su površine presjeka na svakom nivou jednake (tj. površine njihovih presjeka s ravninom paralelnom ravnini baze). Naime (v. sl. 227) iz gornje formule imamo

$$P'_1 = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 P_1, \quad P'_2 = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 P_2,$$

a tada $P_1 = P_2$ povlači $P'_1 = P'_2$. Iz Cavalierijevog principa tada slijedi da su i volumeni tih piramida jednaki. Isto vrijedi i za stožac i piramidu. Tako smo dokazali

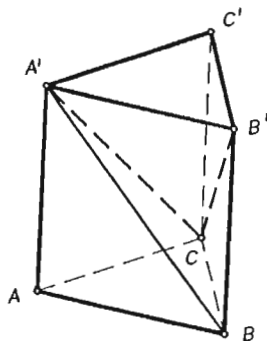
PROPOZICIJA 3. *Bilo koje dvije piramide ili piramida i stožac koji imaju jednake površine baza i jednake visine, imaju i jednake volumene. \blacksquare*



Sl. 227.

Prema tome da izračunamo volumen piramide, dovoljno je izračunati volumen jedne piramide. Najjednostavnija je trostrana piramida, tj. tetraedar, a to izračunamo iz volumena trostrane prizme. Ako je $ABCA'B'C'$ takva prizma s bazom $\triangle ABC$, onda imamo

$$v(ABCA'B'C') = v(A'ABC) + v(A'CC'B') + v(A'CBB').$$



Sl. 228.

No prema gornjoj propoziciji je $v(A'CC'B') = v(A'CBB')$, jer su baze $\triangle CC'B'$ i $\triangle CBB'$ sukladne, pa imaju jednaku površinu, a i visine iz zajedničkog vrha A' do tih baza (u istoj ravnini) su jednake. Isto je $v(A'ABC) = v(A'CC'B')$, jer tu možemo uzeti da su baze $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, a vrhovi A' i C . Prema tome

$$v(A'ABC) = \frac{1}{3}v(ABCA'B'C').$$

Znamo već da je volumen prizme površina baze puta visina, pa slijedi da je volumen trostrane piramide jednak trećini produkta površine baze i pripadne visine. Iz prethodne propozicije tada dobivamo

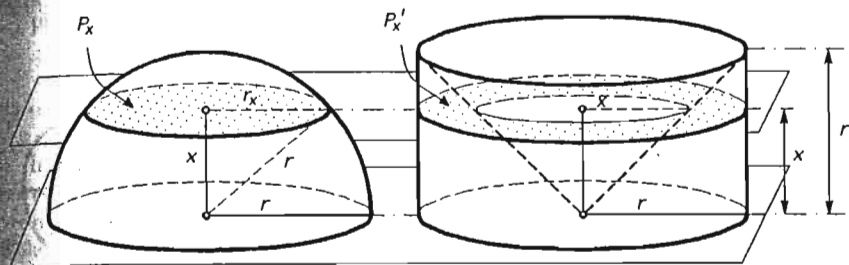
PROPOZICIJA 4. *Volumen piramide ili stošca jednak je trećini produkta površine baze i pripadne visine. Posebno je volumen V kružnog stošca s radijusom baze r i visinom v dan formulom*

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi v. \blacksquare$$

PROPOZICIJA 5. *Volumen V kugle radijusa r je dan formulom*

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Dokaz. Izračunat ćemo volumen polukugle. U tu svrhu na ravnini velikog kruga polukugle uzmimo valjak radijusa baze r i visine r i unutar njega upisan stožac kao na sl. 229. Tvrđimo da je volumen polukugle jednak volumenu tijela T



Sl. 229.

kojeg dobijemo kad iz valjka odstranimo stožac. Prvo ta dva tijela leže između dviju paralelnih (horizontalnih) ravnina na udaljenosti r . Presijecimo ih s horizontalnom ravninom na udaljenosti x od ravnine baze. Površina P_x presjeka polukugle s tom ravninom je površina kruga radijusa r_x . Iz Pitagorinog poučka slijedi $r_x^2 = r^2 - x^2$, pa je $P_x = r_x^2\pi = (r^2 - x^2)\pi$. Površina P'_x presjeka te ravnine s tijelom T je površina kružnog vijenca čiji je radijus vanjske kružnice r , a unutrašnje jednak x (zašto?). Stoga je $P'_x = r^2\pi - x^2\pi = (r^2 - x^2)\pi$. Vidimo, dakle, da je $P_x = P'_x$ za sve x , $0 \leq x \leq r$. Prema Cavalierijevom principu slijedi da je

$$V(\text{polukugle}) = v(T).$$

Prema Propozicijama 2 i 4 imamo da je

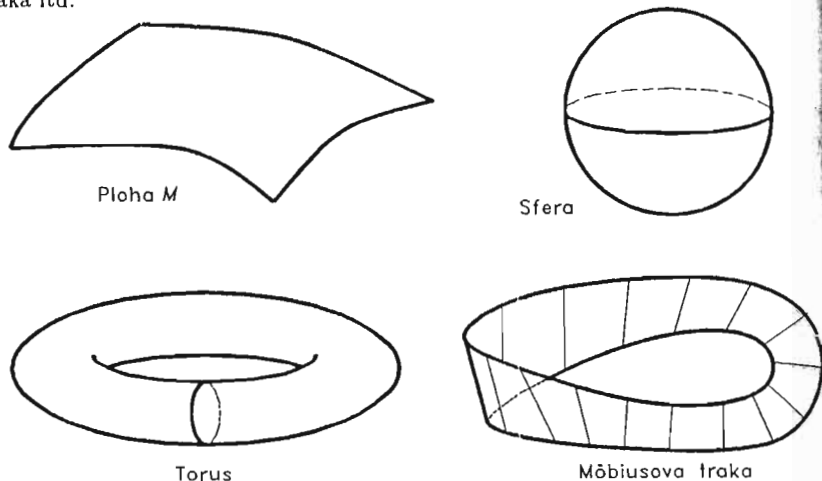
$$v(T) = r^2\pi \cdot r - \frac{1}{3}r^2\pi \cdot r = \frac{2}{3}r^3\pi.$$

Dakle je $v(\text{polukugle}) = \frac{2}{3}r^3\pi$, pa je volumen kugle zaista $V = \frac{4}{3}r^3\pi$. \blacksquare

§ 7. Oplošje plohe

7.1. Pojam plohe

Pojam plohe je zorno i intuitivno dosta jasan pojam. Neki primjeri plohe su: sfera, ravnina, poligon, krug, rub (jednostavnog) poliedra, rub kružnog valjka i njegov plašt, rub i plašt kružnog stošca, torus (tj. rub punog torusa), Möbiusova²⁵ traka itd.



Sl. 230.

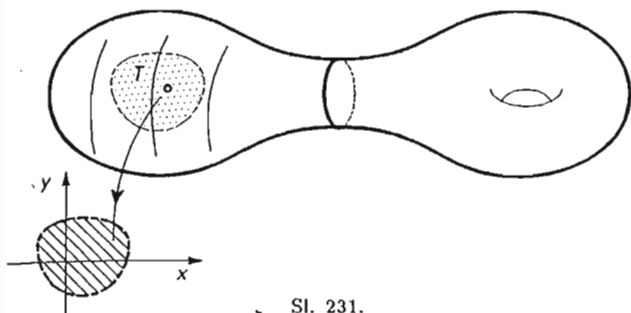
Precizna definicija plohe zadire u topologiju i diferencijalnu geometriju. Vidjeti smo da već kod definicije krivulje (1. dio, str. 179) trebamo pojmove iz topologije. Ploha u prostoru je u neku ruku 2-dimenzionalni analogon krivulje u ravnini.

Najkraće rečeno, **ploha** M je podskup prostora \mathbb{R}^3 sa svojstvom da svaka točka $T \in M$ ima okolinu U na M koja je homeomorfnu otvorenom krugu (v. sl. 231). Pritom pod pojmom **okoline** točke T na M podrazumijevamo skup $U \subseteq M$ koji sadrži presjek neke kugle s centrom T i skupa M .

Riječima možemo stoga reći da je ploha skup koji lokalno izgleda kao ravnina. Ili slobodnije govoreći, nekome tko stoji na plohi i dovoljno je kratkovidan, čini se da je na ravnini.

Ploha može biti **omeđena** i **neomeđena** (npr. sfera je omeđena, a ravnina neomeđena). **Ploha s rubom** je skup $M \subseteq \mathbb{R}^3$ sa svojstvom da svaka točka $T \in M$ ima okolinu koja je homeomorfnu ili otvorenom krugu ili otvorenom polukrugu koji uključuje rubni dijametar (bez dvije krajnje točke). Skup svih točaka plohe M koje imaju okolinu homeomorfnu otvorenom polukrugu zove se **rub plohe** i označava se

²⁵ August Möbius (1790–1868), njemački matematičar i astronom.



Sl. 231.

∂M . Npr., plašt kružnog valjka je ploha s rubom i rub se sastoji od dviju kružnica. Ploha M bez ruba je ona koja nema ruba, tj. za koju je $\partial M = \emptyset$. Npr., ravnina, sfera i torus su plohe bez ruba (kaže se još i zatvorena ploha).

Ploha se katkad naziva i 2-dimenzionalna mnogostrukost.

7.2. Oplošje plohe

Intuitivno je jasno da omeđenoj plohi možemo na neki način pridružiti njenu površinu. Pitanje kako to učiniti korektno je složeno pitanje, oko kojeg su se dugo vremena "lomila koplja" među matematičarima. Pojam površine (ili oplošja) takve plohe analogan je pojmu duljine luka krivulje u ravnini. Mi ćemo definirati to oplošje služeći se pojmom volumena. Prvo nam trebaju neki pojmovi.

Neka je T točka u prostoru \mathbf{R}^3 , a $M \subseteq \mathbf{R}^3$ neki skup. Udaljenost točke T do skupa M se definira kao broj

$$d(T, M) = \inf \{d(T, X) \mid X \in M\}.$$

Lako se vidi da ako je M zatvoren skup točaka, onda ta udaljenost postoji.

Neka je sada $r > 0$ bilo koji broj, a M ploha. Promotrimo tzv. poopćenu kuglu $K(r, M)$ oko M radijusa r . To je skup svih točaka prostora koje imaju udaljenost do M najviše jednaku r (sl. 232), tj

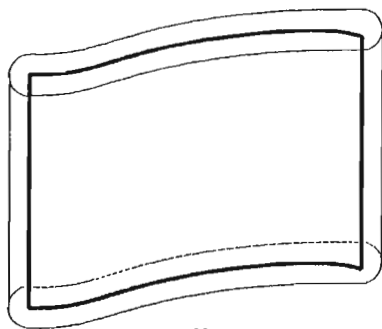
$$K(r, M) = \{T \in \mathbf{R}^3 \mid d(T, M) \leq r\}.$$

Broj $o(M)$ se zove oplošje plohe M (ili površina plohe), ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $r > 0$, tako da poopćena kugla $K(r, M)$ ima volumen i da vrijedi

$$\left| o(M) - \frac{1}{2r} v(K(r, M)) \right| < \varepsilon.$$

Drugim riječima, oplošje plohe M je

$$o(M) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(K(r, M))}{2r}.$$

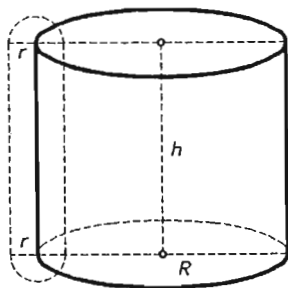


Sl. 232.

Ako taj limes postoji, kažemo da je M izmjeriva ploha.

Primjer 1. Izračunajte oplošje O plašta uspravnog kružnog valjka kojemu je radijus baze R , a visina h .

Rješenje. Poopćena kugla radijusa r oko tog plašta se može zamisliti kao rotaciono tijelo dobiveno rotacijom oko osi valjka figure koja se sastoji od pravokutnika i polukruga (sl. 233). Izračunajmo volumen V toga tijela. Rotacijom pravokutnika dobi-



Sl. 233.

se razlika dvaju valjaka čiji su radijusi baza $R + r$ i $R - r$, a visina je također h . Stoga je volumen tog tijela jednak

$$V_1 = h\pi [(R + r)^2 - (R - r)^2] = 4Rrh\pi.$$

Rotacijom dvaju polukruga nastaje tijelo čiji je volumen V_2 jednak volumenu punog torusa, a to znamo da je $V_2 = 2Rr^2\pi^2$.

Stoga je traženo oplošje jednako

$$O = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{V_1 + V_2}{2r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{4Rrh\pi + 2Rr^2\pi^2}{2r} = \lim_{r \rightarrow 0} (2Rh\pi + Rr\pi^2) = 2Rh\pi.$$

(Bez znanja o volumenu punog torusa, možemo zaključiti da je volumen V_2 manji od dvostrukog volumena tijela dobivenog tako da oko polukrugova opišemo pravokutnike čiji

je jedna stranica promjer a druga radijus r . Tada je $V_2 < 2[(R+r)^2 r \pi - (R-r)^2 r \pi] = 8Rr^2 \pi$, pa je $V_2/2r = 4Rr\pi$ i stoga $\lim_{r \rightarrow 0} V_2/2r = 0$.

Na drugi način (na koji se obično u školama radi) jest da se plašt "razreže" duž jedne izvodnice, pa se tako nastala ploha "speгла" u ravninu, te se "vidi" da tako dobijemo pravokutnik čije stranice imaju duljine $2R\pi$ i h , čija je površina $2R\pi h$. Korektnost tog pristupa ipak bi zahtijevala neku diferencijalno-geometrijsku elaboraciju o pravčastim ploham.

Napomenimo da je oplošje čitavog kružnog valjka jednako $2Rh\pi + 2R^2\pi = 2R\pi(h+R)$.

Primjer 2. Izračunajte oplošje O sfere S radijusa R .

Rješenje. Poopćena kugla oko te sfere je razlika dviju koncentričnih kugli radijusa $R+r$ i $R-r$, čiji je volumen

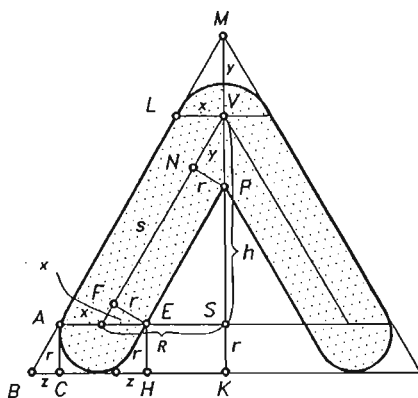
$$v(K(S, r)) = \frac{4}{3}(R+r)^3 \pi - \frac{4}{3}(R-r)^3 \pi = 8R^2 r \pi + \frac{8}{3} r^3 \pi.$$

Stoga je traženo oplošje

$$\begin{aligned} O &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(K(S, r))}{2r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \left(8R^2 r \pi + \frac{8}{3} r^3 \pi \right) = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(4R^2 \pi + \frac{4}{3} r^2 \pi \right) = 4R^2 \pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Primjer 3. Izračunajte oplošje plašta S uspravnog kružnog stošca s osnovkom polumjera R , visinom duljine h , pa stoga izvodnicom duljine $s = \sqrt{R^2 + h^2}$.

Rješenje. Neka je $r > 0$ tako da je $r < R$ i $r < h$. Promotrimo poopćenu kuglu $K(r, S)$ oko tog plašta S . Presijecimo je ravninom koja sadrži os stošca (sl. 234). Uz



Sl. 234.

oznake kao na slici, iz sličnosti odmah dobivamo

$$x = \frac{rs}{h}, \quad y = \frac{rs}{R}, \quad z = \frac{rR}{h}. \quad (1)$$

$K(r, S)$ očito sadrži razliku S' krnjeg uspravnog kružnog stošca s osnovkama, kojih su polumjeri $R+x$ i x , i visinom h te uspravnog kružnog stošca s osnovkom polumjera $R-x$ i visinom duljine $h-y$. Zato je volumen

$$\begin{aligned} v(S') &= \frac{h\pi}{3} [(R+x)^2 + (R+x)x + x^2] - \frac{\pi}{3}(R-x)^2(h-y) = \\ &= \frac{\pi}{3} [5hRx + 2hx^2 + R^2y - 2Rxy + x^2y]. \end{aligned}$$

Uvrstimo li ovamo vrijednosti za x, y iz (1), zbog $x^2y > 0$ dobivamo, nakon sređivanja,

$$v(S') > 2\tau R s \pi. \quad (2)$$

S druge strane, skup $K(r, S)$ sadržan je u razlici S'' uspravnog kružnog stošca s osnovkom polumjera $R+x+z$ i visinom duljine $h+r+y$ i uspravnog stošca s osnovkom polumjera $R-x+z$ i visinom duljine $h+r-y$. Zato je

$$\begin{aligned} v(S'') &= \frac{\pi}{3}(R+x+z)^2(h+r+y) - \frac{\pi}{3}(R-x+z)^2(h+r-y) = \\ &= \frac{2\pi}{3} [(R+z)^2y + 2(R+z)(h+r)x + x^2y]. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem izraza za x, y, z iz (1) slijedi nakon sređivanja

$$v(S'') = 2r\pi \left(Rs + \frac{2\tau Rs}{h} + \frac{\tau^2 Rs}{h^2} + \frac{\tau^2 s^3}{3h^2 R} \right). \quad (3)$$

Iz $r < h, \tau < R$ i $R < s$ dobivamo lagano da je

$$v(S'') < 2r\pi \left(Rs + \frac{4\tau s^3}{hR} \right). \quad (4)$$

Kako je $S' \subseteq K(r, S) \subseteq S''$, to je $v(S') \leq v(K(r, S)) \leq v(S'')$, pa iz (2) i (4) slijedi

$$Rs\pi < \frac{1}{2r}v(K(r, S)) < Rs\pi + 4\frac{\tau s^3\pi}{hR}.$$

Odatle konačno dobivamo da je traženo oplošje O plašta jednako

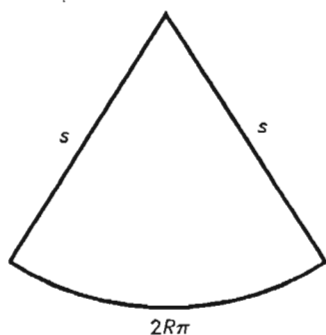
$$O = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r}v(K(r, S)) = Rs\pi.$$

I ovdje se može postupiti "školski". Razrežemo li plašt uspravnog kružnog stošca po jednoj izvodnici i zatim ga razmotamo ("speglamo") u ravninu, dobivamo kružni isječak, koji pripada luku kružnice s duljinom $2R\pi$ u krugu polumjera s kao na sl. 235. Prema formuli za površinu isječka (1. dio, str. 281) dobivamo da je oplošje jednako

$$O = \frac{1}{2}s \cdot 2R\pi = Rs\pi.$$

Napomenimo da je ukupno oplošje uspravnog kružnog stošca s polumjerom osnovke R i duljinom izvodnice s jednako

$$Rs\pi + R^2\pi = R\pi(R+s). \quad \blacksquare$$



Sl. 235.

Za računanje oplošja složenijih ploha služimo se često ovim svojstvima (koja nije teško dokazati iz svojstava volumena):

1. Ako je izmjeriva ploha M unija dviju izmjerivih ploha M_1 M_2 koje nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka (obzirom na plohu M), onda je oplošje $o(M)$ plohe M jednako $o(M) = o(M_1) + o(M_2)$.

2. Sukladne (tj. izometrične) izmjerive plohe imaju jednaka oplošja, tj. $M_1 \cong M_2 \Rightarrow o(M_1) = o(M_2)$.

3. Ako je M izmjeriva ploha u ravnini, onda je njeno oplošje jednako površini od M , tj. $o(M) = p(M)$.

Primjer 4. Izračunajte oplošje plašta krnjeg uspravnog kružnog stošca s polumjerima osnovaka R i r , a izvodnicom duljine s .

Rješenje. Neka su s_1 , s_2 duljine izvodnica uspravnih kružnih stožaca, čija je razlika promatrani stožac. Tada je $s = s_1 - s_2$. Ako su S_1 i S_2 plaštevii tih dvaju stožaca, tada prema prethodnom primjeru, imamo

$$o(S_1 \setminus S_2) = o(S_1) - o(S_2) = Rs_1\pi - rs_2\pi = Rs\pi + Rs_2\pi - rs_2\pi.$$

No iz sličnosti je očito $R : s_1 = r : s_2$, pa je $Rs_2 = rs_1$. Zbog toga dobivamo da je traženo oplošje

$$o(S_1 \setminus S_2) = Rs\pi + Rs_2\pi - rs_2\pi = Rs\pi + rs_1\pi - rs_2\pi = Rs\pi + rs\pi = (R + r)s\pi. \quad \blacksquare$$

Kao i kod volumena rotacionih tijela, tako imamo i način za računanje oplošja rotacionih ploha.

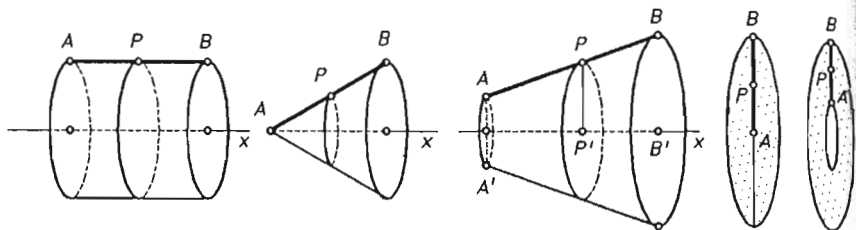
Primjer 5. (Guldinovo pravilo za oplošje). Neka je u ravnini M dana neka jednostavna (zatvorena ili ne) krivulja L duljine l . Neka je x pravac u M koji ne siječe L i neka je R rotaciona ploha dobivena rotacijom krivulje L oko pravca x . Dokažite da je oplošje $O = o(R)$ dano formulom

$$O = 2\pi d(T, x) \cdot l,$$

gdje je T centar masa (težište) od L , a $d(T, x)$ njegova udaljenost do osi x . Riječima: oplošje rotacione plohe je jednako produktu duljine krivulje koja rotira i duljine puta kojeg pri jednom okretu opiše težište krivulje.

Rješenje. Dokaz provodimo u tri etape: za slučajeve kada je krivulja izvodnica L a) dužina, b) izlomljena linija, c) bilo koja krivulja (koja ima duljinu).

a) *Slučaj dužine.* Težište dužine \overline{AB} je njegovo polovište P . Prilikom rotacije dužina može opisati, ovisno o svom položaju prema osi x , plašt valjka, plašt stošca, plašt krnjeg stošca, krug ili kružni vijenac (sl. 236).



Sl. 236.

Da Guldinovo pravilo vrijedi u svakom od ovih slučajeva, lako je provjeriti na osnovi formula za oplošja koja znamo. Na primjer u slučaju krnjeg stošca znamo da je oplošje jednako $(|AA'| + |BB'|)|AB|\pi$. No $|AA'| + |BB'| = 2|PP'|$ zbog teorema o srednjici trapeza. Stoga je to oplošje jednako $2|PP'|\pi \cdot l$, gdje je $l = |AB|$, pa je to u skladu s tvrdnjom. Posve analogno se dokazuju ostali slučajevi.

b) *Slučaj izlomljene linije.* Neka je $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$ izlomljena linija koja rotira oko osi x . Neka su O_1, O_2, \dots, O_n oplošja dobivena rotacijom dužina $\overline{AA_1}, \overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_{n-1}B}$ redom i neka su l_1, l_2, \dots, l_n njihove duljine redom, a h_1, h_2, \dots, h_n udaljenosti njihovih težišta (tj. polovišta) do osi x . Prema prethodnom slučaju, imamo da je ukupno oplošje jednako

$$O = O_1 + O_2 + \dots + O_n = 2\pi h_1 l_1 + 2\pi h_2 l_2 + \dots + 2\pi h_n l_n = 2\pi(h_1 l_1 + \dots + h_n l_n).$$

Iz formule za radijvektor težišta (VI, Analitička geometrija) slijedi da je udaljenost h težišta izlomljene linije do osi rotacije x dana formulom

$$h = \frac{h_1 l_1 + h_2 l_2 + \dots + h_n l_n}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}.$$

Stoga je

$$O = 2h\pi(l_1 + l_2 + \dots + l_n) = 2h\pi l,$$

što je opet u skladu s tvrdnjom.

c) *Slučaj bilo koje krivulje.* U danu krivulju L s krajevima A i B upišemo izlomljenu liniju $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$. Neka je $T^{(n)}$ njeno težište, a $O^{(n)}$ oplošje koje ta izlomljena linija opiše rotacijom oko osi x . Sada pustimo da broj n dužina te izlomljene linije neograničeno raste, i to tako da duljina najveće stranice među njima teži nuli. Tada nije teško pokazati da težišta $T^{(n)}$ konvergiraju nekom graničnom položaju T , a brojevi $O^{(n)}$ nekoj veličini O (i to bez obzira na izbor upisane izlomljene linije).

Tako dobivena točka T je težište krivulje L , a broj O oplošje rotacione plohe dobiveno rotacijom krivulje L oko osi x . Dakle, $T^{(n)} \rightarrow T$, $O^{(n)} \rightarrow O$ za $n \rightarrow \infty$. Isto tako, ako je $l^{(n)}$ duljina izlomljene linije $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$ upisane u L , a $y^{(n)}$ udaljenost

njegov težišta do osi x , tada pri istom graničnom procesu $l^{(n)} \rightarrow l$, a $y^{(n)} \rightarrow y$, gdje je $y = d(T, x)$ udaljenost T težišta od L do osi x . Prema slučaju b) imamo

$$O^{(n)} = 2\pi y^{(n)} l^{(n)}.$$

Prelaskom na limes i uzevši u obzir gornju diskusiju slijedi

$$O = 2\pi y \cdot l.$$

(Naravno, sasvim korektan dokaz ide pomoću integralnog računa.) ■

Primjer 6. Odredite oplošje O torusa koji se dobiva rotacijom kružnice radijusa r oko osi koja je od središta kružnice udaljena za $R \geq r$.

Rješenje. Težište kružnice je u njenom centru, koje rotacijom opiše kružnicu duljine $2R\pi$. Duljina (tj. opseg) kružnice koja rotira je $2r\pi$, pa je, prema Guldinovu pravilu za oplošja, traženo oplošje jednako

$$O = 2R\pi \cdot 2r\pi = 4Rr\pi^2.$$

Na drugi se način to može dobiti iz definicije oplošja i volumena punog torusa. Ako, naime, oko torusa T opišemo poopćenu kuglu nekog radijusa δ , onda je njen volumen jednak

$$v(T, \delta) = 2R(\tau + \delta)^2 \pi^2 - 2R(\tau - \delta)^2 \pi^2 = 8R\tau\delta\pi^2.$$

Stoga je traženo oplošje jednako

$$O = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{8R\tau\delta\pi^2}{2\delta} = 4R\tau\pi^2. \quad \blacksquare$$

Primjer 7. Sfera radijusa R presječena je dvjema paralelnim ravninama na udaljenosti h . Dokažite da je površina dijela sfere ("sloja") između tih ravnina jednaka $2Rh\pi$. Posebno je površina sferne kapice visine h jednaka $2Rh\pi$.

Rješenje. Prvo promotrimo uspravni krnji kružni stožac čiji plašt dira sferu radijusa R centrom O , tako da dirališta raspolavljaju izvodnicu stošca. Dokažimo da je oplošje plašta tog krnjeg stošca $2Rh\pi$, gdje je h visina krnjeg stošca.

Neka je \overline{AB} izvodnica krnjeg stošca, P njeno polovište, a P' nožište okomice iz P na os stošca. Tada je (zbog teorema o srednjici trapeza) oplošje plašta tog stošca (Primjer 4) jednako $2|PP'| \cdot |AB| \pi$. Kut između AB i osi stošca jednak je kutu između PO i PP' , te je $|AB| : |PO| = h : |PP'|$, pa je $|PP'| \cdot |AB| = |PO| \cdot h = Rh$.

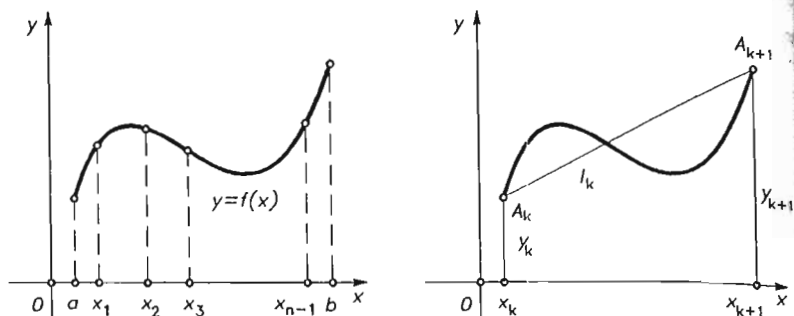
Sada se tvrdnja dalje dokazuje graničnim prijelazom, tako da oko tog "sloja" opisujemo sve manje krnje stošce visine kojih teže nuli. Detalje prepuštamo čitatelju.

Na druge načine se formula može izvesti pomoću Guldinova pravila, ili pomoću volumena kugline kapice ili vidi narednu diskusiju. ■

Kao i kod volumena rotacionih tijela, možemo dati i jednostavnu integralnu formulu za površinu rotacionih ploha. Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nenegativna funkcija koja ima derivaciju i neka njen graf s jednadžbom $y = f(x)$ rotira oko osi x . Želimo li naći površinu plašta dobivenog rotacijom tog grafa, uzmimo dovoljno finu subdiviziju $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ segmenta $[a, b]$ i gledajmo aproksimaciju plohe sa sumom plašteva krnjih stožaca (sl. 237).

Prema formuli za oplošje plašta krnjeg uspravnog kružnog stošca, k -ti krnji stožac ima oplošje plašta

$$2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot l_k.$$



Sl. 237.

Prema tome, suma svih oplošja plašteva jednaka je

$$O_n = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot l_k = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} y_k l_k + \pi \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) l_k.$$

Druga suma se može učiniti po volji malom, jer za $\varepsilon > 0$ možemo (zbog uniformne neprekidnosti) postići da je $|y_{k+1} - y_k| < \varepsilon/\pi l$, gdje je l duljina krivulje. Preostaje, dakle, samo prva suma. No $l_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$, pa je ta suma jednaka

$$2\pi \sum_{k=0}^{n-1} y_k l_k = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} y_k \sqrt{1 + \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2} (x_{k+1} - x_k).$$

No $\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$ je vrijednost derivacije $f'(t_k)$ u nekoj točki $t_k \in (x_k, x_{k+1})$ (to slijedi iz tzv. teorema o srednjoj vrijednosti). Dakle, preostaje

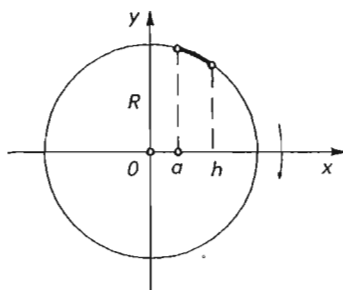
$$2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2} (x_{k+1} - x_k).$$

No ta suma je integralna suma funkcije $2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$.

Stoga je, prema definiciji određenog integrala, površina navedene rotacione plohe dana formulom

$$O = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Kao primjenu izvedimo formulu za površinu O sfernog sloja iz prethodnog primjera. Tu rotira dio luka kružnice $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$, za $a \leq x \leq a+h$. Stoga je $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, pa odavde odmah dobivamo $\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.



Sl. 238.

Prema gornjoj formuli imamo

$$O = 2\pi \int_a^{a+h} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_a^{a+h} R dx = 2\pi R x \Big|_a^{a+h} = 2\pi R h.$$

Primjer 8. Površina sfernog sloja (prethodni primjer) jednaka je P . Koji je najveći mogući volumen tog sloja?

Rješenje. Neka je R radijus sfere, a V volumen sfernog sloja. Znamo da je $P = 2\pi R h$, a $V = \pi h^2(3R - h)/3$ (§6.1). Stoga dobivamo

$$V = \frac{1}{2} h P - \frac{1}{3} h^3 \pi.$$

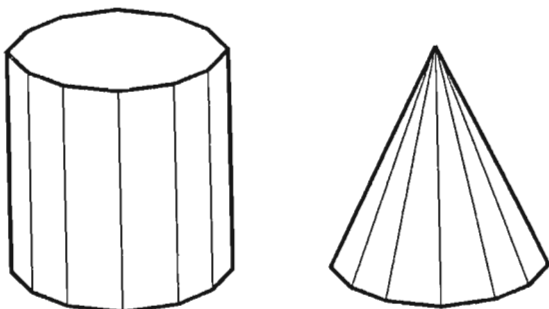
Ako ovu funkciju deriviramo po h , dobivamo $V' = P/2 - h^2 \pi$. Za traženje maksimuma gledamo gdje je $V' = 0$. Dobivamo da je to za $h = \sqrt{P/2\pi}$. Tada je maksimalni volumen jednak $P\sqrt{P/18\pi}$. ■

Vratimo se sada malo na oplošja valjka, stošca i sfere. Oplošja plašta valjka i stošca se mogu izračunati i tako da im se upisuju posebni poliedri: u kružni valjak pravilne prizme, a u stožac pravilne piramide (v. sl. 239). Stoga u osnovke upišemo pravilne n -terokute i neka je o_n opseg tog n -terokuta, a neka je h visina valjka ili stošca, te R polumjer osnovke.

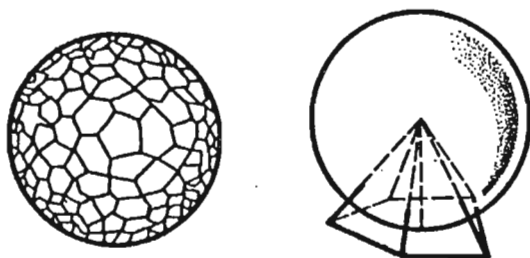
Tada je oplošje O_n plašta pravilne prizme upisane u (uspravni) kružni valjak jednak $O_n = o_n h$. Kada $n \rightarrow \infty$, $o_n \rightarrow 2R\pi$, pa $O_n \rightarrow 2\pi R h$, a to je, kao što znamo, oplošje plašta tog valjka. Slično je i sa stošcem. Ako je s_n duljina pobočnog brida, onda je oplošje O_n plašta pravilne piramide upisane u stožac jednako $O_n = o_n s_n / 2$. Kada $n \rightarrow \infty$, opet $o_n \rightarrow 2R\pi$, a $s_n \rightarrow s$, gdje je s duljina izvodnice stošca. Stoga $O_n \rightarrow O = R s \pi$, a to je kao što znamo oplošje plašta tog stošca.

Što se tiče sfere, oko nje možemo opisati konveksni poliedar s vrlo malim stranama koje diraju sferu (sl. 240).

Neka je P' oplošje poliedra (tj. suma površina strana), a P oplošje sfere. Tada je volumen opisanog poliedra $V = P'R/3$. Volumen poliedra je očito veći od volumena kugle omeđene s tom sferom, a manji od volumena koncentrične kugle malo većeg



Sl. 239.



Sl. 240.

radijusa $R + \epsilon$. Dakle,

$$\frac{4}{3}R^3\pi < \frac{1}{3}P'R < \frac{4}{3}(R + \epsilon)^3\pi, \quad \text{tj.} \quad 4R^2\pi < P' < 4\pi(R + \epsilon)^2 \left(1 + \frac{\epsilon}{R}\right).$$

Odavde vidimo da kada se veličine strana neograničeno umanjuju, tj. kada $\epsilon \rightarrow 0$, onda $P' \rightarrow 4R^2\pi$, dakle, $P = 4R^2\pi$, što već znamo da je oplošje sfere. Uočimo također da ako oko sfere opišemo valjak koji dodiruje sferu po ekvatoru i čija središta osnovaka su sjeverni i južni pol sfere, onda ta sfera i plašt valjka imaju jednake površine. Zapravo je tako Arhimed prvi i izračunao oplošje sfere.

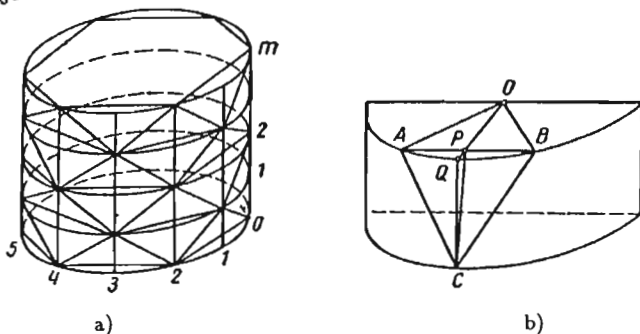
Međutim, da s upisivanjem(i opisivanjem) poliedara u računanju oplošja treba biti vrlo oprezan pokazuje sljedeći primjer. Mi ćemo u valjak upisati poliedar s puno malih strana i vidjeti da ta aproksimacija ne teži prema oplošju plašta valjka.

Primjer 9. ("Schwarzov²⁶ cilindar"). U uspravni kružni valjak polunjera osnovke R i visine h upišimo poliedar na sljedeći način. Visinu podijelimo na m jednakih dijelova i diobenim točkama položimo ravnine okomite na visinu, tako da je valjak podijeljen na m cilindričnih slojeva. Kružnicu osnovke podijelimo na $2n$ jednakih dijelova i diobenim točkama povucimo izvodnice valjka. Horizontalnim presjecima pridružimo brojeve $0, 1, 2, \dots, m$, a izvodnicama $0, 1, 2, \dots, 2n - 1$. Uočimo presjeke kružnica neparnih brojeva s izvodnicama neparnih brojeva, kao i presjeke kružnica parnih brojeva s izvodnicama parnih brojeva. Spojimo svaku od dobivenih točaka s najbližim preostalima. Na

²⁶Karl G. Schwarz (1843 – 1921), njemački matematičar.

Na taj način dobijemo upisanu poliedarsku plohu u valjak, a strane te poliedarske plohe su međusobno kongruentni trokutovi kojih ima $2mn$ (sl. 241a)). Neka je $P_{m,n}$ suma površina tih trokutova. Dokažite da $\lim_{m,n \rightarrow \infty} P_{m,n}$ ne teži prema oplošju plašta valjka.

Rješenje.



Sl. 241.

Pogledajmo jedan od tih trokutova, recimo $\triangle ABC$ (v. sl. 241b) i izračunajmo njegovu površinu. Prvo je $\sphericalangle AOB = \frac{2\pi}{n}$, pa je $|AB| = 2R \sin \frac{\pi}{n}$. Nadalje, $|PQ| = R - |OP| = R - R \cos \frac{\pi}{n} = R \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = 2R \sin^2 \frac{\pi}{2n}$. Iz $\triangle PCQ$ imamo da je

$$|CP| = \sqrt{|CQ|^2 + |PQ|^2} = \sqrt{\frac{h^2}{m^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}},$$

pa zbog $p(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CP|$ slijedi da je

$$P(\triangle ABC) = R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{h^2}{m^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

Stoga je ploština $P_{m,n}$ upisanog poliedra jednaka

$$P_{m,n} = 2mnR \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{h^2}{m^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}},$$

odnošno

$$P_{m,n} = 2\pi R h \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \sqrt{1 + \left(\frac{m}{n^2}\right)^2 \frac{\pi^4 R^2}{4h^2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^4}.$$

Brojevi m i n su nezavisni. Stavimo npr. da je $m = n$. Tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, a

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} = 1$, pa dobivamo da je tada $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,n} = 2\pi R h$. Ako pak

stavimo da je $m = n^2$, onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n^2,n} = R\pi \sqrt{4h^2 + R^2 \pi^4}$. Prema tome, $\lim_{m,n \rightarrow \infty} P_{m,n}$ ne postoji.

Primijetimo još da za $m = n^3$ dobivamo $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n^3, n} = \infty$. Objasnimo kako dobijemo beskonačno veliku površinu. U tu svrhu izračunajmo $\angle PCQ = \varphi$ i pogledajmo kako se ponaša pri našem graničnom procesu. Iz pravokutnog trokuta $\triangle PQC$ imamo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|PQ|}{|CQ|} = \frac{2R \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\frac{h}{m}}$$

U slučaju kada dobijemo dobar rezultat, tj. $m = n$ imamo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2R \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\frac{h}{m}} = \frac{2R}{h} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^2 \frac{\pi^2}{2n} \rightarrow 0$$

za $n \rightarrow \infty$. U tom slučaju svaka ploha upisanog poliedra teži prema položaju tangencijalne ravnine na cilindar. No, npr., u slučaju $m = n^2$ dobivamo $\lim \operatorname{tg} \varphi = R\pi^2/2h \neq 0$, a za $m = n^3$, $\lim \operatorname{tg} \varphi = \infty$, tj. $\varphi = \pi/2$, pa plohe teže prema normalnoj ravnini. ■

§ 8. Izoperimetrijski problemi u ravnini i prostoru

Prvo ćemo razmotriti problem u ravnini. Pod krivuljom ćemo podrazumijevati jednostavnu zatvorenu krivulju (tj. homeomorfnu sliku kružnice) u ravnini, koja ima duljinu.

Dvije (jednostavne zatvorene) krivulje se nazivaju **izoperimetrijske** ako imaju jednake perimetre (tj. opsege ili duljine).

Izoperimetrijski problem se sastoji u određivanju krivulje između svih izoperimetrijskih krivulja koja omeđuje najveću površinu. Ovaj problem je osnovni izoperimetrijski problem. Ima, naime, i drugih izoperimetrijskih problema. Neke od njih smo već riješili (npr. Primjer 57, §5), gdje smo dokazali da od svih izoperimetrijskih trokutova, jednakokranični ima najveću površinu. Slično je i za poligone: od svih izoperimetrijskih n -terokuta pravilni ima najveću površinu.

Rješenje osnovnog izoperimetrijskog problema dano je ovim teoremom.

TEOREM 1. *Od svih izoperimetrijskih krivulja kružnica omeđuje najveću površinu.*

Drugim riječima, ako je L perimetar (opseg) neke krivulje, a F površina koju omeđuje ova krivulja, onda vrijedi

$$L^2 - 4\pi F \geq 0, \quad \text{tj.} \quad F \leq \left(\frac{L}{2\sqrt{\pi}} \right)^2.$$

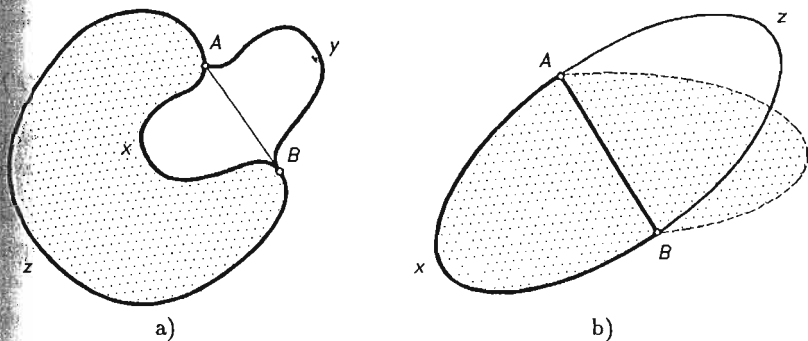
Jednakost se ovdje postiže ako i samo ako je krivulja kružnica.

Prvi korektan dokaz ovog teorema nađen je tek koncem XIX. stoljeća, iako je već Jacob Steiner oko 1830. godine dao pet dokaza, ali je u svakom od tih dokaza presužno pretpostavljao da postoji područje najveće površine uz zadani opseg. I mi ćemo dokazati teorem pod tom pretpostavkom.

Dokaz. Dokažimo prvo ovo.

Tvrđnja 1. Područje omeđeno krivuljom danog opsega (L) koje ima najveću površinu nužno je konveksno.

Zaista, kad ne bi bilo konveksno, onda bi postojala tetiva \overline{AB} čiji su krajevi u području, a unutrašnje točke te dužine izvan područja (sl. 242a). Zrcalimo li luk AzB te krivulje obzirom na pravac AB , dobivamo luk AyB . Tako dobivamo novo



Sl. 242.

područje omeđeno krivuljom $AzByA$, koje ima isti opseg L , ali veću površinu.

Tvrđnja 2. Ako konveksno područje omeđeno krivuljom danog opsega L ima najveću površinu, a tetiva \overline{AB} raspolavlja taj opseg, onda ta tetiva raspolavlja i površinu područja.

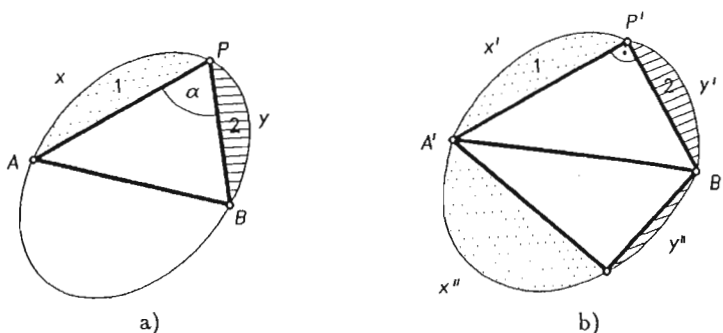
Zaista, neka je površina F tog područja omeđena krivuljom $AxBzA$ (sl. 242b) i neka tetiva \overline{AB} raspolavlja opseg, ali neka ne raspolavlja površinu. Tada onaj dio područja koji ima površinu veću od $F/2$ zrcalimo na pravcu AB . To područje zajedno sa zrcaljenim područjem ima opet opseg L , ali površinu veću od F . Dobili smo kontradikciju s pretpostavkom.

Tvrđnja 3. Ako konveksno područje Φ uz zadani opseg L ima najveću površinu F , onda je to područje omeđeno kružnicom.

Da dokažemo tu tvrdnju, uzmimo tetivu \overline{AB} koja raspolavlja opseg. Tada tetiva \overline{AB} raspolavlja i površinu područja Φ (prema Tvrđnji 2). Pretpostavimo da rubna krivulja nije kružnica. Tada na toj krivulji postoji točka P takva da je $\alpha = \sphericalangle APB \neq 90^\circ$. Luk APB se sastoji od dva dijela AxP i PyB (sl. 243a).

Sada konstruirajmo područje Φ' ovako.

1) Prvo konstruirajmo pravokutni $\triangle A'P'B'$ u kojem je $\sphericalangle A'P'B' = 90^\circ$, $|P'A'| = |PA|$, $|P'B'| = |PB|$.



Sl. 243.

2) Na katete $\overline{P'A'}$ i $\overline{P'B'}$ prema van trokuta $\triangle A'P'B'$ pristonimo lukove $A'x'P'$ i $P'y'B'P'$ (sl. 243b) koji su redom jednaki lukovima $AxPA$ i $PyBP$.

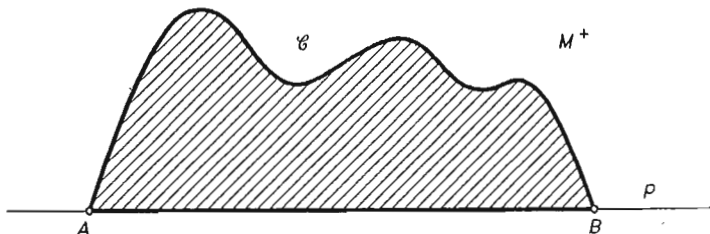
3) Zrcalimo preko pravca $A'B'$ trokut $\triangle A'P'B'$ zajedno s pristonjenim lukovima. Svi ti lukovi omeđuju područje Φ' . Usporedimo površine od Φ i Φ' . U tu svrhu dovoljno je usporediti površine trokuta $\triangle ABP$ i $\triangle A'B'P'$. Imamo

$$p(\triangle A'B'P') = \frac{1}{2}|A'P'| \cdot |P'B'| > \frac{1}{2}|AP| \cdot |PB| \sin(\sphericalangle APB) = p(\triangle ABP).$$

Sada je jasno da je i površina $p(\Phi') > p(\Phi) = F$. Dakle, ako Φ nije krug, onda postoji područje Φ' s istim opsegom, ali s većom površinom. Time je teorem dokazan. ■

Neposredna posljedica je ovaj korolar.

KOROLAR 1. Neka su A i B dvije točke na pravcu p , M^+ poluravnina određena tim pravcem, a C krivulja u poluravnini M^+ zadane duljine L s krajevima u točkama A i B . Tada je površina između C i p najveća moguća kada je C polukružnica s promjerom \overline{AB} (sl. 244). ■



Sl. 244.

Ovaj korolar je rješenje problema poznatog pod nazivom **Didonin problem**. Didona je bila kćer kralja od Tira i udovica Akerbasa kojeg je ubio Didonin brać

kako bi se dokopao naslijeđa. Didona potom s Akerbasovim blagom bježi na Cipar, a odavde u Afriku na obalu današnjeg Tunisa. Od lokalnog kralja je zatražila da na obali kupi komad zemlje koju će obuhvatiti koža jednog bika. Kralj se polakomio i dao joj kožu najvećeg bika. Didona je, međutim kožu razrezala na uske trake i svezavši ih, dobila dugački remen te njime htjela obuhvatiti što veću površinu. Tako je nastao taj problem, a tako je, prema legendi iz 9. st. pr. Kr. nastala i Kartaga!

Prostorni analogon izoperimetrijskog problema glasi ovako. Koje područje u prostoru uz dano oplošje ima najveći volumen? Odgovor na ovo pitanje jest: kugla. Preciznije, vrijedi ovaj teorem.

TEOREM 2. *Neka je O oplošje, a V volumen nekog područja u prostoru. Tada vrijedi nejednakost*

$$O^3 - 36\pi V^2 \geq 0, \quad \text{tj.} \quad V \leq \sqrt{\frac{O^3}{36\pi}},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je to područje kugla. ■

U dimenzijama $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$ (a i $n \geq 3$) izoperimetrijske nejednakosti mogu se ovako formulirati: Neka je $\omega_n = v(B_1^n)$ volumen jedinične kugle B_1^n u dimenziji n . Dakle, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$. Stoga je volumen V i oplošje O kugle B_r^n dimenzije n , a radijusa r jednak

$$V = \omega_n r^n, \quad O = n\omega_n r^{n-1}, \quad (*)$$

pa je stoga

$$O^n = n^n \omega_n V^{n-1}.$$

(Za $n = 2$, "volumen" je površina, a "oplošje" opseg, dok je za $n = 3$, V stvarno volumen, a O stvarno oplošje). Tada vrijedi

TEOREM 3 (izoperimetrijska nejednakost). *Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ bilo koje područje u \mathbb{R}^n čiji je volumen $v(D) = V$, a oplošje $o(D) = O$. Tada vrijedi*

$$O^n \geq n^n \omega_n V^{n-1},$$

s jednakošću ako i samo ako je $D = B_r^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq r\}$ kugla s centrom u nekoj točki a i radijusom r .

Skica dokaza. Koristit ćemo jednu opću nejednakost za volumene koja se zove Brunn²⁷-Minkowskijeva nejednakost:

$$[V(A+B)]^{1/n} \geq [V(A)]^{1/n} + [V(B)]^{1/n},$$

za bilo koja dva (izmjeriva) skupa A, B u \mathbb{R}^n , pri čemu je suma skupova definirana (shvaćena vektorski) kao

$$A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}.$$

²⁷Vigo Brunn (1885 - 1980), norveški matematičar.

Tako je, npr., poopćena kugla $K(r, M)$ oko skupa M jednaka

$$M_r = M + B_r^n.$$

Neka je, dakle, D područje u \mathbf{R}^n čiji je rub E i neka je $D_r = D + B_r^n$. Stavimo $v(D) = V(=V(D))$, tada, prema nejednakosti Brunn-Minkowskog i (*), imamo

$$\begin{aligned} V(D_r) &\geq \left([V(D)]^{1/n} + [V(B_r^n)]^{1/n} \right)^n = \left(V^{1/n} + [\omega_n r^n]^{1/n} \right)^n \geq \\ &\geq V + nV^{(n-1)/n} \omega_n^{1/n} r, \end{aligned}$$

pa odavde

$$\frac{V(D_r) - V(D)}{r} \geq n\omega_n^{1/n} V^{(n-1)/n}.$$

Brojnik lijeve strane odgovara "polovici" skupa E_r , tj. to je dio od E_r koji leži izvan područja D . Slična nejednakost se dobiva za dio od E_r koji leži unutar D . Uzmemo li te dvije nejednakosti zajedno i pustimo $r \rightarrow 0$, dobivamo

$$0 \geq n\omega_n^{1/n} V^{(n-1)/n}$$

što je izoperimetrijska nejednakost.

Samu Brunn-Minkowskijevu nejednakost nećemo detaljno dokazivati, ali je ideja dokaza u tome da se područja A i B aproksimiraju s pravokutnim paralelepipedima. Ako imamo dva paralelepipeda s okomitim bridovima duljina a_1, \dots, a_n i b_1, \dots, b_n , onda se Brunn-Minkowskijeva nejednakost svodi na

$$\prod_{i=1}^n (a_i + b_i)^{1/n} \geq \prod_{i=1}^n a_i^{1/n} + \prod_{i=1}^n b_i^{1/n},$$

a to je zbog aritmetičko-geometrijske nejednakosti ekvivalentno s

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_i + b_i} \right)^{1/n} + \prod_{i=1}^n \left(\frac{b_i}{a_i + b_i} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + b_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i + b_i} = 1. \quad \blacksquare$$

Evo još nekoliko izoperimetrijskih teorema.

TEOREM 4. *Ako je L opseg, a P površina n -terokuta u ravnini onda vrijedi*

$$\frac{L^2}{P} \geq \frac{4}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} > 4\pi.$$

Prostorni analogon toga teorema je sljedeći teorem.

TEOREM 5. *Neka je O oplošje, a V volumen konveksnog poliedra koji ima n strana. Tada vrijedi*

$$\frac{O^3}{V^2} \geq 54(n-2)(4\sin^2 \alpha_n - 1) \operatorname{tg} \alpha_n, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{6n-2},$$

pri čemu se jednakost dostiže samo za pravilni tetraedar, kocku i dodekaedar.

Dokazi ovih teorema su teški i neelementarni, ali same izreke su razumljive. No napomenimo da su izoperimetrijski problemi vrlo stari i potječu zapravo još od starogrčke matematike, a i danas su vrlo aktualni i imaju velike primjene u geometriji, matematičkoj analizi i matematičkoj fizici.

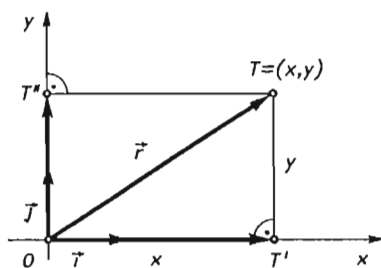


VI. ANALITIČKA GEOMETRIJA

§ 1. Koordinate vektora u ravnini

1.1. Koordinate vektora: Zbrajanje i množenje vektora sa skalarom. Modul vektora. Udaljenost dviju točaka

Neka je u ravnini dan pravokutni Kartezijev koordinatni sustav xOy . Jedinične vektore u smjeru koordinatnih osi označavamo sa \vec{i} i \vec{j} . Očito je svaki koordinatni sustav zadan ishodištem i vektorima \vec{i} , \vec{j} , pa ćemo stoga umjesto oznake xOy koristiti oznaku $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Ako je u tom sustavu dana neka točka $T = (x, y)$, onda vektor \vec{OT} zovemo **radijusvektorom** ili **radijvektorom** ili **vektorom položaja** točke T s obzirom na zadani koordinatni sustav. Radijvektor točke uobičajeno je



Sl. 245.

označavati sa \vec{r} ili \vec{r}_T . Izrazimo vektor \vec{r} kao linearnu kombinaciju vektora \vec{i} i \vec{j} . Sa sl. 245. vidimo da je $\vec{r} = \vec{OT} = \vec{OT'} + \vec{OT''}$, gdje su T' i T'' ortogonalne projekcije točke T redom na osi x i y . Kako je $\vec{OT'} = x\vec{i}$, $\vec{OT''} = y\vec{j}$, i to vrijedi za svaki položaj točke T , to iz prethodnih jednakosti slijedi

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}. \quad (1)$$

Formulom (1) određen je radijvektor točke T koja ima koordinate x i y .

Neka su sada $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ dvije točke u ravnini i $\overrightarrow{A_1A_2}$ orijentirana dužina. Izrazimo vektor $\overrightarrow{[A_1A_2]}$ kojemu je ta orijentirana dužina reprezentant. Zbog jednostavnosti, pisat ćemo $\overrightarrow{A_1A_2}$ umjesto $\overrightarrow{[A_1A_2]}$.

Prema (1) za radijvektore točaka A_1 i A_2 vrijedi $\vec{r}_{A_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{r}_{A_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, pa, prema pravilu trokuta (sl. 246), dobivamo

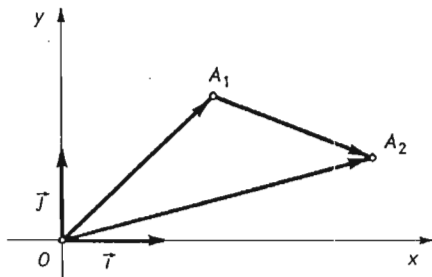
$$\vec{A_1A_2} = \vec{r}_{A_2} - \vec{r}_{A_1} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}),$$

pa je konačno

$$\vec{A_1A_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}. \quad (2)$$

Realne brojeve $x_2 - x_1$ i $y_2 - y_1$ zovemo **koordinatama vektora** $\vec{A_1A_2}$.

Očito je vektor nulvektor ako i samo ako su mu obje koordinate jednake nuli.



Sl. 246.

Primjer 1. Zadane su točke $A = (-3, -1)$, $B = (5, 2)$, $C = (8, 6)$, $D = (0, 3)$. Dokažite da je četverokut $ABCD$ paralelogram.

Rješenje. Treba vidjeti da je $\vec{AB} = \vec{DC}$. Prema (2) imamo da je $\vec{AB} = (5 + 3)\vec{i} + (2 + 1)\vec{j}$, $\vec{DC} = (8 - 0)\vec{i} + (6 - 3)\vec{j}$, dakle $\vec{AB} = \vec{DC} = 8\vec{i} + 3\vec{j}$. ■

Ako su \vec{a} i \vec{b} vektori i $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$, onda se odmah vidi da vrijedi

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j},$$

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha a_x\vec{i} + \alpha a_y\vec{j}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Dakle, vektori se zbrajaju tako da im se zbroje istoimene koordinate. Isto vrijedi za oduzimanje. Vektor se množi sa skalarom tako da mu se koordinate pomnože tim skalarom. Za vektor \vec{a} vektor $a_x\vec{i}$ zovemo njegovom **prvom komponentom**, a $a_y\vec{j}$ **drugom**, pa možemo reći da se vektori zbrajaju tako da im se zbroje istoimene komponente itd.

Pogledajmo sada kako se prepoznaju linearno nezavisni vektori pomoću njihovih koordinata. Neka su \vec{a} i \vec{b} zadani vektori. Oni su linearno nezavisni ako $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ povlači $\alpha = \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Prethodnu jednakost napišimo koordinatno i dobivamo

$$\alpha(a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) + \beta(b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) = \vec{0},$$

odnosno

$$(\alpha a_x + \beta b_x)\vec{i} + (\alpha a_y + \beta b_y)\vec{j} = \vec{0}.$$

Vektori \vec{i} i \vec{j} su očito linearno nezavisni, pa slijedi

$$\alpha a_x + \beta b_x = 0,$$

$$\alpha a_y + \beta b_y = 0,$$

a ovaj sustav ima samo trivijalno rješenje (α, β) ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

tj. ako je (uz $b_x, b_y \neq 0$)

$$\frac{a_x}{b_x} \neq \frac{a_y}{b_y},$$

tj. ako su omjeri odgovarajućih koordinata različiti. Slijedi da su vektori linearno nezavisni ako i samo ako su im omjeri odgovarajućih koordinata jednaki.

Napomena 1. Odavde slijedi da su dva vektora jednaka ako i samo ako su im odgovarajuće koordinate jednake.**Primjer 2.** Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{c} = 9\vec{i} - 19\vec{j}$. Izrazite vektor \vec{c} kao linearnu kombinaciju vektora \vec{a} i \vec{b} .**Rješenje.** Prvo treba konstatirati da je to moguće, tj. da su \vec{a} i \vec{b} linearno nezavisni vektori, a to jesu jer je $\frac{3}{-1} \neq \frac{-2}{5}$. Dakle, postoji rastav $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Napišimo prethodnu jednakost koordinatno, dobivamo $\vec{c} = \alpha(3\vec{i} - 2\vec{j}) + \beta(-\vec{i} + 5\vec{j})$, odnosno $9\vec{i} - 19\vec{j} = (3\alpha - \beta)\vec{i} + (-2\alpha + 5\beta)\vec{j}$. Prema prethodnoj napomeni slijedi da α i β moraju zadovoljavati sustav jednažbi

$$3\alpha - \beta = 9,$$

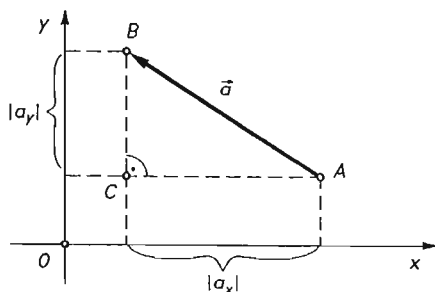
$$-2\alpha + 5\beta = -19.$$

Rješenje ovog sustava je $\alpha = 2$, $\beta = -3$. Dakle je $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. ■Neka je sada zadan vektor $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$. Odredimo njegov modul. Neka je dalje $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Tada su duljine projekcija dužine \overrightarrow{AB} (sl. 247) na osi x i y redom jednake $|a_x|$ i $|a_y|$, pa iz pravokutnog trokuta ABC slijedi $|\vec{a}| = \sqrt{|a_x|^2 + |a_y|^2}$, tj.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (3)$$

Dakle, modul vektora jednak je drugom korijenu zbroja kvadrata njegovih koordinata.

Primjer 3. Odredite jedinični vektor \vec{a}_0 u smjeru vektora $\vec{a} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$.**Rješenje.** Nađimo najprije $|\vec{a}|$. Prema (3) je $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Dakle je $\vec{a}_0 = \frac{1}{13}\vec{a} = \frac{5}{13}\vec{i} - \frac{12}{13}\vec{j}$. ■



Sl. 247.

Primjer 4. Zadano je $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Odredite $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Rješenje. Neka je $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$. Prema (3) je $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 = (a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) + 2(a_x b_x + a_y b_y)$, odnosno $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(a_x b_x + a_y b_y)$. Uvrštavanjem zadanih vrijednosti dobijemo $2(a_x b_x + a_y b_y) = 46$. Na isti je način $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(a_x b_x + a_y b_y)$, pa slijedi $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 169 + 361 - 46$. Dakle $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 484$, tj. $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$. Uočite da i općenito vrijedi $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$, ta se jednakost zove **relacija paralelograma** i izražava činjenicu da je zbroj kvadrata dijagonala u paralelogramu jednak zbroju kvadrata njegovih stranica (v. Primjer 12). ■

Iz (3) se odmah dobiva i formula za udaljenost dviju točaka $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ ravnine. Naime, očito je $|AB| = |\vec{AB}|$. Kako je prema (2) $\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$, to je

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (4)$$

Primjer 5. Zadane su točke $A = (2, 2)$, $B = (8, 4)$. Odredite na osi y točku C tako da je trokut $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom pri vrhu C .

Rješenje. Neka je $C = (x, 0)$. Prema (4) je $|AC|^2 = (x - 2)^2 + 4$, $|BC|^2 = (x - 8)^2 + 16$, $|AB|^2 = 40$. Trokut je pravokutan ako je $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$, tj. ako vrijedi $(x - 2)^2 + (x - 8)^2 + 20 = 40$, odnosno $x^2 - 10x + 24 = 0$. Odavde je $x_1 = 6$, $x_2 = 4$. Dakle, postoje dvije takve točke, i to $C_1 = (6, 0)$ i $C_2 = (4, 0)$. ■

1.2. Dijeljenje dužine u zadanom omjeru. Polovište dužine. Težište trokuta

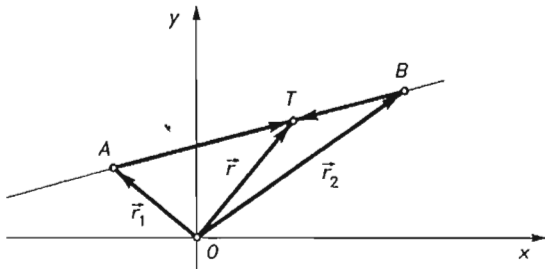
Neka su A, B bilo koje dvije točke ravnine i T bilo koja točka na pravcu AB . Za točku T kažemo da dijeli orijentiranu dužinu \vec{AB} u omjeru $\lambda \in \mathbf{R}$ ako vrijedi

$$\vec{AT} = \lambda \cdot \vec{BT}. \quad (5)$$

Realan broj λ zovemo **djelišnim omjerom** u kojemu točka T dijeli orijentiranu dužinu \vec{AB} . Uočite da ako T dijeli orijentiranu dužinu \vec{AB} u omjeru λ , onda T dijeli orijentiranu dužinu \vec{BA} u omjeru $1/\lambda$. Posebno ako je T na dužini \vec{AB} onda iz (5) slijedi da je $\lambda < 0$. U tom se slučaju još kaže da točka T dijeli dužinu \vec{AB}

iznutra. Ako T ne leži na \overline{AB} već na pravcu AB , onda kažemo da T dijeli tu dužinu **izvana**. Iz (1) slijedi da je tada $\lambda > 0$. Ako je $T \equiv A$, onda je $\lambda = 0$. Za $T \equiv B$, λ nije definiran.

Pokažimo sada kako se za zadane točke $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ nalazi točka $T = (x, y)$ koja \overline{AB} dijeli u zadanom omjeru λ . U tom smislu označimo sa \vec{r}_1 i \vec{r}_2 redom radijvektore točaka A i B , a sa \vec{r} radijvektor točke T (sl. 248). Na slici



Sl. 248.

vidimo da je $\overrightarrow{AT} = \vec{r} - \vec{r}_1$ i $\overrightarrow{BT} = \vec{r} - \vec{r}_2$. Ako to uvrstimo u (5), dobivamo

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r} - \vec{r}_2),$$

odavde je

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 - \lambda \vec{r}_2}{1 - \lambda}. \quad (6)$$

Jednakošću (6) određen je radijvektor točke T koja u zadanom omjeru λ dijeli dužinu. Koordinatno se to zapisuje ovako

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}. \quad (6')$$

Iz (6) slijedi da je radijvektor polovišta dužine \overline{AB} jednak ($\lambda = -1$)

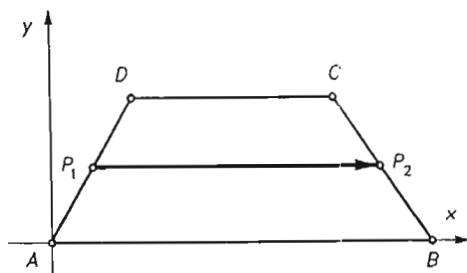
$$\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \quad (7)$$

ili u koordinatama

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2). \quad (7')$$

Primjer 6. Dokažite analitički poučak o srednjici trapeza.

Rješenje. Neka je $ABCD$ trapez i koordinatni sustav odabran kao na sl. 249. Tada za koordinate vrhova imamo da je $A = (0, 0)$, $B = (x_1, 0)$, $C = (x_2, y_2)$, $D = (x_3, y_2)$. Neka su P_1 i P_2 polovišta krakova \overline{AD} i \overline{BC} i \vec{r}_1 , \vec{r}_2 redom radijvektori od P_1 i P_2 . Prema (7) tada je $\vec{r}_1 = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}(x_3\vec{i} + y_2\vec{j})$ i $\vec{r}_2 = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{1}{2}(x_1\vec{i} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = \frac{1}{2}((x_1 + x_2)\vec{i} + y_2\vec{j})$. Dalje je $\overline{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3)\vec{i}$, pa slijedi da je



Sl. 249.

srednjica trapeza paralelna s njegovim osnovicama. Dalje je $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)$. Kako je x_1 upravo duljina donje osnovice, a $x_2 - x_3$ gornje, to je duljina srednjice trapeza jednaka poluzbroju duljina njegovih osnovica. ■

Primjer 7. Dokažite ako su $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ redom radijvektori vrhova trokuta $\triangle ABC$ onda je radijvektor njegova težišta T dan sa

$$\vec{r} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3). \quad (8)$$

Rješenje. Znamo da težište dijeli svaku od težišnica trokuta u omjeru 2 : 1 računajući od vrha. Neka je P_1 polovište stranice \overline{BC} . Tada je $\vec{r}_{P_1} = \frac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3)$. Prema definiciji djelišnog omjera težište dijeli orijentiranu težišnicu $\overrightarrow{AP_1}$ u omjeru $\lambda = -2$, pa iz (6) slijedi da je $\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + 2\vec{r}_{P_1}}{1+2} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$ i tvrdnja je dokazana. Iz (8) slijedi da su koordinate težišta trokuta $\triangle ABC$, $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ dane sa

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3). \quad (8')$$

Primjer 8. Neka su P_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ redom polovišta uzastopnih stranica $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_6A_1}$ šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Dokažite da trokuti $\triangle P_1P_3P_5$ i $\triangle P_2P_4P_6$ imaju isto težište.

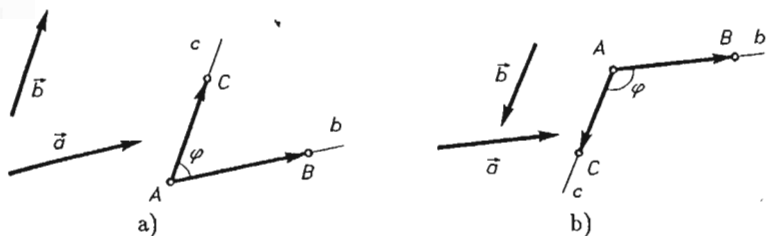
Rješenje. Neka su redom \vec{r}_i radijvektori vrhova A_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Tada je $\vec{r}_{P_i} = \frac{1}{2}(\vec{r}_i + \vec{r}_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, 6$, gdje smo uzeli da je $\vec{r}_7 = \vec{r}_1$. Težište trokuta $\triangle P_1P_3P_5$ tada ima radijvektor

$$\vec{r} = \frac{1}{3}(\vec{r}_{P_1} + \vec{r}_{P_3} + \vec{r}_{P_5}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + \frac{1}{2}(\vec{r}_3 + \vec{r}_4) + \frac{1}{2}(\vec{r}_5 + \vec{r}_6)\right) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \vec{r}_i.$$

Analogno se za radijvektor težišta trokuta $\triangle P_2P_4P_6$ dobije $\vec{r} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \vec{r}_{i+1}$, što zbog $\vec{r}_7 = \vec{r}_1$ daje $\vec{r} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \vec{r}_i$, pa se, dakle, težišta tih trokuta podudaraju. ■

1.3. Kut dvaju vektora. Projekcija vektora na drugi vektor. Skalarni produkt u koordinatama

Neka su \vec{a} i \vec{b} dva vektora, \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{AC} reprezentanti tih vektora koji imaju istu početnu točku A (sl. 250.a i 250.b). Odabranim reprezentantima potpuno su određeni polupravci b i c kojima je početak u A i na kojima redom leže točke B i C . Neorijentirani kut φ koji zatvaraju ti polupravci zovemo kutom vektora \vec{a} i \vec{b} . Sa sl. 250.a i 250.b razabiremo da je $\varphi \in [0, \pi]$. Pri tome, ako su vektori \vec{a} i \vec{b} istog smjera, onda je $\varphi = 0$, ako su suprotnog smjera, onda je $\varphi = \pi$.



Sl. 250.

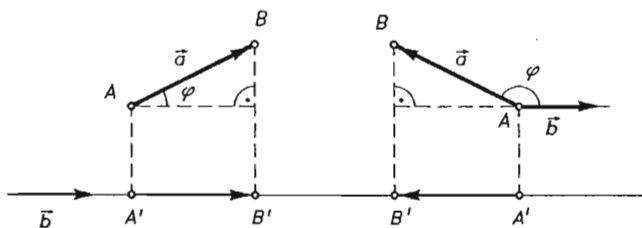
Neka je sada p neki pravac i $A, B \in p$ i $\overrightarrow{AB} = \vec{e}$. Uređen par (p, \vec{e}) zovemo **orijentiranim pravcem**, a vektor \vec{e} zovemo **vektorom smjera tog orijentiranog pravca** ili njegovom **orijentacijom**. Za pravce (p, \vec{e}_1) i (p, \vec{e}_2) kažemo da su **jednako orijentirani (iste orijentacije)** ako postoji $\lambda \in \mathbf{R}$, takav da je $\vec{e}_2 = \lambda \vec{e}_1$ i $\lambda > 0$, a **suprotno orijentirani (suprotne orijentacije)** ako je $\lambda < 0$. Intuitivno to znači da je na pravcu p istaknut jedan poredak točaka od dva moguća. Naime, ako je (p, \overrightarrow{AB}) orijentirani pravac, onda kažemo da je $C \prec D$ (C je ispred D) ako i samo ako $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB}$ povlači $\lambda > 0$.

Ako nam je u ravnini zadan neki vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, onda orijentirani pravac (AB, \vec{a}) zovemo **os određena vektorom \vec{a}** . Neka su \vec{a} i \vec{b} bilo koja dva vektora ravnine i $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Označimo sa A', B' ortogonalne projekcije od A i B na os određenu vektorom \vec{b} . Vektor $\overrightarrow{A'B'}$ zovemo **projekcijom vektora \vec{a} na os određenu vektorom \vec{b}** . Projekciju vektora \vec{a} na os određenu vektorom \vec{b} označavat ćemo sa $pr_{\vec{b}} \vec{a}$ (usp. pogl. IV, §7) i kratko zvati **projekcija vektora \vec{a} na vektor \vec{b}** .

Na sl. 251 odmah razabiremo da je

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = (|\vec{a}| \cos \varphi) \cdot \vec{b}_0, \quad (9)$$

gdje je sa φ označen kut između vektora \vec{a} i \vec{b} , a sa \vec{b}_0 jedinični vektor u smjeru vektora \vec{b} . Naime, u slučaju ako su \vec{b} i $\overrightarrow{A'B'}$ iste orijentacije, (9) očito vrijedi. Ako



Sl. 251.

su oni suprotne orijentacije onda je

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = -|A'B'| \vec{b}_0 = -|\vec{a}| \cos(\pi - \varphi) \vec{b}_0 = (|\vec{a}| \cos \varphi) \vec{b}_0,$$

pa i u ovom slučaju (9) vrijedi.

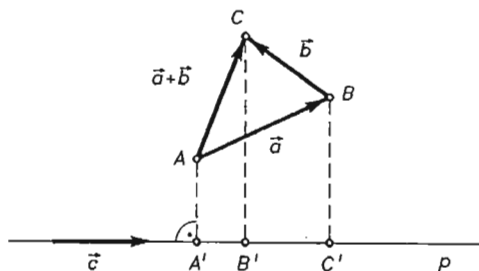
Napomena 2. Iz (5) slijedi $pr_{\vec{b}}(-\vec{a}) = -pr_{\vec{b}} \vec{a}$. Realan broj $|\vec{a}| \cos \varphi$ zove se **koordinata** od $pr_{\vec{b}} \vec{a}$ i označava sa $k(pr_{\vec{b}} \vec{a})$.

Vrijedi

PROPOZICIJA 1. Ako su \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} bilo koja tri vektora ravnine, onda vrijedi

$$pr_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\vec{c}} \vec{a} + pr_{\vec{c}} \vec{b}. \quad (10)$$

Dokaz. Odaberimo reprezentante vektora \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} kao na sl. 252.



Sl. 252.

Označimo sa A' , B' , C' ortogonalne projekcije točaka A , B , C na os (p, \vec{c}) . Za svake tri točke vrijedi prema pravilu trokuta

$$\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'A'} = \vec{0},$$

a odavde je

$$pr_{\vec{c}} \vec{a} + pr_{\vec{c}} \vec{b} + pr_{\vec{c}}(-(\vec{a} + \vec{b})) = \vec{0}.$$

Iz prethodne napomene odmah slijedi tvrdnja, tj. (10). ■

KOROLAR 1. *Kako su projekcije na istu os kolinearni vektori, to vrijedi*

$$k(pr_{\varepsilon}(\vec{a} + \vec{b})) = k(pr_{\varepsilon}\vec{a}) + k(pr_{\varepsilon}\vec{b}). \quad \blacksquare$$

Promotrimo projekcije nekog vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ na osi x i y koordinatnog sustava orijentirane vektorima \vec{i} i \vec{j} . Očito je $pr_{\vec{i}}\vec{a} = a_x\vec{i}$, $pr_{\vec{j}}\vec{a} = a_y\vec{j}$, pa su projekcije vektora na orijentirane koordinatne osi jednake upravo komponentama tog vektora. Označimo sa α i β kutove koje vektor \vec{a} zatvara redom s orijentiranim koordinatnim osima, tj. s vektorima \vec{i} i \vec{j} . Tada vrijedi

$$pr_{\vec{i}}\vec{a} = (|\vec{a}| \cos \alpha)\vec{i}, \quad pr_{\vec{j}}\vec{a} = (|\vec{a}| \cos \beta)\vec{j}.$$

Usporedba s prethodnim jednakostima pokazuje da je

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cos \beta,$$

odnosno

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}. \quad (11)$$

Realni brojevi $\cos \alpha$ i $\cos \beta$ zovu se **kosinusi smjera vektora** \vec{a} . Kvadriranjem i zbrajanjem tih jednakosti (zbog $|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2$) slijedi

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1.$$

Posebno iz (11) razabiremo ako je \vec{a} jedinični vektor, onda se njegove koordinate podudaraju s kosinusima smjera tog vektora, tj. $a_x = \cos \alpha$ i $a_y = \cos \beta$. Vrijedi i obrnuto, ako je zbroj kvadrata koordinata nekog vektora jednak 1, onda su koordinate tog vektora njegovi kosinusi smjera.

Podsjetimo sada kratko na skalarni produkt (pogl. IV, §7). Neka su \vec{a} i \vec{b} dva vektora i φ kut među njima. **Skalarni produkt** tih vektora je realni broj $\vec{a} \cdot \vec{b}$ definiran formulom

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi. \quad \text{je realni broj } \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (12)$$

Iz (12) neposredno slijedi da je skalarno množenje vektora komutativno, tj. za svaka dva vektora \vec{a} i \vec{b} vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Ako je $\vec{a} = \vec{b}$, onda $\vec{a} \cdot \vec{a}$ označavamo sa \vec{a}^2 i zovemo **skalarnim kvadratom** vektora \vec{a} . Iz (12) slijedi da je $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, pa za modul svakog vektora vrijedi

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \quad (13)$$

PROPOZICIJA 2. *Skalarno množenje je distributivno s obzirom na zbrajanje, tj. za tri vektora \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} uvijek vrijedi*

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Dokaz. Najprije uočimo da je $k(pr_{\vec{b}}\vec{a}) = |\vec{a}| \cos \varphi = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$, gdje je sa φ označen kut vektora \vec{a} i \vec{b} . Odavde je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot k(pr_{\vec{b}}\vec{a}). \quad (14)$$

Ako su sada \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} bilo koja tri vektora u ravnini, prema korolaru iza propozicije 1. vrijedi

$$k(\text{pr}_{\vec{z}}(\vec{a} + \vec{b})) = k(\text{pr}_{\vec{z}}\vec{a}) + k(\text{pr}_{\vec{z}}\vec{b}),$$

a odavde prema (14) slijedi

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}. \quad \blacksquare$$

PROPOZICIJA 3. *Skalarni produkt vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ jednake je*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji i komutativnosti skalarnog produkta imamo da je

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + (a_x b_y + a_y b_x) (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_y b_y (\vec{j} \cdot \vec{j}). \end{aligned}$$

Kako je $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, to dobivamo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y. \quad \blacksquare \tag{15}$$

Iz (4) slijedi da je kut φ dvaju vektora dan izrazom

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \tag{16}$$

Ako su vektori dani svojim koordinatama, onda je, prema (3) i (12)

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}. \tag{17}$$

Iz (16) slijedi da je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ uvjet ortogonalnosti vektora \vec{a} i \vec{b} , dakako uz tihu pretpostavku da nijedan od njih nije nulvektor.

Iz propozicije 3. slijedi da skalarno množenje ima svojstva

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}), \\ (\alpha + \beta)(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \beta(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

za sve vektore \vec{a} , \vec{b} i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ovim smo se uvjerali da je skup svih vektora unitaran vektorski prostor. Za nas će posebno zanimljivi biti oni reprezentanti vektora kojima je početak u ishodištu O koordinatnog sustava. Skup tih reprezentanata je također unitarni vektorski prostor i taj vektorski prostor zovemo **prostorom radijevktora** i označavamo sa $V^2(O)$.

Primjer 9. Dokažite da su dijagonale romba okomite.

Rješenje. Neka je $ABCD$ romb. Tada je $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ i $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$. Odatve zbog distributivnosti skalarnog množenja prema zbrajanju slijedi $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AD} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AB} - \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AD}^2 - \vec{AB}^2 = |AD|^2 - |AB|^2$. Kako je $ABCD$ romb, to je $|AD| = |AB|$, pa je $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$ i tvrdnja je dokazana. ■

Primjer 10. Duljina hipotenuze \vec{AB} pravokutnog trokuta ABC je c . Odredite zbroj $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

Rješenje. Kako se radi o pravokutnom trokutu s pravim kutom pri vrhu C , to je $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$. Uočimo da vrijedi

$$k \left(pr_{\vec{AB}} \vec{AC} \right) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}|}, \quad k \left(pr_{\vec{AB}} \vec{CB} \right) = \frac{\vec{CB} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|}.$$

Iz ovih jednakosti slijedi

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{CB} \cdot \vec{AB} = c(k(pr_{\vec{AB}} \vec{AC}) + k(pr_{\vec{AB}} \vec{CB})).$$

Kako je $k(pr_{\vec{AB}} \vec{AC}) + k(pr_{\vec{AB}} \vec{CB}) = c$, to je $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{CB} \cdot \vec{AB} = c^2$. Zbog $\vec{CB} \cdot \vec{AB} = \vec{BC} \cdot \vec{BA}$ slijedi $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{CB} = c^2$. ■

Primjer 11. Dokažite da za svaku četvorku točaka A, B, C i D ravnine vrijedi $\vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} + \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ i izvedite iz te jednakosti poučak o sjecištu visina trokuta.

Rješenje. Označimo redom sa $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ radijvektore točaka A, B, C, D s obzirom na bilo koju točku O ravnine. Tada je

$$\begin{aligned} \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} + \vec{AB} \cdot \vec{CD} &= \\ &= (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_4 - \vec{r}_1) + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \cdot (\vec{r}_4 - \vec{r}_2) + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_4 - \vec{r}_3). \end{aligned}$$

Izvršimo li naznačena skalarna množenja, svi će se članovi ukinuti i dobivamo da je taj zbroj skalarnih produkata jednak nuli.

Neka je S sjecište visina povučениh iz vrhova A i B trokuta $\triangle ABC$ na suprotne stranice. Tada je $\vec{BC} \cdot \vec{AS} = 0$ i $\vec{CA} \cdot \vec{BS} = 0$. Primijenimo na točke A, B, C, S dokazanu jednakost. Dobivamo

$$\vec{BC} \cdot \vec{AS} + \vec{CA} \cdot \vec{BS} + \vec{AB} \cdot \vec{CS} = 0,$$

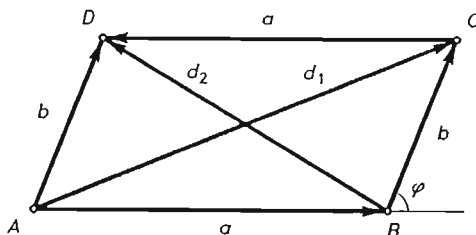
pa je $\vec{AB} \cdot \vec{CS} = 0$, tj. na pravcu CS leži treća visina trokuta, pa ona prolazi točkom S . ■

Primjer 12. Dokažite da je zbroj kvadrata dijagonala paralelograma jednak zbroju kvadrata njegovih stranica (relacija paralelograma).

Rješenje. Neka je $ABCD$ paralelogram. Tada vrijedi $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$, $\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD}$. Kvadrirajmo skalarno te jednakosti i dobivene jednakosti zbrojimo, pa dobivamo

$$\vec{AC}^2 + \vec{BD}^2 = \vec{AB}^2 + 2\vec{BC}^2 + \vec{CD}^2 + 2(\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CD}).$$

Označimo duljine stranica i dijagonalu paralelograma kao na sl. 253. Označimo sa φ kut vektora \vec{AB} i \vec{BC} . Tada vektori \vec{BC} i \vec{CD} zatvaraju kut $\pi - \varphi$, pa je stoga $\vec{AB} \cdot \vec{BC} =$



Sl. 253.

$= ab \cos \varphi$ i $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = ab \cos(\pi - \varphi) = -ab \cos \varphi$. Dakle je $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Uzmemo li u obzir da je $\overrightarrow{AC}^2 = d_1^2$, $\overrightarrow{BD}^2 = d_2^2$, $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{CD}^2 = a^2$, $\overrightarrow{BC}^2 = b^2$, to iz prije dokazane jednakosti slijedi $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. ■

Primjer 13. Zadan je trokut $\triangle ABC$ svojim vrhovima $A = (5, 1)$, $B = (-1, 3)$, $C = (-2, -2)$. Neka je D nožište visine spuštene iz vrha B na stranicu \overline{AC} . Izrazite vektor \overrightarrow{BD} kao linearnu kombinaciju vektora \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{AC} .

Rješenje. Očito je da je $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ i da je \overrightarrow{AD} projekcija vektora \overrightarrow{AB} na os određenu vektorom \overrightarrow{AC} . Dakle je $\overrightarrow{AD} = \text{pr}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \cdot (\overrightarrow{AC})_0 = \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2} \right) \overrightarrow{AC}$.

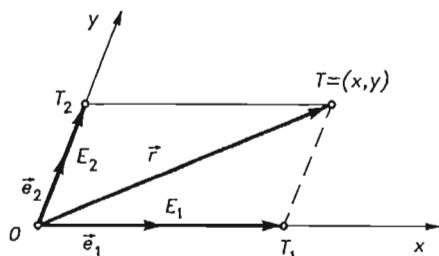
Kako je $\overrightarrow{AB} = -6\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = -7\vec{i} - 3\vec{j}$, to je $\overrightarrow{AD} = \frac{-6 \cdot (-7) + 2 \cdot (-3)}{7^2 + 3^2} \overrightarrow{AC} = \frac{18}{29} \overrightarrow{AC}$.

Konačno je, dakle, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{18}{29} \overrightarrow{AC}$. ■

§ 2. Orijentacija ravnine. Površina orijentiranog trokuta

2.1. Orijentacija ravnine

Neka je O čvrsta točka u ravnini i \vec{e}_1, \vec{e}_2 linearno nezavisni vektori jedinične duljine. Trojku $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ zovemo **afinim koordinatnim sustavom** u ravnini. Pomoću tog sustava svakoj točki ravnine možemo pridružiti određene koordinate. Naime, neka su \overrightarrow{OE}_1 i \overrightarrow{OE}_2 reprezentanti vektora \vec{e}_1 i \vec{e}_2 . Orijentirane pravce $(x, \overrightarrow{OE}_1), (y, \overrightarrow{OE}_2)$ (v. sl. 254) zovemo x -os i y -os tog sustava. Točkom T povučemo paralelu s osi y i neka je T_1 sjecište te paralele sa x -osi. Tada postoji jedinstven realan broj x takav da je $\overrightarrow{OT}_1 = x\vec{e}_1$. Paralela kroz T s osi x neka siječe y -os u točki T_2 . Tada također postoji jedinstven realan broj y takav da je $\overrightarrow{OT}_2 = y\vec{e}_2$. Radijvektor \vec{r} točke T jednak je tada $\vec{r} = \overrightarrow{OT} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ i uređen par (x, y) realnih



Sl. 254.

brojeva zovemo tada **afinim koordinatama** točke T i pišemo $T = (x, y)$. Katkada se afini koordinatni sustav zove još **kosokutni koordinatni sustav**. Uočimo da je pravokutni Kartezijev koordinatni sustav specijalni slučaj afinog sustava.

U skup \mathcal{S} svih afinih koordinatnih sustava u ravnini uvodimo relaciju \sim ovako: neka su

$$S = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2) \quad \text{i} \quad S' = (O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$$

dva afina koordinatna sustava. Kako su \vec{e}_1 i \vec{e}_2 linearno nezavisni vektori, to sigurno postoje, i jedinstveni su rastavi

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Pri tome je očito $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, jer bi u protivnome vektori \vec{e}'_1 i \vec{e}'_2 bili linearno zavisni, a oni to nisu jer je S' afini sustav. Provjerite to.

Za sustave S i S' kažemo da su u relaciji \sim i pišemo $S \sim S'$ ako i samo ako je $\Delta = \det(a_{ij}) > 0$. Vrijedi

PROPOZICIJA 1. \sim je relacija ekvivalencije u skupu \mathcal{S} svih afinih sustava u ravnini.

Dokaz. 1. *Refleksivnost* je očita i slijedi iz rastava $\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2$, pa je $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$.

2. *Simetričnost*. Treba pokazati da $S \sim S' \Rightarrow S' \sim S$. Za to treba iz sustava (1) izraziti vektore \vec{e}_1 i \vec{e}_2 pomoću \vec{e}'_1 i \vec{e}'_2 . Dobiva se

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\Delta}(a_{22}\vec{e}'_1 - a_{12}\vec{e}'_2), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\Delta}(-a_{12}\vec{e}'_1 + a_{11}\vec{e}'_2),$$

i pri tome je $\Delta > 0$, i to zbog $S \sim S'$. Neka je

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & -\frac{a_{12}}{\Delta} \\ -\frac{a_{12}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{vmatrix}.$$

Očito je $\Delta' = \frac{1}{\Delta}$, što zbog $\Delta > 0$ povlači $\Delta' > 0$, pa je $S' \sim S$.

3. *Tranzitivnost.* Neka su $S = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $S' = (O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ i $S'' = (O''; \vec{e}''_1, \vec{e}''_2)$ tri koordinatna sustava i neka je $S \sim S'$ i $S' \sim S''$, tj.

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2, \end{aligned} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}''_1 &= b_{11}\vec{e}'_1 + b_{12}\vec{e}'_2 \\ \vec{e}''_2 &= b_{21}\vec{e}'_1 + b_{22}\vec{e}'_2, \end{aligned} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (3)$$

Uvrstimo li (2) u (3), dobit ćemo

$$\begin{aligned} \vec{e}''_1 &= (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12})\vec{e}_1 + (a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12})\vec{e}_2, \\ \vec{e}''_2 &= (a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22})\vec{e}_1 + (a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22})\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Stavimo

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Lako se vidi da je

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \Delta \cdot \Delta' > 0,$$

pa je $S \sim S''$. ■

Svaka relacija ekvivalencije određuje particiju na skupu na kojem je definirana, pa se postavlja pitanje koliko elemenata ima skup S/\sim . O tome govori

PROPOZICIJA 2. *Skup S/\sim ima točno dva elementa.*

Dokaz. Najprije pokažimo da S/\sim ima bar dva elementa. Uzmimo sustave $S = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ i $S' = (O'; \vec{e}'_1, -\vec{e}'_2)$. Pripadni rastav glasi

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2, \\ -\vec{e}'_2 &= 0 \cdot \vec{e}_1 - 1 \cdot \vec{e}_2, \end{aligned}$$

pa je $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$, pa S i S' nisu ekvivalentni sustavi. Dakle, S/\sim ima bar dvije klase. Pokažimo da taj skup ima točno dvije klase. U tu svrhu uzmimo bilo koji treći sustav $S'' = (O''; \vec{e}''_1, \vec{e}''_2)$ i pretpostavimo da on ne pripada prvoj od tih klasa. Kako je

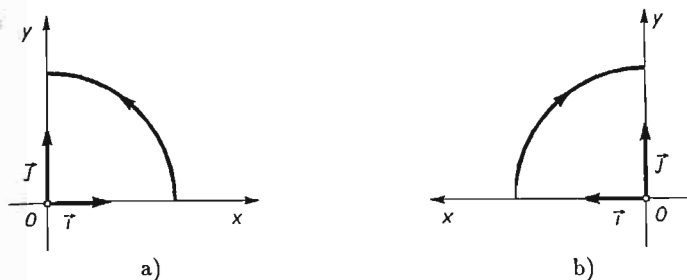
$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= b_{11}\vec{e}_1 + b_{12}\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 &= b_{21}\vec{e}_1 + b_{22}\vec{e}_2, \end{aligned}$$

znači da je $\Delta' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} < 0$. Izrazimo sada vektore \vec{e}'_1 i \vec{e}'_2 kao linearnu kombinaciju vektora \vec{e}_1 i $-\vec{e}_2$. Tada je

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= b_{11}\vec{e}_1 - b_{12}(-\vec{e}_2), \\ \vec{e}'_2 &= b_{21}\vec{e}_1 - b_{22}(-\vec{e}_2). \end{aligned}$$

Sada je $\Delta'' = \begin{vmatrix} b_{11} & -b_{12} \\ b_{21} & -b_{22} \end{vmatrix} = -\Delta' > 0$, pa slijedi da S'' pripada drugoj klasi. Na isti se način zaključuje ako S'' ne pripada drugoj klasi, onda očito mora pripadati prvoj i tvrdnja je dokazana. ■

Prirodnu projekciju $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/\sim$ zovemo **orijentacijom ravnine**. Ako dva sustava S i S' pripadaju istoj klasi, tj. ako je $\pi(S) = \pi(S')$, kažemo da su oni **jednako orijentirani**, a ako pripadaju različitim klasama, kažemo da su **suprotne orijentacije**. **Orijentiranom ravninom** zovemo uređen par koji se sastoji od te ravnine i jedne od tih dviju klasa. Klasu koju smo odabrali zovemo **desnom klasom**, a njezine reprezentante **desnim koordinatnim sustavom**. Preostalu klasu zovemo **lijevom**, a njezine reprezentante **lijevim sustavima**.



Sl. 255.

Prema dogovoru, ravninu ćemo orijentirati tako da u njoj za desni sustav odaberemo onaj pravokutni Kartezijev koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j})$ koji ima svojstvo da se rotacijom pozitivne osi x za $\frac{\pi}{2}$ u suprotnom smislu okretanja kazaljke na satu ta os poklopi s pozitivnom osi y . Na sl. 255.a nacrtan je desni sustav a na sl. 255.b lijevi.

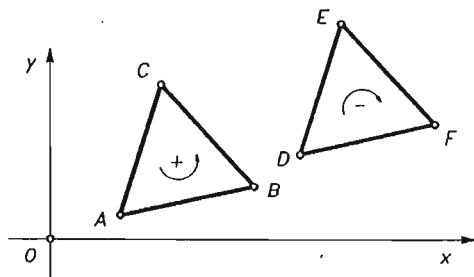
2.2. Površina orijentiranog trokuta

Sada se u orijentiranoj ravnini može definirati i pojam orijentacije trokuta.

Orijentiranim trokutom zovemo uređen par koji se sastoji od trokuta i jednog uređaja njegovih vrhova. Ako je $\triangle ABC$ trokut, onda ćemo orijentirani trokut označavati sa (ABC) i pri tome smatrati da je A prvi vrh, B drugi i C treći.

Za trokut (ABC) kažemo da je **pozitivno orijentiran** ako je sustav $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ desni sustav. Ako je taj sustav lijevi, onda kažemo da je trokut **negativno orijentiran**.

Uočite ako je trokut (ABC) pozitivno orijentiran, onda je trokut (ACB) negativno orijentiran, i to zato što sustavi $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(A; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ pripadaju različitim klasama. Intuitivno to znači da se obilazak vrhova u sljedu A, B i C vrši u smislu suprotnom kazaljke na satu, a kod trokuta (ACB) u smislu kretanja kazaljke



Sl. 256.

na satu. Na sl. 256. nacrtana su dva trokuta, trokut (ABC) pozitivno je orijentiran, a (DEF) negativno.

PROPOZICIJA 3. Površina orijentiranog trokuta (ABC) , $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ dana je formulom

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

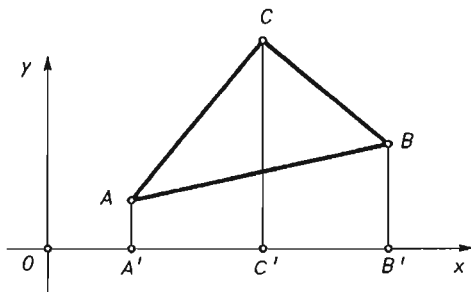
Pri tome, ako je trokut pozitivno orijentiran, onda je $P > 0$, a ako je negativno orijentiran, onda je $P < 0$.

Dokaz. Neka je dan trokut (ABC) i neka su A' , B' , C' ortogonalne projekcije vrhova na os x . Tada je površina trokuta ABC jednaka zbroju površina trapeza $A'C'CA$ i $C'B'BC$ umanjena za površinu trapeza $A'B'BA$. Dakle je (sl. 257)

$$P(ABC) = \frac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1).$$

Lako se vidi da se ova jednakost može napisati u obliku

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$



Sl. 257.

Lako se vidi da se isti rezultat dobije ako se uzme bilo koji negativno orijentirani trokut i za bilo koji drugi raspored točaka A' , B' , C' na osi x . Preostaje da se dokaže da (4) u slučaju pozitivno orijentiranoga trokuta daje $P > 0$, a negativno orijentiranog $P < 0$. Usporedimo orijentaciju sustava $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ s orijentacijom sustava $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Imamo

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}, \quad \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j}.$$

Odavde je

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Ako u (4) pomnožimo prvi redak sa -1 i dodamo drugome i trećem retku, dobit ćemo

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Dakle je $P = \frac{1}{2}\Delta$, pa odavde slijedi $\text{sign } P = \text{sign } \Delta$ i tvrdnja je dokazana. ■

Napomena 1. Iz (4) slijedi uvjet kolinearnosti triju točaka. Točke $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ leže na jednom pravcu ako i samo ako vrijedi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Primjer 1. Zadane su točke $A = (2, 3)$, $B = (5, 6)$. Odredite na osi x točku C takvu da je apsolutna vrijednost površine trokuta $\triangle ABC$ jednaka $\frac{21}{2}$ kvadratnih jedinica.

Rješenje. Neka je $C = (x, 0)$. Prema uvjetu zadatka mora biti

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{21}{2}.$$

Odavde je $x = -8$, pa je $C_1 = (-8, 0)$. Na isti način

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{21}{2}$$

daje $x = 6$, pa je $C_2 = (6, 0)$. Zadatak ima dva rješenja. Trokut (ABC_1) pozitivno je orijentiran i njegova je površina $P = \frac{21}{2}$, a (ABC_2) negativno i njegova je površina $P = -\frac{21}{2}$. ■

Primjer 2. Neka je $(A_1A_2A_3)$ orijentirani trokut ravnine. Uvedimo oznaku $P(A_1A_2A_3) = P_{123}$. Ako je O ishodište, označimo $P(OA_iA_j) = P_{0ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Dokažite da vrijedi

$$P_{123} = P_{012} + P_{023} + P_{031}.$$

Rješenje. Stavimo $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$. Prema (4) imamo

$$\begin{aligned} P_{123} &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= P_{012} + P_{023} + P_{031}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

§ 3. Jednadžba pravca u ravnini

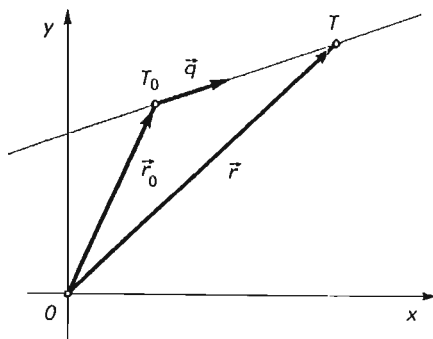
3.1. Jednadžba pravca određenog točkom i vektorom smjera

Neka je p bilo koji pravac ravnine i $A, B \in p$ bilo koje njegove dvije različite točke. Tada vektor $[\overline{AB}]$ zovemo vektorom smjera pravca p .

Očito je svaki pravac ravnine zadan jednom svojom točkom T_0 i vektorom smjera \vec{q} . Neka je točka T_0 dana svojim radijvektorom \vec{r}_0 . Uzmimo sada na p bilo koju točku T i označimo sa \vec{r} radijvektor te točke. Tada za svaku točku $T \in p$ postoji jedinstveni $t \in \mathbf{R}$, takav da je $\overrightarrow{T_0T} = t \cdot \vec{q}$ (bijektivnost točaka pravca i skupa \mathbf{R}). Sa sl. 258. razabiremo da je

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{q}. \quad (1)$$

Jednadžba (1) zove se jednadžba pravca određenog točkom i vektorom smjera. Realan broj t zove se parametar točke T . Nalazi li se točka T na pravcu p , to njezin radijvektor zadovoljava jednadžbu (1), ali je očito da vrijedi i obrnuto, tj.



Sl. 258.

Ako radijvektor neke točke zadovoljava jednakost (1) za neku vrijednost parametra t , onda ta točka leži na pravcu p . To je puni smisao iskaza da je (1) jednadžba pravca p .

3.2. Parametarske jednadžbe pravca. Kanonski oblik

Napišimo sada (1) u ekvivalentnom skalarnom obliku. Uzmimo da je $T_0 = (x_0, y_0)$ te $\vec{q} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $a^2 + b^2 \neq 0$ i $T = (x, y)$. Tada (1) glasi $x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + t(a\vec{i} + b\vec{j})$, odnosno $(x - x_0 - at)\vec{i} + (y - y_0 - bt)\vec{j} = \vec{0}$. Kako su \vec{i} , \vec{j} linearno nezavisni vektori, odavde slijedi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at, \\ y &= y_0 + bt. \end{aligned} \quad (2)$$

Jednadžbe (2) zovemo **parametarskim jednadžbama pravca p** određenog točkom $T_0 = (x_0, y_0)$ i vektorom smjera $\vec{q} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Jednakosti (2) zovemo još i **parametrizacijom pravca**. Iz (2) slijedi (za $a, b \neq 0$) $\frac{x - x_0}{a} = t$, $\frac{y - y_0}{b} = t$, tj.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \quad (3)$$

Jednadžbu (3) zovemo **kanonskim oblikom jednadžbe pravca** koji je određen točkom $T_0 = (x_0, y_0)$ i vektorom smjera $\vec{q} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Napomenimo da u slučaju $a = 0$ ili $b = 0$ jednakost (3) ne treba "ozbiljno shvaćati", to je samo naznaka da se radi o kanonskom obliku jednadžbe pravca koji je paralelan u slučaju $a = 0$ s osi y , a u slučaju $b = 0$ s osi x .

Primjer 1. Napišite parametarske jednadžbe pravca koji prolazi točkom $T_0 = (-2, 3)$ i kojemu je $\vec{q} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ vektor smjera. Nacrtajte taj pravac i na njemu točke s apscisama -2 i 3 . Koje vrijednosti parametara pripadaju tim točkama?

Rješenje. Prema (2) parametarske jednadžbe glase

$$\begin{aligned} x &= -2 + 3t, \\ y &= 3 - 4t. \end{aligned}$$

Za $x = -2$ iz prve od tih jednadžaba dobivamo $-2 = -2 + 3t$, tj. $t = -\frac{4}{3}$. Ako to uvrstimo u drugu jednadžbu, dobivamo $y = \frac{25}{3}$, dakle ta točka ima koordinate $(-2, \frac{25}{3})$. Za točku s apscisom 3 dobiva se slično $t = \frac{1}{3}$ i $y = \frac{5}{3}$ dakle $(3, \frac{5}{3})$. Kanonski oblik jednadžbe tog pravca glasi

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 3}{-4}. \quad \blacksquare$$

Napomena 1. Ako u nekoj parametrizaciji pravca nekoj njegovoj točki T pripadna vrijednost parametra jest t to označavamo sa $T(t)$.

Postavlja se pitanje kako prepoznati da su dvije različite parametrizacije parametrisacije istog pravca. Ilustrirajmo to na primjeru.

Primjer 2. Zadane su parametarske jednadžbe pravca p_1 sa $x = -1 + 2t$, $y = 5 - 4t$ i pravca p_2 sa $x = -5 + 4\tau$, $y = 7 - 2\tau$. Pokažite da je $p_1 \equiv p_2$.

Rješenje. Dovoljno je pokazati da su pravci p_1 i p_2 paralelni i da imaju bar jednu točku zajedničku. Vektor smjera prvog pravca je $\vec{q}_1 = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, a drugog $\vec{q}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j}$, i to su očito kolinearni vektori pa je $p_1 \parallel p_2$. Uzmimo sada na p_1 točku kojoj je $t_1 = 0$ parametar, to je točka $T_1 = (-1, 5)$. Treba vidjeti je li ona na pravcu p_2 . Uvrstimo $x = -1$, $y = 5$ u parametarsku jednadžbu od p_2 . Dobivamo $-1 = -5 + 4\tau$, $5 = 7 - 2\tau$, iz obje jednadžbe slijedi $\tau = 1$, pa T_1 leži i na p_2 i njoj odgovara vrijednost parametra $\tau = 1$. Dakle je $p_1 \equiv p_2$. ■

Ako je vektor smjera pravca jedinični vektor, onda kažemo da je pravac parametriziran prirodnim (invarijantnim) parametrom.

Primjer 3. Odredite prirodnu parametrizaciju pravca iz primjera 1. Uzmite na tom pravcu točke koje odgovaraju parametrima $t_1 = -5$ i $t_2 = 10$ i odredite njihovu udaljenost.

Rješenje. Vektor smjera pravca je $\vec{q} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$. Jedinični vektor u smjeru vektora \vec{q} je $\vec{q}_0 = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$, a kako pravac prolazi točkom $T_0 = (2, 3)$, to njegova invarijantna parametrizacija glasi

$$\begin{aligned}x &= 2 + \frac{3}{5}t, \\y &= 3 - \frac{4}{5}t.\end{aligned}$$

Za $t_1 = -5$ dobiva se $x_1 = -1$, $y_1 = 7$, dakle $T_1 = (-1, 7)$. Za $t_2 = 10$ dobiva se $T_2 = (8, -5)$. Udaljenost tih točaka je $|T_1T_2| = 15$. Uočimo da je i $t_2 - t_1 = 15$, pa to objašnjava naziv prirodna parametrizacija, tj. ta parametrizacija ima svojstvo da je razlika parametara dviju točaka upravo jednaka njihovoj udaljenosti. ■

Da je to i općenito istina vidjet ćemo u sljedećoj propoziciji.

PROPOZICIJA 1. Parametrizacija (1) pravca p je invarijantna ako i samo ako za svake dvije točke $T_1(t_1)$, $T_2(t_2)$ tog pravca vrijedi $|T_1T_2| = |t_2 - t_1|$.

Dokaz. Iz (2) za koordinate $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ dobivamo $x_1 = x_0 + at_1$, $y_1 = y_0 + bt_1$, $x_2 = x_0 + at_2$, $y_2 = y_0 + bt_2$. Odavde je $|T_1T_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = a^2(t_2 - t_1)^2 + b^2(t_2 - t_1)^2 = (a^2 + b^2)(t_2 - t_1)^2$. Dakle, $|T_1T_2| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot |t_2 - t_1|$. Odavde slijedi da je $|T_1T_2| = |t_2 - t_1|$ ako i samo ako je $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, tj. ako je vektor smjera tog pravca jedinični, dakle parametrizacija invarijantna. ■

3.3. Jednadžba pravca kroz dvije točke. Eksplisitni, implicitni i segmentni oblik jednadžbe pravca

Neka su $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ dvije različite točke i p pravac određen tim točkama. Tada je p ujedno i pravac određen točkom $T_1 = (x_1, y_1)$ i vektorom

smjera $\vec{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$. Prema (2) njegove jednadžbe glase

$$\begin{aligned}x &= x_1 + (x_2 - x_1)t, \\y &= y_1 + (y_2 - y_1)t.\end{aligned}\quad (4)$$

Jednadžbe (4) su parametarske jednadžbe pravca određenog s dvije točke. Eliminacijom parametra t iz (4) dobivamo

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.\quad (5)$$

Jednadžbu (4) zovemo **kanonskim oblikom** jednadžbe pravca kroz dvije točke. Uobičajeno je (5) pisati i u obliku

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).\quad (6)$$

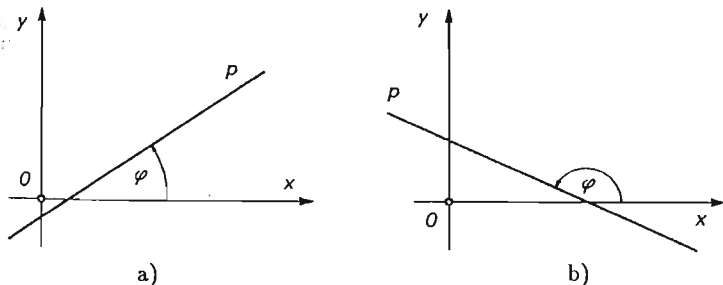
Tu jednakost možemo napisati i u obliku

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0,$$

što pomoću determinante možemo pisati u obliku

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.\quad (7)$$

Jednadžbu (7) zovemo **determinantskim oblikom jednadžbe pravca** kroz dvije točke. Dajmo sada jedno drugo tumačenje jednadžbi (7). U tu svrhu definirajmo kut φ kojeg pravac p zatvara s pozitivno orijentiranom osi x . Najmanji kut, za koji treba u pozitivnom smislu (smislu obrnutom kretanju kazaljke na satu) zakrenuti pozitivni dio osi x , oko njezinog sjecišta sa p tako da se rotirani položaj osi x i pravac p poklope, zovemo **kutom pravca p prema osi x** . Iz te definicije je jasno da je $\varphi \in [0, \pi)$. Na sl. 259.a p zatvara s osi x šiljasti kut, a na sl. 259.b tupi kut.

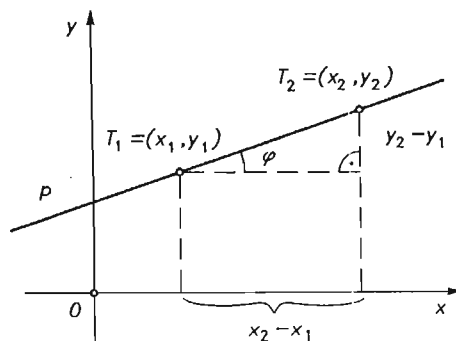


Sl. 259.

Realan broj $k = \operatorname{tg} \varphi$ zovemo **koeficijentom smjera pravca p** . Za pravac okomit na os x koeficijent smjera nije definiran. Pravac paralelan s osi x ima

koeficijent smjera $k = 0$. Simetrala I. i III. kvadranta ima očito koeficijent smjera $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$, a II. i IV. kvadranta $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$.

U jednadžbi (6) pojavljuje se razlomak $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Na sl. 260. je očito da je taj realni broj upravo jednak $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, tj. koeficijentu smjera k pravca p . Ako točke T_1 i T_2 zamijene svoja mjesta, onda oba broja $y_2 - y_1$ i $x_2 - x_1$ mijenjaju predznak, pa tvrdnja i u tom slučaju vrijedi. Isto se dobiva ako pravac zatvara tupi kut s osi x . Provjerite to.



Sl. 260.

Prema tome, jednadžbu (6) možemo pisati u obliku

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (8)$$

i tu jednadžbu zovemo jednadžbom pravca određenog točkom $T_1 = (x_1, y_1)$ i koeficijentom smjera.

Ako je pravac određen koeficijentom smjera i točkom $(0, l)$, onda iz (8) slijedi

$$y = kx + l. \quad (9)$$

Ordinata l sjecišta pravca s osi y zove se **odrezak** (odsječak, segment) pravca na osi y . Jednadžba (9) zove se **eksplicitna jednadžba pravca**.

Na isti se način definira i odrezak pravca na osi x .

Neka su sada m i n redom segmenti pravca p na osima x i y , tj. p siječe os x u točki $(m, 0)$, a os y u točki $(0, n)$, $m, n \neq 0$. Dakle, to je pravac koji prolazi navedenim točkama.

Prema (7) njegova jednadžba glasi

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ m & 0 & 1 \\ 0 & n & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno

$$-nx - my + mn = 0,$$

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1. \quad (10)$$

(10) se zove **segmentni oblik** jednadžbe pravca.

Razvijemo li determinantu na lijevoj strani od (7) po elementima prvog retka, dobivamo jednadžbu oblika

$$Ax + By + C = 0. \quad (11)$$

Jednadžbu (11) zovemo **implicitnim ili općim oblikom** jednadžbe pravca. Prihvatimo da je ili $x_1 \neq x_2$ ili $y_1 \neq y_2$, tako da uvijek vrijedi $A^2 + B^2 \neq 0$. Da se kaže da je (11) uz uvjet $A^2 + B^2 \neq 0$ uvijek jednadžba pravca treba pokazati da tri točke $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ zadovoljavaju (11), onda one uvijek leže na pravcu. Zaista, neka je

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + C &= 0, \\ Ax_3 + By_3 + C &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Sustav (12) shvatimo kao sustav homogenih jednadžbi za nepoznanice A , B i C . Bilo kojim $A^2 + B^2 \neq 0$ taj sustav uvijek ima netrivialno rješenje, pa stoga mora determinanta tog sustava iščezavati, tj. mora biti

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

što je uvjet kolinearosti točaka T_i (§2). Ovim je tvrdnja dokazana.

3.4. Udaljenost točke od pravca. Normalan oblik jednadžbe pravca

Neka je p pravac koji ne prolazi ishodištem i T bilo koja točka ravnine. Mi ćemo udaljenosti d točke T od pravca p pridružiti predznak i reći da je $d > 0$ ako su T i ishodište O s različitih strana pravca p , a $d < 0$ ako su s iste strane od p . Nađimo analitički izraz za tako definiranu udaljenost. Pretpostavimo da je pravac određen svojom udaljenosti δ od ishodišta i jediničnim vektorom \vec{n}_0 okomitim na p (sl. 261).

Neka je φ kut vektora \vec{n}_0 i osi x , tada je

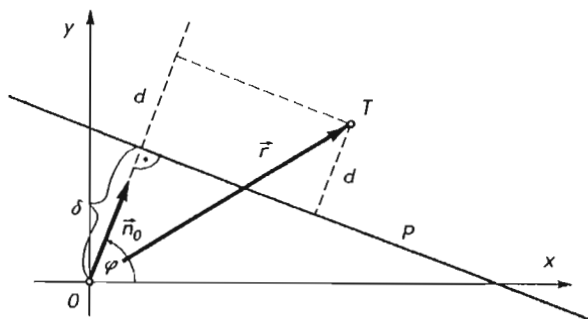
$$\vec{n}_0 = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi. \quad (13)$$

Neka je dalje $T = (x, y)$, tj.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}. \quad (14)$$

Na sl. 261. razabiremo da je

$$d = k(pr_{\vec{n}_0} \vec{r}) - \delta.$$



Sl. 261.

Kako je

$$k(pr_{\vec{n}_0}\vec{r}) = \frac{\vec{n}_0 \cdot \vec{r}}{|\vec{n}_0|} = \vec{n}_0 \cdot \vec{r},$$

to je

$$d = \vec{n}_0 \cdot \vec{r} - \delta.$$

Za one točke ravnine koje leže na pravcu p je $d = 0$, pa iz (15) slijedi

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - \delta = 0.$$

Jednadžba (16) predstavlja dakle analitičko predočenje pravca p , i to je tzv. **malan oblik** jednadžbe pravca ili **Hesseov¹ oblik** jednadžbe pravca. Jednadžbu (16) se zbog (13) i (14) može pisati i u skalarnom obliku

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta = 0.$$

Postavlja se sada pitanje ako je pravac zadan svojom implicitnom jednadžbom (11) kako naći njegov normalni oblik. Ako (11) i (17) predstavljaju analitičko predočenje istog pravca, onda mora postojati $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da bude

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta$$

za sve x i y , dakle mora biti

$$\lambda A = \cos \varphi, \quad \lambda B = \sin \varphi, \quad \lambda C = -\delta.$$

Iz prve dvije jednakosti (18) slijedi kvadriranjem i zbrajanjem

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

a iz treće jednakosti zbog $\delta > 0$ nalazimo da je $\text{sign } \lambda = -\text{sign } C$. Stoga je

$$\lambda = \frac{1}{-\text{sign } C \cdot \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

¹Ludwig Otto Hesse (1811–1874) njemački matematičar.

Dakle, normalni oblik jednadžbe pravca (11) glasi

$$\frac{Ax + By + C}{-\text{sign } C \cdot \sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \quad (19)$$

Dalje iz (15) slijedi da je udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0)$ od pravca (11) (prema (19)) jednaka

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{-\text{sign } C \cdot \sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (20)$$

Napomena 2. Iz (13) i (17) slijedi ako je pravac zadan svojom implicitnom jednadžbom $Ax + By + C = 0$, onda je $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ vektor okomit na vektor smjera tog pravca, tj. na taj pravac.

Primjer 4. Pokažite da je udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0)$ od pravca $x = at + b$, $y = ct + d$, $a^2 + c^2 \neq 0$ dana formulom

$$d = \frac{cx_0 - ay_0 + bc - ad}{-\text{sign}(bc - ad)\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Rješenje. Eliminacijom parametra t dobiva se implicitna jednadžba pravca

$$cx - ay + bc - ad = 0.$$

Iz (20) tada odmah slijedi tvrdnja. ■

Primjer 5. Pokažite da je apsolutna vrijednost površine trokuta $\Delta A_1 A_2 A_3$, $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ jednaka apsolutnoj vrijednosti determinante

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Implicitna jednadžba pravca $A_1 A_2$ prema (7) glasi $(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$. Visina trokuta spuštena iz vrha A_3 prema (20) ima duljinu

$$v = \frac{|(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}},$$

pa je

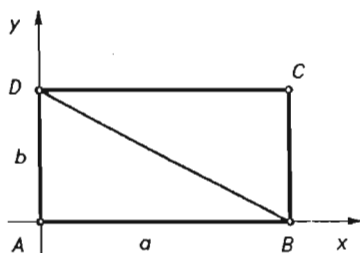
$$|A_1 A_2| \cdot v = |(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1|,$$

odnosno

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad \blacksquare$$

Primjer 6. Dokazite analitički da je udaljenost vrha pravokutnika od one njegove dijagonale koja ne prolazi tim vrhom jednaka $d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, gdje su a i b duljine stranica pravokutnika.

Rješenje. Uzmimo pravokutnik $ABCD$ sa stranicama $|AB| = a$ i $|AD| = b$ i odaberemo koordinatni sustav kao na sl. 262. Tada je $B = (a, 0)$, $D = (0, b)$, $C = (a, b)$.



Sl. 262.

Jednadžba pravca BD glasi $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, odnosno $bx + ay - ab = 0$. Normalan oblik je $\frac{bx + ay - ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$, a udaljenost točke C od pravca BD dobijemo tako da u taj normalni oblik, umjesto x i y , uvrstimo koordinate točke C . Dobivamo

$$d = \frac{ba + ab - ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\text{dakle } d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \blacksquare$$

3.5. Kut dvaju pravaca u ravnini. Uvjet okomitosti i paralelnosti

Neka su

$$p_i \dots y = k_i x + l_i, \quad i = 1, 2,$$

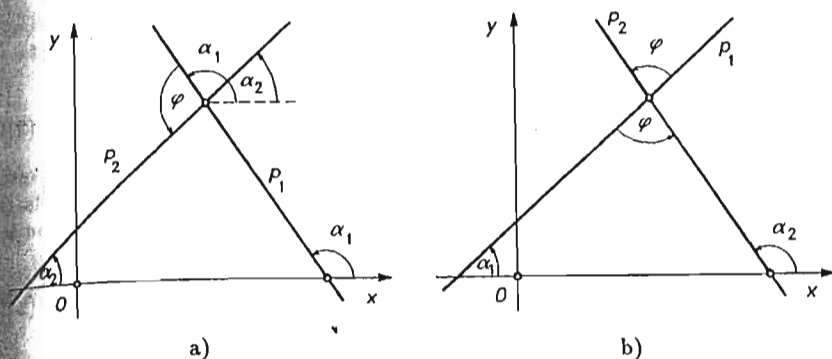
dva pravca u ravnini koji se sijeku. Pod kutom $\varphi = \sphericalangle(p_1, p_2)$ uređenog para (p_1, p_2) tih pravaca razumijevamo onaj najmanji kut za koji treba zarotirati u pozitivnom smislu pravac p_1 oko njihovog sjecišta tako da on padne na p_2 . Ako se pravci podudaraju, ili su paralelni, onda po dogovoru uzimamo da je $\varphi = 0$. Dakle je uvijek $\varphi \in [0, \pi)$. Da se odredi taj kut, dovoljno je naći $\text{tg } \varphi$, jer je u navedenom intervalu sa $\text{tg } \varphi$ i kut φ jednoznačno određen.

Kutove pravaca p_i , prema pozitivnoj osi x označavamo sa α_i , $i = 1, 2$. Znamo da je $\alpha_i \in [0, \pi)$. Sada moramo razlikovati dva slučaja, ili je $\alpha_1 > \alpha_2$ (sl. 263.a) ili $\alpha_1 < \alpha_2$ (sl. 263.b). (U slučaju $\alpha_1 = \alpha_2$ pravci su ili paralelni ili se podudaraju, pa je tada $\varphi = 0$.) Sa sl. 263.a vidimo da je u prvom slučaju $\alpha_1 - \alpha_2 + \varphi = \pi$, a u drugom (prema poučku o vanjskom kutu trokuta) $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$. Dakle, u prvom je slučaju $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 + \pi$, a u drugom $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Kako je tg periodična funkcija s temeljnim periodom π , to u oba slučaja iz ovih jednakosti slijedi

$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{tg } \alpha_2 - \text{tg } \alpha_1}{1 + \text{tg } \alpha_1 \cdot \text{tg } \alpha_2}.$$

Odavde, uz standardnu oznaku $k_i = \text{tg } \alpha_i$, $i = 1, 2$, slijedi

$$\text{tg } \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (21)$$



Sl. 263.

Dakle, ako su k_1 i k_2 koeficijenti smjerova pravaca p_1 i p_2 , onda je kut uređenog para (p_1, p_2) dan sa (21). Uočite ako je φ kut uređenog para (p_1, p_2) , onda je, prema (21), kut uređenog para (p_2, p_1) jednak $\pi - \varphi$.

Iz (21) odmah slijedi da su pravci p_1 i p_2 paralelni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2, \quad (22)$$

tj. ako imaju iste koeficijente smjera.

Iz iste jednakosti slijedi da su pravci okomiti ako i samo ako je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tj. $\operatorname{tg} \varphi = \infty$, a to je za $1 + k_1 k_2 = 0$, tj.

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}. \quad (23)$$

Dakle, pravci su okomiti ako je koeficijent smjera jednog pravca jednak recipročnoj vrijednosti koeficijenta drugoga s protivnim predznakom.

Primjer 7. Nađite uvjete paralelnosti i okomitosti dvaju pravaca ako su oni zadani svojim implicitnim i parametarskim jednadžbama.

Rješenje. Ako su pravci zadani jednadžbama $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2$ i ako nijedan od njih nije paralelan s osi y , onda je $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, pa njihove eksplicitne jednadžbe glase $y = -\frac{A_i}{B_i} x - \frac{C_i}{B_i}$. Odavde je $k_i = -\frac{A_i}{B_i}$. Dakle, uvjet paralelnosti (prema (22)) glasi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad \text{odnosno} \quad A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0,$$

a uvjet okomitosti (prema (23)) $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Ako su pravci zadani parametarskim jednadžbama $x = a_i t + b_i$, $y = c_i t + d_i$, $i = 1, 2$, onda se eliminacijom parametra t dobivaju njihove implicitne jednadžbe, a iz njih i koeficijenti smjera $k_i = \frac{c_i}{a_i}$. Iz (22) dobiva se uvjet paralelnosti $a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$, a iz (23) i uvjet okomitosti $a_1 a_2 + c_1 c_2 = 0$. ■

3.6. Sjecište dvaju pravaca

Neka su

$$p_i \dots A_i x + B_i y + C_i = 0, \quad A_i^2 + B_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

dva pravca. Postavlja se pitanje sijeku li se ta dva pravca i ako se sijeku, kako odrediti njihovo sjecište $S = (x_0, y_0)$. Ako je S sjecište pravaca (24), onda je (x_0, y_0) rješenje sustava (24) i obrnuto. Znamo da je sustav (24) ekvivalentan sa sustavom (v. prvi dio, pogl. II)

$$Dx = D_1, \quad Dy = D_2, \quad (25)$$

gdje je

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad (26)$$

Sada razlikujemo tri slučaja:

1. $D \neq 0$. U ovom slučaju (25) povlači da je $x = \frac{D_1}{D}$, $y = \frac{D_2}{D}$. Naime, sustav (24) ima jedinstveno rješenje. Uvjet $D \neq 0$ je isto što i $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$, pa pravci nisu paralelni (primjer 7) i oni se sigurno sijeku.

2. $D = 0$, ali je barem jedna od determinanti D_1 ili D_2 različita od nule. U tom slučaju sustav (25) očito nema rješenje, jer ako je $D_1 \neq 0$, onda prva od jednadžbi (25) nije moguća, a ako je pak $D_2 \neq 0$, onda je to druga. Zbog $D = 0$ je $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$, pa su dakle pravci p_1 i p_2 paralelni i različiti.

3. $D = D_1 = D_2 = 0$. U tom su slučaju zbog $D = 0$ pravci paralelni, a sustav (25) ima beskonačno mnogo rješenja, pa se dakle u tom slučaju pravci p_1 i p_2 podudaraju.

Prema rečenom, koordinate sjecišta dvaju pravaca dobijemo tako da riješimo sustav (24).

Primjer 8. Točka $A = (-4, -2)$ vrh je trokuta $\triangle ABC$ kojemu dvije visine leže na pravcima $7x + 3y - 1 = 0$ i $2x + 7y - 9 = 0$. Odredite koordinate vrhova B i C .

Rješenje. Uočimo najprije da A ne leži ni na jednome od tih pravaca i neka B leži na $v_b \dots 7x + 3y - 1 = 0$ i C na $v_c \dots 2x + 7y - 9 = 0$. Stranica \overline{AC} očito leži na pravcu kroz A okomitom na v_b . Kako je $k_{v_b} = -\frac{7}{3}$, to je, prema (23), koeficijent smjera pravca okomitog na v_b jednak $k = \frac{3}{7}$, pa pravac AC , prema (8), ima jednadžbu $y + 2 = \frac{3}{7}(x + 4)$, odnosno $3x - 7y - 2 = 0$. Kako C leži na v_c , to su njegove koordinate rješenja sustava

$$3x - 7y - 2 = 0,$$

$$2x + 7y - 9 = 0.$$

Slijedi $C = \left(\frac{11}{5}, \frac{23}{35}\right)$. Slično se za jednadžbu pravca AB dobiva $7x - 2y + 24 = 0$, pa za koordinate točke B imamo sustav

$$7x + 3y - 1 = 0,$$

$$7x - 2y + 24 = 0.$$

Odavde je $B = (-2, 5)$. ■

Primjer 9. Dokažite da je površina trokuta omeđenog pravcima $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ dana formulom

$$P = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{array} \right|^2$$

$$P = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}.$$

Rješenje. Neka se prva dva pravca sijeku u točki (x_3, y_3) . Tada je, prema Cramerovom pravilu,

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Prvi i treći pravac se sijeku u točki (x_2, y_2) , gdje je

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}, \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_3 & A_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}},$$

a drugi i treći u (x_1, y_1) , gdje je

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}, \quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} C_2 & A_2 \\ C_3 & A_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}.$$

Površina P trokuta je, prema (4), § 2. jednaka

$$P = \frac{\frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} C_2 & A_2 \\ C_3 & A_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_3 & A_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{array} \right|}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}. \quad (*)$$

Determinanta u brojniku prethodne jednakosti je deteminanta

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

algebarskih komplementa A_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \cdot \text{No, lako je}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2,$$

pa iz (*) slijedi tvrdnja. ■

Napomena 3. Iz dobivenog rezultata slijedi da tri različita pravca $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ prolaze istom točkom ako i samo ako vrijedi

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

Primjer 10. Dokažite analitički da se visine trokuta sijeku u jednoj točki.

Rješenje. Neka je $\triangle A_1 A_2 A_3$, $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ trokut. Visina spuštena iz A_1 na stranicu $A_2 A_3$ ima jednadžbu

$$(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y - x_1(x_2 - x_3) - y_1(y_2 - y_3) = 0.$$

Cikličnom zamjenom indeksa dobivamo i jednadžbu pravca na kojemu leže ostale dvije visine, tj.

$$(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y - x_2(x_3 - x_1) - y_2(y_3 - y_1) = 0,$$

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y - x_3(x_1 - x_2) - y_3(y_1 - y_2) = 0.$$

Prema (27) visine će prolaziti jednom točkom ako i samo ako vrijedi

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & x_1(x_2 - x_3) - y_1(y_2 - y_3) \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & x_2(x_3 - x_1) - y_2(y_3 - y_1) \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & x_3(x_1 - x_2) - y_3(y_1 - y_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Ova jednakost očito je istinita, što se lako vidi ako u determinanti drugi i treći redak dodamo prvome. ■

3.7. Pramen pravaca u ravnini

Neka su

$$p_i \dots A_i x + B_i y + C_i = 0, \quad A_i^2 + B_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2$$

dva različita pravca u ravnini i neka se oni sijeku u točki $V = (x_0, y_0)$. Promotrimo pramen pravaca s vrhom u V , tj. skup svih pravaca ravnine koji prolaze točkom V . Taj je pramen tada analitički predočen jednadžbom

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0, \quad (28)$$

gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$ varijabilni parametar. Jednadžbu (28) zovemo **jednadžbom pravca**, a pravce p_1 i p_2 nosiocima **pramena**. Točka V , kao što znamo, zove se **vrh pramena**. Da je (28) jednadžba pramena, to znači da za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ (28) predočuje jedan pravac koji pripada pramenu i da za svaki pravac p pramena (osim p_2) postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je za taj λ (28) upravo jednadžba tog pravca p . Dokažimo to. Najprije uočimo da se (28) može napisati u obliku $(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2) = 0$. Za svaki λ to je linearna jednadžba u x i y , pa predočuje neki pravac. Treba vidjeti da taj pravac pripada pramenu, tj. da prolazi vrhom $V = (x_0, y_0)$. Kako p_i prolazi točkom $V = (x_0, y_0)$, to vrijedi $A_i x_0 + B_i y_0 + C_i = 0$, $i = 1, 2$. Odavde slijedi da je $A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 + \lambda(A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2) = 0$, pa dakle pravac pripada pramenu.

Uzmimo sada bilo koji pravac $p \neq p_2$. Treba pokazati da tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je (28) upravo jednadžba pravca p . Pravac p je određen nekom točkom $P = (x_1, y_1)$, $P \neq V$. Neka je sada

$$\lambda = -\frac{A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1}{A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2}. \quad (29)$$

Uvrstimo li (29) u (28), slijedi

$$(A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2)(A_1 x + B_1 y + C_1) - (A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1)(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0.$$

Uvrstimo li ovamo $x = x_1$, $y = y_1$ vidimo da taj pravac zaista prolazi točkom P , tj. za vrijednost (29) jednadžba (28) je upravo jednadžba pravca p . Ovim je tvrdnja dokazana.

Da se jednadžbom oblika (28) obuhvate svi pravci pramena umjesto jednog parametra λ uvode se dva parametra λ_1 i λ_2 sa $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, pa se (28) može napisati u obliku

$$\lambda_1(A_1 x + B_1 y + C_1) + \lambda_2(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0. \quad (30)$$

Sada svakom uređenom paru (λ_1, λ_2) jednadžba (30) pridružuje jedan pravac pramena i obrnuto. Posebno je paru $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ pridružen upravo pravac p_2 .

Uz oznaku $p_i(x, y) = A_i x + B_i y + C_i$ jednadžbu (30) možemo pisati u obliku

$$\lambda_1 p_1(x, y) + \lambda_2 p_2(x, y) = 0,$$

ili, ako nije potrebno istaknuti koordinate, još kraće kao $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 0$.

Izvedimo sada i izravno uvjet da tri različita pravca $p_i = A_i x + B_i y + C_i = 0$, $A_i^2 + B_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2, 3$ prolaze istom točkom. Oni će prolaziti istom točkom ako i samo ako sjecište

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

prvih dvaju pravaca leži na trećem pravcu $A_3x + B_3y + C_3 = 0$, tj. ako vrijedi

$$A_3 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_3 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_3 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

Pokazat ćemo da je taj uvjet ekvivalentan s uvjetom:

Pravci $p_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ prolaze istom točkom ako i samo ako postoje realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ koji nisu svi jednaki nuli, takvi da vrijedi

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0. \quad (31)$$

Dokažimo najprije valjanost uvjeta (31). Očito će pravci $p_i = 0$ prolaziti istom točkom ako i samo ako pravac

$$p_3 = 0 \quad (32)$$

pripada pramenu

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 0. \quad (33)$$

Ako sada pravac (32) pripada pramenu (33), onda mora postojati $\mu \in \mathbf{R}$ takav da je

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \mu p_3. \quad (34)$$

Stavimo li u (34) $\mu = -\lambda_3$, dobivamo

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0,$$

tj. upravo (31). Vrijedi li pak (31), to je onda očito da pravac p_3 pripada pramenu (33).

Dokažimo ekvivalentnost uvjeta (27) i (31).

1. (31) \Rightarrow (27). Da to pokažemo, napišimo (31) opširnije

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i (A_i x + B_i y + C_i) = 0,$$

ili

$$\left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i A_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i B_i \right) y + \sum_{i=1}^3 \lambda_i C_i = 0.$$

Kako ova jednakost mora vrijediti za sve x i y , to odavde slijedi

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0,$$

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3 = 0,$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0.$$

Ovaj sustav po pretpostavci ima netrivialno rješenje $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, a kako je on homogen, to je samo onda ako determinanta sustava iščezava, tj. ako vrijedi (27).

2. Da (27) \Rightarrow (31) zaključuje se sličnom argumentacijom u obrnutom slijedu. Ovim je ekvivalentnost uvjeta (27) i (31) dokazana.

Primjer 11. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $P = (3, 1)$ i na pravcima $y = 0$, $y = 2x$ odsijeca dužinu kojoj je točka P polovište.

Rješenje. Napišimo jednadžbu pravca kojem je vrh u točki $P = (3, 1)$. Za temeljne pravce pravca možemo uzeti pravce $p_1(x, y) = x - 3 = 0$, $p_2(x, y) = y - 1 = 0$. Jednadžba pravca tada glasi $x - 3 + \lambda(y - 1) = 0$, odnosno $x + \lambda y - 3 - \lambda = 0$. Siječe pravac s pravcem $y = 0$ ima koordinate $S_1 = (3 + \lambda, 0)$, a s pravcem $y = 2x$ ima koordinate $S_2 = \left(\frac{3 + \lambda}{1 + 2\lambda}, \frac{2(3 + \lambda)}{1 + 2\lambda} \right)$. Treba naći onaj pravac pravca za koji je P polovište dužine S_1S_2 .

$$\frac{3 + \lambda + \frac{3 + \lambda}{1 + 2\lambda}}{2} = 3, \quad \frac{3 + \lambda}{1 + 2\lambda} = 1.$$

Iz druge jednadžbe slijedi $\lambda = 2$, a to je ujedno i korijen prve jednadžbe. Traženi se pravac dobiva dakle tako da se u jednadžbu pravca uvrsti $\lambda = 2$. Dobiva se $x + 2y - 5 = 0$. ■

Primjer 12. Pokažite na dva načina da pravci $3x - 5y - 13 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ i $x - 2y - 5 = 0$ prolaze istom točkom.

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -13 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

pa oni prema (27) zaista prolaze istom točkom. Pokažimo da postoje $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, od kojih je barem jedan različit od nule, takvi da je

$$\lambda_1(3x - 5y - 13) + \lambda_2(2x + 3y + 4) + \lambda_3(x - 2y - 5) \equiv 0.$$

Ova se jednadžba može pisati u obliku

$$(3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)x + (-5\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3)y + (-13\lambda_1 + 4\lambda_2 - 5\lambda_3) = 0.$$

Odavde je

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ -5\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0, \\ -13\lambda_1 + 4\lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe slijedi $\lambda_3 = -3\lambda_1 - 2\lambda_2$, pa uvrštavanjem u druge dvije dobivamo sustav

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 7\lambda_2 &= 0, \\ 2\lambda_1 + 14\lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

Jedno rješenje ovog sustava je $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -1$, pa stoga $\lambda_3 = -19$. Dakle,

$$7 \cdot (3x - 5y - 13) - 1 \cdot (2x + 3y + 4) - 19 \cdot (x - 2y - 5) = 0,$$

pa prema uvjetu (33) pravci prolaze istom točkom. ■

3.8. Simetrala kuta dvaju pravaca

Neka su p_1 i p_2 dva neparalelna pravca ravnine od kojih nijedan ne prolazi ishodištem i neka su

$$x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i - \delta_i = 0, \quad i = 1, 2$$

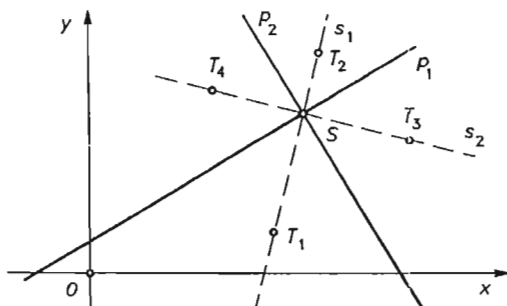
normalni oblici jednadžbi tih pravaca. Uvedemo li oznaku

$$n_i(x, y) = x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i - \delta_i,$$

to jednadžbe tih pravaca možemo pisati u obliku $n_i(x, y) = 0$ ili kraće $n_i = 0$. Promotrimo simetralu s_1 onog kuta tih pravaca unutar kojeg se nalazi ishodište. Prema definiciji udaljenosti točke od pravca za svaku točku $T = (x, y)$ te simetrale vrijedi

$$n_1(x, y) = n_2(x, y). \quad (34)$$

Zaista, za sve točke na polupravcu ST_1 su udaljenosti od pravaca p_1 i p_2 po apsolutnoj vrijednosti jednake i obje negativnog predznaka (sl. 264), a udaljenosti točaka



Sl. 264.

polupravca ST_2 od p_1 i p_2 po apsolutnoj vrijednosti jednake i obje pozitivnog predznaka, dakle u svakom slučaju vrijedi (34). Zaključujemo, dakle, da jednadžba simetrale s_1 glasi

$$n_1(x, y) - n_2(x, y) = 0. \quad (35)$$

Neka je s_2 simetrala onog kuta pravaca p_1 i p_2 unutar kojeg se ne nalazi ishodište. Tada su udaljenosti svih točaka polupravca ST_3 od p_1 i p_2 jednake po apsolutnoj vrijednosti i suprotnog predznaka. Isto vrijedi za točke polupravca ST_4 . Dakle jednadžba simetrale s_2 glasi

$$n_1(x, y) + n_2(x, y) = 0. \quad (36)$$

Primjer 13. Dokažite analitički da se simetrale unutrašnjih kutova trokuta sijeku u jednoj točki.

Rješenje. Uzmimo trokut $\triangle ABC$ i odaberimo pravokutni Kartezijev koordinatni sustav takav da je ishodište unutar trokuta. Neka su $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ i $n_3 = 0$ normalne jednadžbe pravaca na kojima redom leže stranice BC , CA i AB trokuta. Prema (35) tada jednadžbe simetrala unutrašnjih kutova trokuta glase $n_2 - n_3 = 0$, $n_3 - n_1 = 0$, $n_1 - n_2 = 0$. Prema (33) te će simetrale prolaziti istom točkom ako i samo ako postoje realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ od kojih je barem jedan različit od nule, takvi da vrijedi

$$\lambda_1(n_2 - n_3) + \lambda_2(n_3 - n_1) + \lambda_3(n_1 - n_2) = 0.$$

Takvi su brojevi očito $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ i tvrdnja je dokazana. ■

Primjer 14. Dokažite analitički da se dvije vanjske simetrale i unutrašnja simetrala pri trećem vrhu trokuta sijeku u jednoj točki. (Egzistencija trokutu pripisane kružnice.)

Rješenje. Uz oznake iz prethodnog primjera simetrala unutrašnjeg kuta pri vrhu A ima jednadžbu $n_2 - n_3 = 0$, a simetrale vanjskih kutova pri vrhovima B i C imaju redom jednadžbe $n_1 + n_3 = 0$ i $n_1 + n_2 = 0$. Očito za $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ vrijedi

$$\lambda_1(n_2 - n_3) + \lambda_2(n_1 + n_3) + \lambda_3(n_1 + n_2) = 0,$$

pa je tvrdnja dokazana. ■

Primjer 15. Dokažite analitički da tri simetrale vanjskih kutova trokuta sijeku tim simetralama suprotne stranice u tri kolinearne točke.

Rješenje. Kao i u primjeru 13. neka su normalne jednadžbe pravaca na kojima leže stranice $n_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Pretpostavimo da trokut nije niti jednakokrakan niti jednakostraničan. Tada, naime, tvrdnja nema smisla. Promotrimo pravac

$$p = n_1 + n_2 + n_3 = 0. \quad (*)$$

Tvrdimo da spomenute kolinearne točke leže na pravcu p . Označimo s M_1 sjecište simetrale vanjskog kuta pri vrhu A s pravcem p , s M_2 sjecište simetrale vanjskog kuta pri vrhu B s p i analogno se definiira M_3 . Označimo redom jednadžbe tih simetrala sa s_1, s_2 i s_3 . Tvrdnja će biti dokazana ako pokažemo da svaka od trojki p, s_1, n_1 ; p, s_2, n_2 ; p, s_3, n_3 pravaca prolazi istom točkom. Tada pravci s_i imaju jednadžbe (nacrtajte sliku)

$$s_1 = n_2 + n_3 = 0, \quad s_2 = n_3 + n_1 = 0, \quad s_3 = n_1 + n_2 = 0. \quad (**)$$

Treba vidjeti da postoje $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, koji nisu svi nula, takvi da vrijedi

$$\lambda_1 p + \lambda_2 s_1 + \lambda_3 n_1 = 0,$$

$$\lambda_1 p + \lambda_2 s_2 + \lambda_3 n_2 = 0,$$

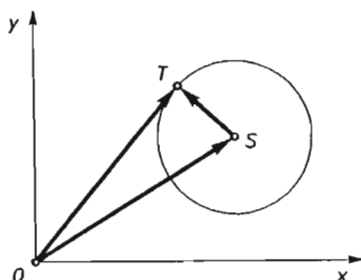
$$\lambda_1 p + \lambda_2 s_3 + \lambda_3 n_3 = 0.$$

Uvrstimo li u ove jednakosti (*) i (**), lako se vidi da $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ zadovoljavaju tražene uvjete. Ovim je tvrdnja dokazana. ■

§ 4. Kružnica

4.1. Jednadžba kružnice

Neka je $k(S, r)$ kružnica sa središtem S i polumjerom r i neka središte ima koordinate $S = (p, q)$. Neka je $T = (x, y)$ bilo koja točka kružnice. Na slici vidimo



Sl. 265.

da za svaki položaj točke T na kružnici vrijedi $d(S, T) = r$, pa slijedi

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2. \quad (1)$$

Kako svaka točka kružnice zadovoljava jednakost (1) i obrnuto ako neka točka $T = (x, y)$ zadovoljava (1), onda ona leži na kružnici, to je jednadžba (1) jednadžba kružnice. Posebno ako je središte kružnice u ishodištu koordinatnog sustava, onda je $p = q = 0$, pa iz (1) slijedi

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (2)$$

Jednadžba (2) je jednadžba centralne (središnje) kružnice.

Jednadžba (1) je jednadžba tipa

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad (3)$$

pa se postavlja pitanje koji uvjet moraju zadovoljavati koeficijenti $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ da to bude jednadžba kružnice. U tu svrhu svedimo je na oblik (1). Najprije je očito da mora biti $A \neq 0$. Podijelimo li (3) sa A , dobijemo

$$x^2 + y^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0,$$

odnosno

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 - \frac{B^2 + C^2}{4A^2} + \frac{D}{A} = 0,$$

ili

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}. \quad (4)$$

Usporedba sa (1) pokazuje da je to jednadžba kružnice ako i samo ako je

$$B^2 + C^2 - 4AD > 0 \quad \text{i} \quad A \neq 0. \quad (5)$$

Središte kružnice je u točki $S = (-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A})$. Ako je $B^2 + C^2 - 4AD = 0$, onda iz (4) razabiremo da tu jednadžbu zadovoljavaju koordinate jedne jedine točke $(-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A})$ u ravnini. U tom je slučaju (3) "jednadžba točke", tj. kružnice poluprijera $r = 0$. Ako je pak $B^2 + C^2 - 4AD < 0$, onda iz (4) slijedi da nijedna točka ravnine ne zadovoljava jednadžbu (3). Dakle, (5) je nužan i dovoljan uvjet da jednadžba (3) bude jednadžba kružnice.

Primjer 1. Odredite skup svih točaka ravnine, za koje je zbroj kvadrata udaljenosti od dviju čvrstih točaka konstantan.

Rješenje. Neka su A i B bilo koje dvije različite točke i neka je $|AB| = 2a$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Odaberemo koordinatni sustav takav da je $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$, (nacrtajte skicu). Neka je dalje $T = (x, y)$ točka koja zadovoljava uvjet zadatka, tj. takva točka da je $|AT|^2 + |BT|^2 = d^2$, gdje d realna konstanta. Kako je $|AT|^2 = (x+a)^2 + y^2$, $|BT|^2 = (x-a)^2 + y^2$, uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobijemo

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2 - 2a^2}{2}.$$

Dakle, za $d > a\sqrt{2}$ traženi skup točaka je kružnica. Za $d = a\sqrt{2}$ samo ishodište pripada traženom skupu točaka. Za $d < a\sqrt{2}$ skup takvih točaka je prazan. ■

Primjer 2. Odredite skup svih točaka ravnine za koje je omjer udaljenosti od dviju čvrstih točaka konstantan.

Rješenje. Odaberimo čvrste točke $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$, kao i u prethodnom primjeru. Neka je $T = (x, y)$ bilo koja točka promatranog skupa točaka. Prema uvjetu zadatka mora biti $|AT|/|BT| = k$, gdje je $k > 0$ realna konstanta. Sada je $|AT| = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, $|BT| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$. Uvrštenje u prethodnu jednadžbu daje

$$(x+a)^2 + y^2 = k^2[(x-a)^2 + y^2],$$

odnosno

$$(1 - k^2)(x^2 + y^2) + 2a(1 + k^2)x + (1 - k^2)a^2 = 0.$$

Usporedba sa (3) daje

$$A = 1 - k^2, \quad B = 2a(1 + k^2), \quad C = 0, \quad D = (1 - k^2)a^2.$$

Ovo je kružnica ako i samo ako je $B^2 + C^2 - 4AD > 0$ i $A \neq 0$. Sada $A \neq 0$ povlači $k \neq \pm 1$, kako je $k > 0$, to je $k \neq 1$. Za $k = 1$ dobiva se za traženi skup točaka jednadžba $x = 0$, dakle os y , tj. u tom je slučaju taj skup simetrala dužine \overline{AB} . Dalje je $B^2 + C^2 - 4AD = 16k^2 a^2$. Kako je $k > 0$, to je $B^2 + C^2 - 4AD > 0$, pa je traženi skup kružnica, i to je tzv. Apolonijeva definicije kružnice. ■

Primjer 3. Dužina \overline{AB} , ($|AB| = a$, $a > 0$) pomiče se u ravnini tako da je njezin kraj A stalno na pozitivnom dijelu osi y , a B na pozitivnom dijelu osi x . Koju krivulju opisuje pri tom polovište P dužine \overline{AB} ?

Rješenje. Neka je $A = (0, y_1)$, $B = (x_1, 0)$. Zbog $|AB| = a$ slijedi $x_1^2 + y_1^2 = a^2$, tj. $y_1 = \sqrt{a^2 - x_1^2}$. Dakle je $A = (0, \sqrt{a^2 - x_1^2})$, $B = (x_1, 0)$. Koordinate polovišta P neka su $P = (x_p, y_p)$. Stoga je

$$x_p = \frac{x_1}{2}, \quad y_p = \frac{\sqrt{a^2 - x_1^2}}{2}.$$

Ako iz ovih jednakosti eliminiramo x_1 , dobit ćemo

$$x_p^2 + y_p^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Dakle, točka P opisuje luk središnje kružnice polumjera $r = \frac{a}{2}$, koji se nalazi u prvom kvadrantu. ■

4.2. Jednadžba kružnice kroz tri točke

Neka su $T_i = (x_i, y_i)$ $i = 1, 2, 3$ tri nekolinearne točke, tj. vrijedi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Oredimo jednadžbu kružnice koja prolazi tim točkama. Opća jednadžba kružnice prema (3) glasi

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0. \quad (*)$$

Kako točke T_i , $i = 1, 2, 3$ leže na toj kružnici to mora vrijediti

$$A(x_i^2 + y_i^2) + Bx_i + Cy_i + D = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (**)$$

Jednadžba (*) i tri jednadžbe (**) čine homogen sustav linearnih jednadžbi s četiri nepoznanice A, B, C, D . Taj sustav ima netrivialno rješenje ako i samo ako determinanta tog sustava iščezava, tj. ako vrijedi

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (***)$$

Tvrdimo da je (***) jednadžba kružnice koja prolazi točkama $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$. Da to proverimo razvijemo (***) po elementima prvog retka

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} (x^2 + y^2) - \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} x + \\ + \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dakle, radi se o jednadžbi tipa (3). Usporedba sa (3) pokazuje da je

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

pa je zbog (*) $A \neq 0$. Nadalje, (x_1, y_1) zadovoljavaju (**) jer uvrstimo li u (**) $x = x_1$, $y = y_1$, onda su u determinanti na lijevoj strani od (**) prva dva retka jednaka pa determinanta iščezava. Slično je za (x_2, y_2) i (x_3, y_3) . Kako je uz $A \neq 0$ (3) ili jednadžba kružnice ili (3) zadovoljavaju koordinate jedne jedine točke ili nijedne točke ravnine, to slijedi da je (**) jednadžba kružnice koja prolazi točkama (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$.

4.3. Pravac i kružnica, tangenta, pol i polara

Pravac

$$y = kx + l \quad (6)$$

kružnica

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0 \quad (7)$$

mogu se dirati, mogu imati dvije točke zajedničke (sjeći se) ili nemaju nijednu točku zajedničku. Pokažimo kako se iz jednadžbi (6) i (7) prepoznaje njihov međusobni položaj. Uočimo da pravac i kružnica imaju dvije točke zajedničke ako je udaljenost središta kružnice od pravca manja od njezinog polumjera, jednu točku zajedničku (pravac je tangenta kružnice) ako je ta udaljenost jednaka r , a nijednu točku zajedničku ako je ta udaljenost veća od r . Da odredimo tu udaljenost, nađimo normalni oblik jednadžbe pravca (6); on glasi

$$\frac{kx - y + l}{-\text{sign } l \cdot \sqrt{1 + k^2}} = 0,$$

pa je udaljenost d točke (p, q) od pravca (6) jednaka

$$d = \frac{kp - q + l}{-\text{sign } l \cdot \sqrt{1 + k^2}}.$$

Dakle, ako u nejednakosti

$$(q - kp - l)^2 \underset{\geq}{\leq} r^2(1 + k^2)$$

vrijedi gornji znak ($<$), onda pravac siječe kružnicu, ako vrijedi znak jednakosti, tada dira kružnicu, a ako vrijedi donji znak ($>$), pravac i kružnica nemaju zajedničkih točaka.

Prema tome, pravac (6) je tangenta kružnice (7) ako i samo ako vrijedi

$$(q - kp - l)^2 = r^2(1 + k^2). \quad (8)$$

Jednadžba (8) zove se **uvjet dodira pravca i kružnice**.

Posebno ako se radi o središnjoj kružnici, onda je $p = q = 0$, pa uvjet dodira glasi

$$r^2(1 + k^2) = l^2. \quad (9)$$

Koristeći se uvjetima (7) i (8), možemo naći jednadžbu tangente kružnice ako je zadano diralište, jednadžbe tangenata povučenih izvan točke van kružnice na kružnicu, kao i jednadžbe zajedničkih tangenata dviju kružnica.

Ako je zadano diralište $D = (x_1, y_1)$ tangente i jednadžba kružnice (7), onda je jednadžbu tangente najlakše odrediti kao pravac koji prolazi diralištem D i okomit je na polumjer u toj točki. Ako je $S = (p, q)$ središte kružnice, onda koeficijent smjera pravca SD glasi $k_{DS} = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}$, pa je $k = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}$ koeficijent smjera tangente. Jednadžba tangente tada glasi

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1),$$

odnosno

$$(x_1 - p)(x - x_1) + (y_1 - q)(y - y_1) = 0,$$

ili

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) + p(x_1 - p) + q(y_1 - q) - x_1(x_1 - p) - y_1(y_1 - q) = 0,$$

tj.

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) - [(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2] = 0.$$

Kako točka $D = (x_1, y_1)$ leži na kružnici, to je

$$(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = r^2,$$

pa se prethodna jednadžba može konačno pisati u obliku

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) - r^2 = 0, \quad (10)$$

i to je jednadžba one tangente kružnice (7) kojoj je $D = (x_1, y_1)$ diralište.

Posebno za $p = q = 0$ dobiva se iz (10) jednadžba tangente

$$x_1x + y_1y - r^2 = 0 \quad (11)$$

središnje kružnice (2).

Pokažimo na primjerima kako se, koristeći se uvjetima dodira, određuju tangente iz točke izvan kružnice na kružnicu, kao i jednadžbe zajedničkih tangenata dviju kružnica.

Primjer 4. Odredite jednadžbe tangenata povučenih iz točke $T = (5, 3)$ na kružnicu $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$.

Rješenje. Napišimo najprije jednadžbu kružnice u obliku (1). Lako se vidi da ona glasi

$$x^2 + (y + 2)^2 = 5.$$

Dakle je $p = 0$, $q = -2$, $r = \sqrt{5}$. Ako je pravac (6) tangenta te kružnice, tada prema (8), mora vrijediti

$$(-2 - l)^2 = 5(1 + k^2). \quad (*)$$

Pravac (6) mora prolaziti točkom $T = (5, 3)$, pa vrijedi $3 = 5k + l$, odnosno

$$l = 3 - 5k. \quad (**)$$

Jednadžbe (*) i (**) određuju sustav jednadžbi za nepoznanice k i l . Riješimo li taj sustav i dobivene vrijednosti uvrstimo u (6), dobit ćemo jednadžbe tangenata. Uvrstimo li (**) u (*), dobivamo

$$2k^2 - 5k + 2 = 0.$$

Odavde je $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$, pa iz (**) slijedi $l_1 = -7$, $l_2 = \frac{1}{2}$. Jednadžbe tangenata dakle glase $y = 2x - 7$ i $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. ■

Primjer 5. Odredite zajedničke tangente kružnica $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$, $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

Rješenje. Najprije treba provjeriti postoje li zajedničke tangente i koliko ih je. Središta tih kružnica su u točkama $S_1 = (2, 1)$, $S_2 = (-2, -1)$, a njihovi su polumjeri $r_1 = 1$, $r_2 = 3$. Udaljenost njihovih središta je $|S_1 S_2| = \sqrt{20}$, a kako je $r_1 + r_2 = 4$, to je $|S_1 S_2| > r_1 + r_2$, pa kružnice nemaju zajedničkih točaka. Dakle, imamo četiri zajedničke tangente. Uvjet da je pravac (6) jednadžba tangente prve kružnice glasi

$$(1 - 2k - l)^2 = 1 + k^2, \quad (*)$$

i druge

$$(1 - 2k + l)^2 = 9(1 + k^2). \quad (**)$$

Za k i l imamo, dakle, sustav jednadžbi. Podijelimo li drugu od tih jednadžbi sa prvom, dobit ćemo

$$\frac{(1 - 2k + l)^2}{(1 - 2k - l)^2} = 9.$$

Odavde je

$$\frac{1 - 2k + l}{1 - 2k - l} = \pm 3. \quad (***)$$

U prvom slučaju slijedi da je $l = \frac{1}{2} - k$, pa ako to uvrstimo u (*), dobijemo $(1 - 2k - \frac{1}{2} + k)^2 = 1 + k^2$. Odavde je $k_1 = -\frac{3}{4}$, što uvršteno u $l = \frac{1}{2} - k$ daje $l_1 = \frac{5}{4}$. Jednadžba jedne zajedničke tangente glasi $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$, odnosno $3x + 4y - 5 = 0$. Ako u (***) uzmemo predznak $-$, dobivamo jednadžbu $l = 2 - 4k$, pa ako to uvrstimo (*), dobit ćemo $3k^2 - 4k = 0$, odavde je $k_2 = 0$ i $k_3 = \frac{4}{3}$. Slijedi $l_2 = 2$ i $l_3 = -\frac{10}{3}$. Dakle, imamo još dvije tangente $y = 2$, $y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$, odnosno $y - 2 = 0$, $4x - 3y - 10 = 0$. Gdje se izgubila četvrta tangenta? Ako se pažljivo nacrtala slika, vidi se da četvrta tangenta ima jednadžbu $x - 1 = 0$, tj. pravac paralelan s osi y , pa je njegov koeficijent smjera neodređen, točnije " $k = \infty$ " i stoga se ne može dobiti kao rješenje sustava (*), (**). Kako unaprijed prepoznati takav slučaj? Lako se vidi da dvije kružnice $(x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 - r_i^2 = 0$, $i = 1, 2$ imaju tangentu paralelnu s osi y ako i samo ako vrijedi $|p_2 - p_1| = |r_1 \pm r_2|$. U našem je slučaju $|p_2 - p_1| = 4$ i $r_1 + r_2 = 4$ i taj uvjet je ispunjen. ■

Na kraju napomenimo ako pravac (6) siječe kružnicu (7), onda se koordinate njihovih sjecišta dobivaju tako da se riješi po x i y sustav jednačaba (6) i (7). O sjecištu dviju kružnica bit će govora kasnije.

Ako nam je dana kružnica $(x-p)^2 + (y-q)^2 - r^2 = 0$ i točka $P = (x_0, y_0)$ ($P \neq (p, q)$), onda točki P , s obzirom na tu kružnicu, možemo pridružiti pravac p koji ima jednačbu

$$(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) - r^2 = 0. \quad (12)$$

Pravac p zovemo **polarom točke P s obzirom na zadanu kružnicu**, a točku P zovemo **polom pravca p** .

Uočite ako je P točka kružnice, onda je, prema (10), njezina polara upravo tangenta s diralištem u točki P .

Nađimo geometrijsko značenje polare ako je točka P izvan kružnice. Vrijedi

PROPOZICIJA 1. *Ako je točka P vanjska točka s obzirom na kružnicu k , onda je polara od P s obzirom na k spojnica dirališta tangenata povučenih iz P na k .*

Dokaz. Neka k ima jednačbu $(x-p)^2 + (y-q)^2 - r^2 = 0$ i neka je $P = (x_0, y_0)$. Označimo redom sa $D_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ dirališta tangenata t_i , $i = 1, 2$ povučenih iz P na k . Jednačbe tih tangenata su

$$(x_i - p)(x - p) + (y_i - q)(y - q) - r^2 = 0, \quad i = 1, 2.$$

Kako t_1 i t_2 prolaze kroz P , to vrijedi

$$(x_0 - p)(x_i - p) + (y_0 - q)(y_i - q) - r^2 = 0, \quad i = 1, 2,$$

a ove jednakosti pokazuju da točke D_i leže na pravcu

$$(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) - r^2 = 0,$$

a to je upravo jednačba polare točke P s obzirom na kružnicu k . ■

Posebno ako je k središnja kružnica $x^2 + y^2 = r^2$, onda jednačba polare točke $P = (x_0, y_0)$ s obzirom na tu kružnicu glasi

$$x_0x + y_0y - r^2 = 0. \quad (13)$$

Primjer 6. U sjecištima pravca $5x + 3y - 7 = 0$ i kružnice $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 7$ povučene su tangente. Odredite koordinate sjecišta tih tangenata.

Rješenje. Prema propoziciji 1. zadatak se svodi na to da se odredi pol pravca $5x + 3y - 7 = 0$ s obzirom na kružnicu $(x-1)^2 + (y-3)^2 - 7 = 0$. Neka je $P = (x_0, y_0)$ traženi pol. Jednačba njemu pridružene polare, prema (12), glasi

$$(x_0 - 1)(x - 1) + (y_0 - 3)(y - 3) - 7 = 0,$$

odnosno

$$(x_0 - 1)x + (y_0 - 3)y - [(x_0 - 1) + 3(y_0 - 3) + 7] = 0. \quad (*)$$

Jednadžba (*) i jednadžba

$$5x + 3y - 7 = 0$$

moraju biti jednadžbe istog pravca, a to će biti samo onda ako postoji realna konstanta $\lambda \neq 0$ takva da vrijedi

$$\frac{x_0 - 1}{5} = \lambda, \quad \frac{y_0 - 3}{3} = \lambda, \quad \frac{(x_0 - 1) + 3(y_0 - 3) + 7}{7} = \lambda. \quad (**)$$

Iz prve dvije od tih jednadžaba slijedi $x_0 - 1 = 5\lambda$, $y_0 - 3 = 3\lambda$, pa ako to uvrstimo u treću dobit ćemo

$$\frac{5\lambda + 9\lambda + 7}{7} = \lambda.$$

Odavde je $\lambda = -1$, pa iz prve dvije jednadžbe (**) nalazimo $x_0 = -4$, $y_0 = 0$. Traženi pol je $P = (-4, 0)$, a to je ujedno i sjecište navedenih tangenata. ■

Pomoću polare možemo naći i jednadžbe tangenata povučenih iz točke izvan kružnice na kružnicu. Ilustrirajmo to na primjeru.

Primjer 7. Nađite jednadžbe tangenata povučenih iz točke $P = (5, 4)$ na kružnicu $x^2 + y^2 - 14y + 32 = 0$.

Rješenje. Jednadžbu kružnice napišimo u obliku $x^2 + (y - 7)^2 - 17 = 0$ pa jednadžba polare glasi $x_0x + (y_0 - 7)(y - 7) - 17 = 0$, odnosno $5x - 3y + 4 = 0$. Odavde je $x = \frac{1}{5}(3y - 4)$. Sjecište pravca i kružnice naći ćemo tako da to uvrstimo u jednadžbu kružnice. Dobit ćemo $y^2 - 11y + 24 = 0$. Odavde je $y_1 = 8$, $y_2 = 3$, što povlači $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. Dirališta tangenata povučenih iz P su u točkama $D_1 = (4, 8)$, $D_2 = (1, 3)$. Jedna tangenta je pravac PD_1 , a druga PD_2 , dakle jednadžbe tangenata glase

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ii)

$$4x + y - 24 = 0, \quad x - 4y + 11 = 0.$$

Primjer 8. Dokažite da sve polare točaka jednog pravca pripadaju istom pramenu.

Rješenje. Neka polovi leže na pravcu $y = kx + l$. Parametrizirajmo ga ovako $x = \lambda$, $y = k\lambda + l$. Dakle, $P = (\lambda, k\lambda + l)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je kružnica središnja. Jednadžbe polara točke P imaju oblik

$$\lambda x + (k\lambda + l)y - r^2 = 0,$$

iii)

$$\lambda(x + ky) + ly - r^2 = 0. \quad (*)$$

Ako pravac na kojemu leže polovi ne prolazi središtem kružnice, onda je $l \neq 0$, pa iz prethodne jednadžbe vidimo da pripadne polare čine pramen pravaca. Ako pravac prolazi središtem kružnice, onda je $l = 0$, pa (*) postaje

$$\lambda(x + ky) - r^2 = 0,$$

a to je onda pramen paralelnih pravaca. ■

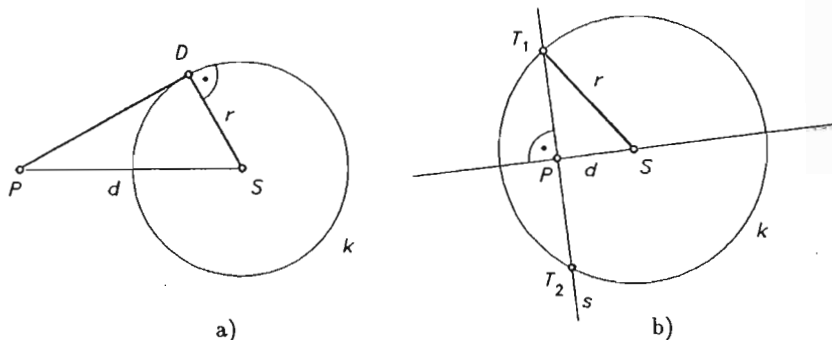
4.4. Potencija točke s obzirom na kružnicu. Potencijala dviju kružnica. Radikalno središte triju kružnica

Ako je k kružnica i P bilo koja točka ravnine, onda smo potencijom točke P s obzirom na kružnicu k zvali realan broj $\pm |PT_1| \cdot |PT_2|$, gdje su T_1 i T_2 sjecišta bilo koje sekante kružnice k , koja prolazi točkom P (prvi dio, §3.5). Međutim, u analitičkoj geometriji, definiramo potenciju točke P obzirom na kružnicu k kao skalarni produkt $\overrightarrow{PT_1} \cdot \overrightarrow{PT_2}$. Iz ove definicije slijedi da su potencije točaka koje su izvan kružnice pozitivne, a onih unutar negativne. Potencija točke na kružnici jednaka je 0. Postavlja se pitanje ako je točka P zadana svojim koordinatama $P = (x_0, y_0)$ i kružnica k svojom jednadžbom $(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0$, kako naći potenciju točke P obzirom na kružnicu k . Vrijedi

PROPOZICIJA 2. Potencija $p(P)$ točke $P = (x_0, y_0)$ s obzirom na kružnicu $k(x, y) = (x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0$ dana je formulom

$$p(P) = k(x_0, y_0). \quad (14)$$

Dokaz. Ako je P izvan kružnice k , onda smo vidjeli da je potencija te točke s obzirom na kružnicu jednaka kvadratu duljine tangente povučene iz točke P na k . Označimo li $|PS| = d$, gdje je S središte kružnice (sl. 266.a), slijedi $|PD|^2 = d^2 - r^2$, tj. $p(P) = d^2 - r^2$. Ako je pak točka P unutar kružnice k , onda je potencija



Sl. 266.

točke P negativna. Ako točkom P povučemo sekantu s okomitu na pravac PS i njezina sjecišta sa k označimo sa T_1 i T_2 (sl. 266.b), onda je ta potencija jednaka $-|PT_1| \cdot |PT_2| = -|PT_1|^2 = d^2 - r^2$. Dakle u oba je slučaja $p(P) = d^2 - r^2$. Kako je $d^2 = (x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2$, to je

$$p(P) = (x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2 - r^2.$$

Zbog $k(x, y) = (x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2$ slijedi

$$p(P) = k(x_0, y_0)$$

i tvrdnja je dokazana. ■

Primjer 9. Zadana je kružnica $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 - 1 = 0$ i točka $P = (-1, 2)$. Kako glasi jednadžba kružnice kojoj je središte u P i koja ortogonalno siječe zadanu kružnicu?

Rješenje. Središte zadane kružnice k je u točki $S = (5, -1)$. Stoga je $|PS| = \sqrt{45}$, a kako je polumjer kružnice jednak $r = 1$, to je $|PS| > r$. Dakle, P leži izvan kružnice k . Zbog toga je kvadrat polumjera kružnice kojoj je središte u P i koja ortogonalno siječe k jednak potenciji točke s obzirom na kružnicu k (sl. 266.a). Kako je, prema propoziciji 2, $p(P) = (-1 - 5)^2 + (2 + 1)^2 - 1$, $p(P) = 44$, to jednadžba tražene kružnice glasi $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 44 = 0$. ■

Sada se postavlja pitanje kako odrediti skup svih točaka ravnine koje, s obzirom na zadane kružnice k_1 i k_2 , imaju iste potencije. Taj se skup točaka zove potencijala kružnica k_1 i k_2 .

Neka su $k_i(x, y) = (x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 - r_i^2 = 0$, $i = 1, 2$ dvije kružnice i neka je $T = (\xi, \eta)$ točka koja s obzirom na te kružnice ima istu potenciju. Prema propoziciji 2. ta točka ima s obzirom na te kružnice iste potencije ako i samo ako vrijedi $k_1(\xi, \eta) = k_2(\xi, \eta)$, odnosno

$$(\xi - p_1)^2 + (\eta - q_1)^2 - r_1^2 = (\xi - p_2)^2 + (\eta - q_2)^2 - r_2^2, \quad (15)$$

$$2(p_2 - p_1)\xi + 2(q_2 - q_1)\eta + p_1^2 - p_2^2 + q_1^2 - q_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0.$$

Pretpostavimo sada da kružnice nisu koncentrične, tj. da je ili $p_1 \neq p_2$ ili $q_1 \neq q_2$. U tom je slučaju prethodna jednadžba jednadžba nekog pravca. Iz te jednadžbe razabiremo da u slučaju koncentričnih kružnica ne postoji točka ravnine koja s obzirom na njih ima iste potencije. Dakle, tražena potencijala je pravac. Spojnica središta kružnica ima jednadžbu

$$(q_1 - q_2)x - (p_1 - p_2)y + p_1q_2 - q_1p_2 = 0,$$

pa iz (15) razabiremo da je potencijala okomita na spojnicu središta kružnica. Dokazali smo, dakle, propoziciju.

PROPOZICIJA 3. Potencijala dviju kružnica

$$k_i(x, y) = (x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 - r_i^2 = 0, \quad i = 1, 2$$

je pravac okomit na spojnicu njihovih središta i njezina jednadžba glasi

$$k_1(x, y) - k_2(x, y) = 0. \quad \blacksquare \quad (16)$$

Pomoću potencijale se određuju i sjecišta dviju kružnica. Pokažimo to na primjeru.

Primjer 10. Odredite zajedničke točke kružnica $k_1(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ i $k_2(x, y) = x^2 + y^2 + 8x + 4y - 65 = 0$.

Rješenje. Ako se te kružnice sijeku, onda očito njihova potencijala mora prolaziti sjecištima. Dakle, zadatak rješavamo tako da nađemo potencijalu i njezina sjecišta s bilo kojom od zadanih kružnica. Prema (16), jednadžba potencijale glasi

$$x^2 + y^2 + 8x + 4y - 65 - (x^2 + y^2 - 25) = 0,$$

odnosno $2x + y - 10 = 0$. Koordinate sjecišta kružnice k_1 i potencijale su rješenja sustava

$$x^2 + y^2 - 25 = 0,$$

$$2x + y - 10 = 0.$$

Lako se dobiva $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 4$. Kružnice se, dakle, sijeku u točkama $S_1 = (5, 0)$ i $S_2 = (3, 4)$. ■

Primjer 11. Odredite jednadžbu kružnice koja ortogonalno siječe kružnice $(x-2)^2 + (y-3)^2 - 25 = 0$, $(x-7)^2 + (y+5)^2 - 4 = 0$ i kojoj je središte na pravcu $x - y - 10 = 0$

Rješenje. Nađimo najprije potencijalu tih kružnica. Prema (16) njezina jednadžba glasi

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 - 25 - [(x-7)^2 + (y+5)^2 - 4] = 0,$$

odnosno $5x - 8y - 41 = 0$. Na toj potencijali leže središta svih kružnica koje ortogonalno sijeku svaku od zadanih kružnica (usp. primjer 9), a kako se traži ona od njih koja leži na pravcu $x - y - 10 = 0$, to je središte kružnice u sjecištu potencijale i zadanog pravca. Ti se pravci sijeku u točki $S = (13, 3)$. Treba još odrediti polumjer. Kao što znamo, kvadrat polumjera tražene kružnice jednak je potenciji točke S s obzirom na bilo koju od zadanih kružnica, pa je prema (14) $r^2 = (13-2)^2 + (3-3)^2 - 25 = 96$. Prema tome, jednadžba tražene kružnice glasi $(x-13)^2 + (y-3)^2 - 96 = 0$. ■

Neka su sada k_i , $i = 1, 2, 3$ tri kružnice među kojima nema koncentričnih. Tada svake dvije od njih imaju svoju potencijalu. Označimo sa p_{12} potencijalu kružnica k_1 i k_2 itd. Tako dobijemo tri potencijale p_{12} , p_{13} i p_{23} i vrijedi

PROPOZICIJA 4. *Potencijale triju kružnica među kojima nema koncentričnih i kojima središta ne leže na jednom pravcu sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Neka su $k_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, 3$ jednadžbe tih kružnica. Prema (16) jednadžbe njihovih potencijala jesu

$$p_{12}(x, y) = k_1(x, y) - k_2(x, y) = 0,$$

$$p_{13}(x, y) = k_3(x, y) - k_1(x, y) = 0, \quad (17)$$

$$p_{23}(x, y) = k_2(x, y) - k_3(x, y) = 0.$$

Te će potencijale prolaziti istom točkom ako postoje realne konstante λ_1 , λ_2 i λ_3 koje nisu sve jednake nuli, takve da vrijedi

$$\lambda_1 p_{12} + \lambda_2 p_{13} + \lambda_3 p_{23} = 0. \quad (18)$$

Uvrstimo li u ovu jednakost $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ i uzmemo li u obzir (17), vidimo da je lijeva strana u (18) zaista jednaka nuli i tvrdnja je dokazana. Ako središta kružnica leže na jednome pravcu, onda su prema propoziciji 3. njihove potencijale okomite na taj pravac, dakle paralelne, pa tvrdnja ne stoji. ■

Sjecište potencijala triju kružnica zove se **radikalno središte** tih kružnica. Iz svega što je do sada rečeno slijedi da je radikalno središte triju kružnica središte kružnice koja ortogonalno siječe sve tri kružnice.

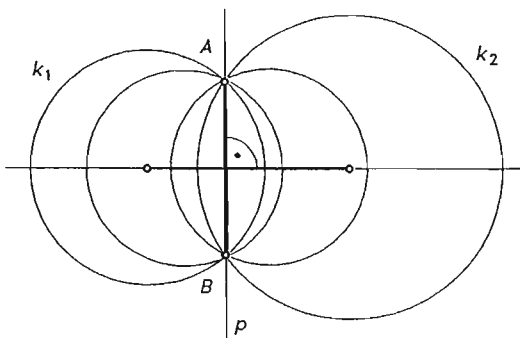
Primjer 12. Odredite jednadžbu kružnice koja ortogonalno siječe kružnice $k_1(x, y) = (x+10)^2 + (y-4)^2 - 25 = 0$, $k_2(x, y) = (x-18)^2 + (y-4)^2 - 81 = 0$, $k_3(x, y) = (x+6)^2 + (y+8)^2 - 81 = 0$.

Rješenje. Potencijala p_{12} kružnica k_1 i k_2 ima jednadžbu $p_{12}(x, y) = k_1(x, y) - k_2(x, y) = 0$. Lako se vidi da je $p_{12}(x, y) = x - 3 = 0$. Na isti se način dobiva $p_{13}(x, y) = x - 3y + 9 = 0$. Dakle, radikalno je središte u sjecištu tih potencijala, tj. u točki $S = (3, 4)$. Kvadrat polumjera r^2 kružnice, koja ortogonalno siječe sve tri kružnice jednak je potenciji točke S s obzirom na bilo koju od tih kružnica. Dakle je $r^2 = (3+10)^2 + (4-4)^2 - 25 = 144$. Prema tome, jednadžba tražene kružnice glasi $(x-3)^2 + (y-4)^2 - 144 = 0$. ■

4.5. Pramen kružnica

Pramenom kružnica u ravnini zovemo skup svih onih kružnica od kojih svake dvije imaju isti pravac za potencijalu.

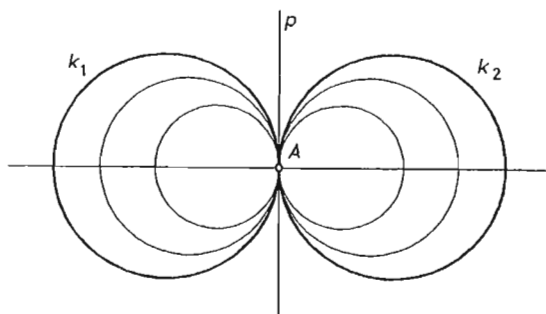
Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se sijeku točkama A i B . Tada je pravac $p = AB$ potencijala tih kružnica. Za svake je dvije kružnice koje prolaze kroz A i B p potencijala. Prema tome, sa k_1 i k_2 je određen jedan pramen kružnica i njega čine sve one i samo one kružnice ravnine koje prolaze točkama A i B (sl. 267). Kružnice k_1 i k_2 zovu se **temeljne kružnice** pramena, a A i B **temeljne točke**.



Sl. 267.

Dakle, sve kružnice ravnine koje prolaze dvjema različitim točkama ravnine čine jedan pramen. Takav pramen zovemo **eliptičnim pramenom kružnica**. Na sl. 267 nacrtano je nekoliko kružnica eliptičnog pramena.

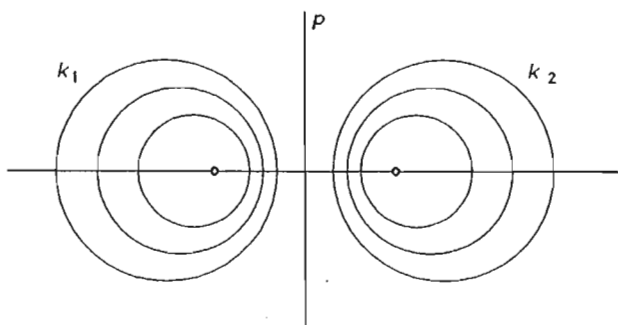
Neka se sada kružnice k_1 i k_2 diraju u točki A . Tada je zajednička tangenta p s diralištem u A potencijala tih dviju kružnica. Svake dvije kružnice kojima je u A pravac p zajednička tangenta imaju svojstvo da je p njihova potencijala. Kružnice k_1 i k_2 , dakle, opet određuju pramen koji čine sve kružnice ravnine što se diraju u A i kojima je p zajednička tangenta (sl. 268).



Sl. 268.

Takav pramen kružnica zovemo **paraboličnim pramenom**, a točku A zovemo **centralnom točkom pramena**.

Ako se k_1 i k_2 ne sijeku i nisu koncentrične, onda one također određuju jedan pramen i takav pramen zovemo **hiperboličnim pramenom** (sl. 269).



Sl. 269.

Po dogovoru se uzima da potencijala kao granični slučaj kružnice (kada polumjer teži u neizmjernost) pripada pramenu.

Postavlja se sada pitanje kako analitički karakterizirati pramen kružnica.

Neka su $k_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2$ temeljne kružnice pramena. Promotrimo jednadžbu

$$\lambda_1 k_1(x, y) + \lambda_2 k_2(x, y) = 0, \quad (19)$$

gdje su λ_1, λ_2 realni parametri. Tvrdimo da je (19) **jednadžba pramena**, tj. da za svaki uređeni par (λ_1, λ_2) jednadžba (19) određuje kružnicu i da ta kružnica pripada pramenu, tj. potencijala nje i bilo koje kružnice pramena podudara se s potencijalom kružnica k_1 i k_2 , a ta druga očito pripada pramenu (dovoljno je u (19) staviti $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$). Dokažimo to. U tu svrhu uzmimo da je

$$k_i(x, y) = (x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 - r_i^2 = 0, \quad i = 1, 2 \quad (20)$$

i pretpostavimo da kružnice nisu koncentrične tj. da je ili $p_1 - p_2 \neq 0$ ili $q_1 - q_2 \neq 0$. Uvrstimo li (20) u (19), nakon sređivanja dobivamo

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(x^2 + y^2) - 2(p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2)x - 2(q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2)y - \lambda_1 r_1^2 - \lambda_2 r_2^2 = 0. \quad (21)$$

Odavde razabiremo da je za $\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0$ jednadžba (21) jednadžba nekog pravca, a iz (19) da taj pravac ima jednadžbu $k_1(x, y) - k_2(x, y) = 0$, to je potencijala kružnica k_1 i k_2 . Iz toga razmatranja slijedi da je to *jedini pravac* koji se iz (19) dobije specifikacijom parametara λ_1 i λ_2 . Iz (21) dalje slijedi da je za $\lambda_1 \neq -\lambda_2$ (19) uvijek jednadžba neke kružnice i možemo uzeti da je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Treba vidjeti da oña pripada pramenu. U tu je svrhu dovoljno provjeriti da jedna od temeljnih kružnica i bilo koja kružnica pramena imaju istu potencijalu kao i temeljne kružnice pramena. Uzmimo da je sada $k(x, y) = (1 - \lambda)k_1(x, y) + \lambda k_2(x, y) = 0$ bilo koja kružnica pramena gdje je $\lambda \neq 0, 1$. Potencijala te kružnice i kružnice k_1 je pravac koji ima jednadžbu $k(x, y) - k_1(x, y) = 0$, tj.

$$\lambda[k_2(x, y) - k_1(x, y)] = 0. \quad (22)$$

Očito je (22) jednadžba potencijale kružnica k_1 i k_2 .

Navedimo sada jedno svojstvo pramena.

PROPOZICIJA 5. *Svakom točkom ravnine prolazi jedna i samo jedna kružnica zadánog pramena.*

Dokaz. Neka je (19) jednadžba pramena i $T = (x_0, y_0)$ bilo koja točka ravnine. Treba pokazati da je moguće odrediti parametre λ_1^0 i λ_2^0 tako da je $\lambda_1^0 k_1(x, y) + \lambda_2^0 k_2(x, y) = 0$ jednadžba kružnice koja prolazi točkom T . U tu svrhu uvrstimo x_0, y_0 u (19). Dobivamo

$$\lambda_1 k_1(x_0, y_0) + \lambda_2 k_2(x_0, y_0) = 0.$$

Pretpostavimo da T ne leži ni na k_1 ni na k_2 (jer tada nemamo što dokazivati). Tada je specijalno $k_1(x_0, y_0) \neq 0$, pa iz prethodne jednadžbe slijedi

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{k_2(x_0, y_0)}{k_1(x_0, y_0)}.$$

Stavimo li $\lambda_1^0 = -k_2(x_0, y_0)$, $\lambda_2^0 = k_1(x_0, y_0)$, tada ove vrijednosti uvrštene (19) daju

$$-k_2(x_0, y_0)k_1(x, y) + k_1(x_0, y_0)k_2(x, y) = 0.$$

Dobili smo kružnicu pramena koja očito prolazi točkom $T = (x_0, y_0)$, a da se u to uvjerimo, dovoljno je u prethodnu jednakost uvrstiti $x = x_0$, $y = y_0$ i odmah se vidi da je ta jednadžba zadovoljena. ■

Napomena 1. Uočite da svaki uređeni par (λ_1, λ_2) realnih brojeva određuje jedinstvenu kružnicu pramena, ali to pridruženje nije bijektivno. Naime, lako se vidi da parovi (λ_1, λ_2) , $(a\lambda_1, a\lambda_2)$, $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$ određuju istu kružnicu pramena. Da se to

izbjegne, postupa se kao i kod pramena pravaca, tj. uvodi se umjesto dva parametra jedan parametar sa $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$, pa u tom obliku jednadžba pramena glasi

$$k_1(x, y) + \lambda k_2(x, y) = 0. \quad (23)$$

Uočimo da su jednadžbom (23) obuhvaćene sve kružnice pramena osim kružnice $k_2(x, y) = 0$. Ona se ne može dobiti nikakvom specifikacijom parametra λ . U tom bi, naime, slučaju trebalo uzeti $\lambda = \infty$.

Primjer 13. Kako glasi jednadžba kružnice koja prolazi sjecištima kružnica $k_1(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0$, $k_2(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ i ishodištem?

Rješenje. Najprije se lako verificira da se kružnice zaista sijeku. Tražena kružnica je ona kružnica pramena $k_1(x, y) + \lambda k_2(x, y) = 0$ koja prolazi ishodištem. Jednadžba pramena glasi

$$(1 + \lambda)(x^2 + y^2) + 2(\lambda - 3)x + 2(2\lambda - 5)y - 15 - 20\lambda = 0.$$

Kružnica tog pramena prolazi ishodištem ako i samo ako je $-15 - 20\lambda = 0$, tj. $\lambda = -\frac{3}{4}$. Ako to uvrstimo u prethodnu jednadžbu, dobit ćemo $x^2 + y^2 - 30x - 52y = 0$, što je jednadžba tražene kružnice. ■

§ 5. Elipsa

5.1. Jednadžba elipse

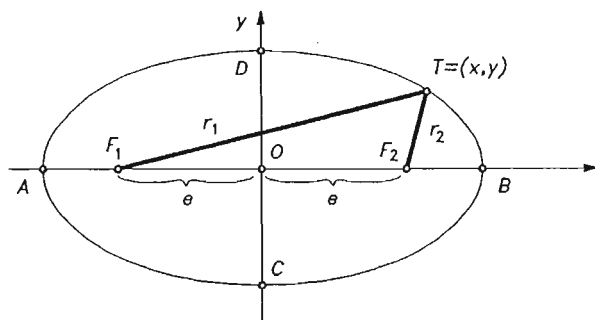
Neka su F_1 i F_2 dvije različite čvrste točke ravnine M i neka je $|F_1 F_2| = 2e$, te neka je $a > 0$ zadani realan broj $a > e$. **Elipsa** je skup točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od točaka F_1 i F_2 konstantan i jednak $2a$. Dakle, radi se o skupu točaka E definiranim sa

$$E = \left\{ T \in M \mid |F_1 T| + |F_2 T| = 2a \right\}.$$

Točke F_1 i F_2 zovemo **žarištima** ili **fokusima** elipse. Postavlja se pitanje kako glasi jednadžba elipse, tj. algebarska jednadžba u dvije varijable koja ima svojstvo da je zadovoljavaju koordinate svake točke elipse i obrnuto ako koordinate neke točke zadovoljavaju tu jednadžbu, onda točka leži na elipsi, tj. pripada skupu E .

Neka su dane točke F_1 i F_2 i odaberimo pravokutni koordinatni sustav tako da te točke leže na osi x i da je polovište O dužine $\overline{F_1 F_2}$ ishodište sustava (sl. 270). Fokusi F_1 i F_2 tada imaju koordinate $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$. Neka je $T = (x, y)$ bilo koja točka elipse. Dužine $\overline{F_1 T}$ i $\overline{F_2 T}$ zovemo **radijvektorima** točke T (iako to nisu vektori). Označimo $|F_1 T| = r_1$, $|F_2 T| = r_2$. Očito je $r_1 = \sqrt{(x + e)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - e)^2 + y^2}$. Kako T leži na elipsi, to je $r_1 + r_2 = 2a$, tj.

$$\sqrt{(x + e)^2 + y^2} + \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a. \quad (1)$$



Sl. 270.

Pomnožimo li (1) sa $\sqrt{(x+e)^2+y^2} - \sqrt{(x-e)^2+y^2}$, dobit ćemo, nakon lakog računa, da je

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} - \sqrt{(x-e)^2+y^2} = \frac{2ex}{a}. \quad (2)$$

Zbrajanjem (1) i (2) slijedi

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} = a + \frac{e}{a}x,$$

a odavde kvadriranjem

$$(x+e)^2 + y^2 = a^2 + 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2,$$

odnosno

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1.$$

Kako je $a > e$, to je $a^2 > e^2$, pa možemo uvesti oznaku $a^2 - e^2 = b^2$. Tada se prethodna jednadžba može pisati u obliku

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Dakle, ako točka $T = (x, y)$ leži na elipsi, onda njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu (3).

Pokazat ćemo da je (3) jednadžba elipse, tj. ako koordinate neke točke $T = (x, y)$ zadovoljavaju jednadžbu (3), onda T leži na elipsi.

U tu svrhu uzmimo točke $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$ i neka je $T = (x, y)$ točka čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu (3). Uz oznaku $|F_i T| = r_i$, $i = 1, 2$, tada vrijedi $r_1 = \sqrt{(x+e)^2+y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-e)^2+y^2}$. Iz (3) je $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, pa slijedi

$$r_1 = \sqrt{x^2 + 2ex + e^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)},$$

odnosno

$$r_1 = \sqrt{e^2 + b^2 + 2ex + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2}.$$

Kako je $b^2 = a^2 - e^2$, to je $a^2 - b^2 = e^2$ i $e^2 + b^2 = a^2$, pa se prethodna jednakost može napisati u obliku

$$r_1 = \sqrt{a^2 + 2ex + \frac{e^2}{a^2} x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{e}{a}x\right)^2},$$

dakle

$$r_1 = \left| a + \frac{e}{a}x \right|.$$

Na isti se način dobiva da je

$$r_2 = \left| a - \frac{e}{a}x \right|.$$

Kako je $0 < e < a$ i $|x| \leq a$, to je

$$a + \frac{e}{a}x > 0, \quad a - \frac{e}{a}x > 0,$$

pa konačno dobivamo

$$r_1 = a + \frac{e}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{e}{a}x.$$

Uz oznaku

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \quad (4)$$

slijedi

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x. \quad (5)$$

Zbrajanjem jednakosti (5) dobivamo $r_1 + r_2 = 2a$, pa točka T zaista leži na elipsi.

Dakle, (3) je zaista jednadžba elipse.

Realan broj e zove se **linearni ekscentricitet** elipse, a realan broj ε definiran sa (4) **numerički ekscentricitet** elipse. Kako je $e < a$, to je uvijek $0 < \varepsilon < 1$. Jednadžba (3) zove se **kanonska jednadžba elipse**, a uobičajeno je još pisati je u obliku $b^2x^2 + y^2a^2 = a^2b^2$.

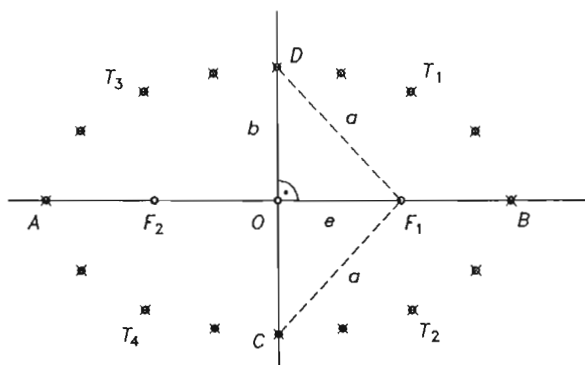
Iz (3) razabiremo da je elipsa centralno simetričan skup točaka (centralno simetrična krivulja) i centar simetrije je u ishodištu O koordinatnog sustava. Stoga se točka O zove još i **središte** ili **centar** elipse, a jednadžba (3) još i **središnja** ili **centralna** jednadžba elipse. Pogledajmo u kojim točkama elipsa siječe koordinatne osi. Sjecišta sa x osi dobivamo tako da u (3) stavimo $y = 0$, pa vidimo da elipsa siječe os x u točkama $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$. Dužina \overline{AB} zove se **glavna (velika)** os elipse, a dužine \overline{OA} i \overline{OB} **glavne (velike) poluosi**. Na isti način iz (3) slijedi da elipsa siječe os y u točkama $C = (0, -b)$, $D = (0, b)$. Dužina \overline{CD} zove se **sporedna (mala)** os elipse, a dužine \overline{OC} i \overline{OD} **sporedne (male) poluosi**.

Duljina tetive koja prolazi jednim od fokusa elipse i okomita je na glavnu os zove se **parametar elipse** i označava sa $2p$. Stavimo li u (3) $x = e$ i $y = p$, dobivamo za **poluparametar** vrijednost

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (6)$$

Iz (3) dalje razabiremo ako je $a = b$, onda je (3) jednadžba središnje kružnice polumjera $r = a$. Dakle, kružnicu možemo shvatiti kao poseban slučaj elipse kojoj su duljine osi jednake. Tada se može reći (zbog $e^2 = a^2 - b^2$) da je kružnica elipsa linearnog ekscentriciteta $e = 0$. Oдавде i naziv ekscentricitet, jer nam on mjeri "koliko elipsa odstupa" od kružnice. Iz (4) slijedi da je kružnica elipsa numeričkog ekscentriciteta $\epsilon = 0$.

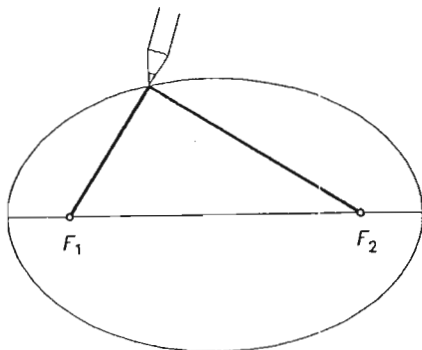
Ako su nacrtani fokusi elipse i zadana duljina velike osi, onda možemo konstruirati po volji mnogo točaka elipse ovako. Spojimo F_1 i F_2 i neka je O polovište od F_1F_2 . Na pravcu F_1F_2 leži velika os elipse, a mala na okomici kroz O na F_1F_2 (sl. 271). Nacrtajmo dužinu PQ tako da je $|PQ| = 2a$. Uzmimo sada u šestar dužinu



Sl. 271.

$\frac{|PT|}{|PT|}$, $|PT| > \frac{1}{2}|PQ|$ i oko točke F_1 kao središta opišimo luk kružnice polumjera $|PT|$, oko F_2 luk kružnice polumjera $|TQ|$. Ta se dva luka sijeku u točkama T_1 i T_2 elipse. Iz konstrukcije je jasno da je $|F_1T_1| + |F_2T_2| = |PT| + |TQ| = 2a$, pa su T_1 i T_2 zaista točke elipse kojoj su fokusi u F_1 i F_2 , a glavna joj je poluos jednaka a . Ako sada s istim polumjerom $|PT|$ opišemo luk kružnice oko F_2 , a polumjerom $|TQ|$ oko F_1 , dobijemo još dvije točke T_3 i T_4 elipse. Na sl. 271. konstruirano je 12 točaka elipse. Tjemena A i B dobiju se tako da se oko O opiše kružnica polumjera a , ona siječe pravac F_1F_2 u točkama A i B . Ostala dva tjemena dobiju se tako da se oko F_1 (ili F_2) opiše luk kružnice polumjera a . Zbog $e^2 = a^2 - b^2$ je $|OC| = |OD| = b$, pa su točke C i D tjemena na maloj osi. Pošto smo nacrtali dovoljan broj točaka, elipsa se može izvući krivuljarom.

Postoji još jedna konstrukcija elipse kojom se služe vrtlari, to je tzv. vrtlarska konstrukcija elipse. U zemlju se zabodu dva kolčića na mjestima F_1 i F_2 i uzme nerastegljiva nit duljine $2a > |F_1F_2|$, zatim se zašiljeni kolčić postavi između F_1 i



Sl. 272.

F_2 i napne nit. Ako kolčić gibamo tako da nit bude stalno napeta, onda njegov šiljak opisuje na zemljištu brazdu koja ima oblik elipse (sl. 272).

Primjer 1. Kako glasi jednadžba elipse kojoj je duljina male poluosi $b = 3$ i numerički ekscentricitet $\epsilon = \sqrt{2}/2$.

Rješenje. Prema (4) je

$$\epsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

odnosno

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Kvadriranjem odavde dobivamo $a^2 = 2b^2$, dakle $a^2 = 18$. Jednadžba elipse prema (4) dakle glasi

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

ili $9x^2 + 18y^2 - 162 = 0$. ■

Primjer 2. Odredite žarišta, numerički ekscentricitet i poluparametar elipse $4x^2 + 9y^2 = 16$.

Rješenje. Poluosi određujemo tako da jednadžbu elipse svedemo na kanonski oblik. U tu je svrhu dijelimo sa 16, i dobit ćemo

$$\frac{x^2}{4} + \frac{9y^2}{16} = 1,$$

odnosno

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{16}{9}} = 1.$$

Usporedba s kanonskim oblikom daje $a^2 = 4$ i $b^2 = \frac{16}{9}$, dakle $a = 2$, $b = \frac{4}{3}$. Iz $e^2 = a^2 - b^2$ slijedi $e^2 = 4 - \frac{16}{9} = \frac{20}{9}$, pa je $e = \frac{2}{3}\sqrt{5}$. Žarišta su, dakle, u točkama $F_1 = (-\frac{2}{3}\sqrt{5}, 0)$, $F_2 = (\frac{2}{3}\sqrt{5}, 0)$. Numerički je ekscentricitet jednak $\epsilon = \frac{e}{a}$, dakle $\epsilon = \frac{1}{3}\sqrt{5}$, a poluparametar $p = \frac{b^2}{a}$, dakle $p = \frac{8}{9}$. ■

Primjer 3. Dokažite da su elipse, kod kojih se mala os vidi iz žarišta pod pravim kutom, homotetične.

Rješenje. Ako se mala os vidi iz žarišta pod pravim kutom, onda je zbog simetričnosti elipse očito $e = b$, pa iz $e^2 = a^2 - b^2$ slijedi $a^2 = 2b^2$. Dakle sve takve elipse imaju kanonsku jednadžbu oblika

$$\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Neka je

$$\frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

druga elipsa koja ima to svojstvo. Treba pokazati da postoji homotetija koja jednu od njih (recimo prvu) preslikava na drugu. U tu svrhu dovoljno je uzeti homotetiju s centrom u ishodištu i koeficijentom $\frac{c}{b}$, gdje je $c = \sqrt{c^2}$. Njezin analitički zapis glasi $x' = \frac{c}{b}x$, $y' = \frac{c}{b}y$. Da je to homotetija, vidi se ovako: preslikavanje određeno ovim jednakostima

točki $T = (x, y)$ pridružuje točku $T' = (x', y')$ tako da je $\overrightarrow{OT'} = \frac{c}{b}\overrightarrow{OT}$, pa se doista radi o homotetiji s centrom u ishodištu i koeficijentom $k = \frac{c}{b}$. Iz analitičkog zapisa homotetije slijedi da je $x = \frac{b}{c}x'$, $y = \frac{b}{c}y'$. Kako točka (x, y) leži na prvoj elipsi, to vrijedi

$$\frac{b^2}{c^2}(x')^2 + \frac{b^2}{b^2}(y')^2 = 1,$$

odnosno

$$\frac{(x')^2}{2c^2} + \frac{(y')^2}{c^2} = 1,$$

pa slike točaka (x, y) leže na krivulji

$$\frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1,$$

dakle na drugoj elipsi, pa su one homotetične. ■

Primjer 4. Dužina \overline{MN} duljine $|MN| = a + b$ giba se u ravnini tako da se točka M giba duž pozitivne osi y , a točka N uzduž pozitivne osi x . Pokažite da točka T dužine \overline{MN} takva da je $|MT| = a$ i $|NT| = b$, opisuje pri tom gibanju luk elipse.

Rješenje. Neka je $T = (x, y)$ (sl. 273). Označimo projekcije točke T na osi x i y redom sa T' i T'' . Tada je $|TT''| = x$ i $|TT'| = y$. Kako je $\triangle MT''T \sim \triangle MON$ i $\triangle TT'N \sim \triangle MON$, to vrijedi

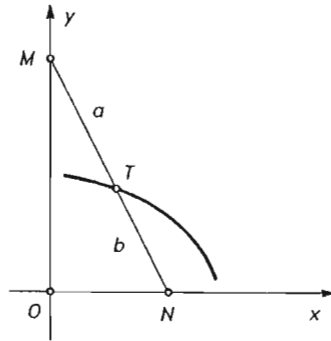
$$\frac{x}{a} = \frac{|ON|}{a+b}, \quad \frac{y}{b} = \frac{|OM|}{a+b}.$$

Kvadrirajmo i zbrojimo dobivene jednadžbe, pa je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{|ON|^2 + |OM|^2}{(a+b)^2}.$$

Po Pitagorinu poučku je $|ON|^2 + |OM|^2 = (a+b)^2$, pa iz prethodne jednadžbe slijedi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



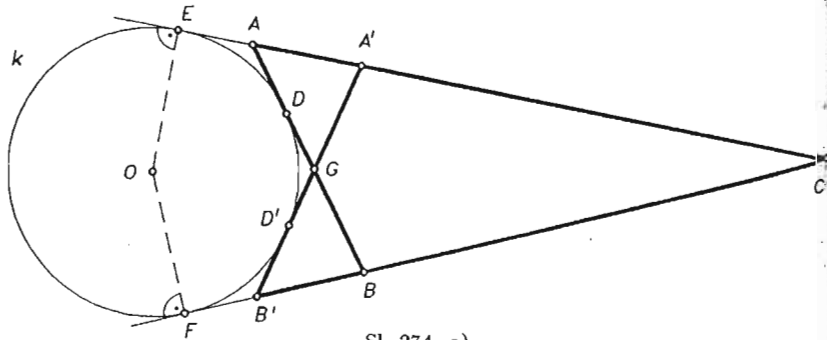
Sl. 273.

i točka T zaista opisuje luk elipse kojoj je duljina velike poluosi a , a male b . ■

Primjer 5. Znamo da je elipsa potpuno određena fokusima i jednom točkom na njoj. Neka su sada A, B dvije točke na elipsi s fokusima F_1, F_2 . Neka su F'_1 i F'_2 presjecišta pravaca AF_1, BF_1 i AF_2, BF_2 redom. Dokažite da tada A i B leže na nekoj elipsi s fokusima F'_1 i F'_2 .

Rješenje. Analitičko rješenje prepuštamo čitatelju (usp. primjer 3. u §6. Hiperbola). Mi ćemo dati sasvim geometrijsko rješenje. Prvo nam trebaju dvije geometrijske tvrdnje.

Tvrdnja 1. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dva trokuta istog opsega $2s$ položeni kao na sl. 274a. Tada oni imaju zajedničku pripisanu kružnicu k nasuprot vrhu C . (Vrijedi i obrat.)

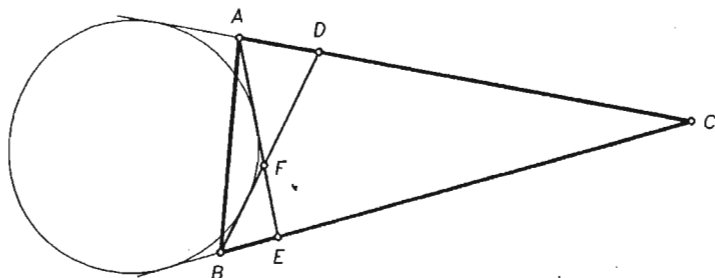


Sl. 274. a)

Dalje, $|CA| + |AD| = |CB| + |BD| = |CA'| + |A'D'| = |CB'| + |B'D'| = s$, gdje su D i D' dirališta od AB i $A'B'$ kružnice k .

Dokaz tvrdnje 1. Neka su E i F točke na CA, CB redom, tako da je $|CE| = |CF| = s$. Neka je k kružnica čije je središte presjek okomica u E i F na CA odnosno CB , a radijusa $|DE|$. Tada se lako vidi da je k pripisana kružnica trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, pa odatle lako slijede i navedene jednakosti. ■

Tvrđnja 2. Neka je $\triangle ABC$ bilo koji trokut, a D, E točke na dužinama $\overline{AC}, \overline{BC}$ redom, tako da je $|AD| + |AE| = |BD| + |BE|$. Tada je $|AC| + |AF| = |BC| + |BF|$, gdje je $F = AE \cap BD$ (sl. 274b).



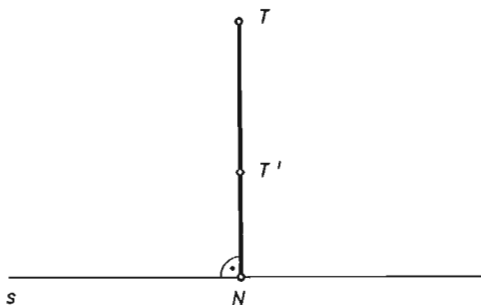
Sl. 274. b)

Dokaz tvrdnje 2. Iz $|AD| + |AE| = |BD| + |BE|$ dodavanjem $|CD| + |CE|$ slijedi da trokuti $\triangle AEC$ i $\triangle BDC$ imaju jednake opsege. Stoga, prema tvrdnji 1, imaju zajedničku pripisanu kružnicu, pa tvrdnja 2. lagano slijedi.

Sada tvrdnja iz primjera slijedi odmah iz tvrdnje 2, pri čemu ulogu od F_1 i F_2 imaju D i E , a ulogu od F'_1 i F'_2 točke F i C . ■

5.2. Elipsa kao kontrakcija kružnice

Neka je s bilo koji pravac ravnine i $0 < k < 1$ realan broj. Svakoj točki T ravnine pridružit ćemo točku T' . Naime, označimo sa N nožište okomice spuštene iz T na s i neka je T' ona točka dužine \overline{TN} za koju vrijedi $|T'N| = k \cdot |TN|$ (sl. 275). Tako dobiveno preslikavanje ravnine na samu sebe zovemo **kontrakcijom prema pravcu s** . Pravac s zovemo **os kontrakcije**. Realan broj k zovemo **koeficijentom**



Sl. 275.

kontraksije. Očito je svaka kontraksija bijekcija i točke pravca s su fiksne točke kontraksije, i to jedine. Svaki pravac okomit na s kontraksijom se preslikava na samog sebe, pa su, dakle, okomice na s fiksni pravci te transformacije i os s je fiksni pravac, ali on je fiksna točka po točku, dok okomice to nisu.

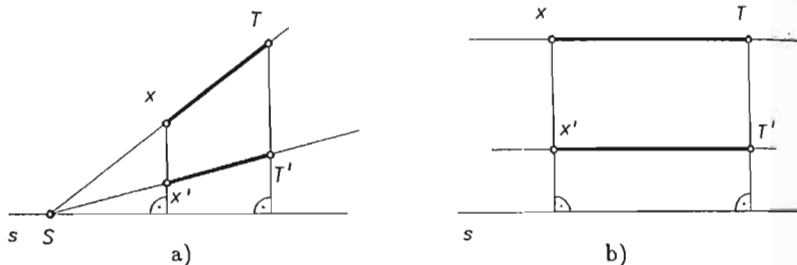
Nadimo koordinatni prikaz kontraksije. U tu svrhu uzmimo da je os x os kontraksije i neka je $T = (x, y)$ bilo koja točka ravnine, k koeficijent kontraksije i $T' = (x', y')$ slika od T . Traži se veza između koordinata tih točaka. Očito je ta veza dana sa

$$x' = x, \quad y' = ky. \quad (7)$$

Kontraksija preslikava pravce ravnine opet na pravce te iste ravnine. Zaista, uzmimo pravac $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. Iz (7) je

$$x = x', \quad y = \frac{1}{k}y'. \quad (8)$$

Ako točka $T = (x, y)$ leži na pravcu, onda vrijedi $Ax' + \frac{B}{k}y' + C = 0$, tj. $Akx' + By' + Ck = 0$ pa dakle njezina slika $T' = (x', y')$ leži na pravcu $Akx + By + Ck = 0$, to je zaista pravac, jer $A^2 + B^2 \neq 0$ povlači da je i $A^2k^2 + B^2 \neq 0$. Dakle, pravac se



Sl. 276.

preslikava u pravac. Dalje, iz definicije kontraksije je jasno da je sjecište pravca s osi kontraksije ujedno i sjecište njegove slike s tom osi. Ako je pravac paralelan s osi kontraksije, onda je $B = 0$, pa se on preslikava u pravac paralelan s osi kontraksije. Očito je svaka kontraksija određena s osi s i koeficijentom kontraksije, ali ona je određena i s osi s i parom T i T' pridruženih točaka. Zaista neka je zadana os s i par T, T' pridruženih točaka. Treba pokazati da je tada za svaku točku X ravnine moguće konstruirati njezinu sliku X' . U tu svrhu spojimo T sa X i označimo sa S sjecište pravca TX s osi s (sl. 276.a). Kako je S fiksna točka kontraksije, to se pravac TX preslikava na pravac $T'S$, pa slika od X mora ležati na tom pravcu, a kako X i njezina slika X' moraju ležati na pravcu okomitom na s , to okomica na s , povučena točkom X , siječe $T'S$ u točki X' . Ako je pravac TX paralelan s osi s , onda je njegova slika također paralelna sa s . Kako izgleda konstrukcija u ovom slučaju vidi se na slici. 276.b.

O kontraktibilnoj slici kružnice govori sljedeća propozicija.

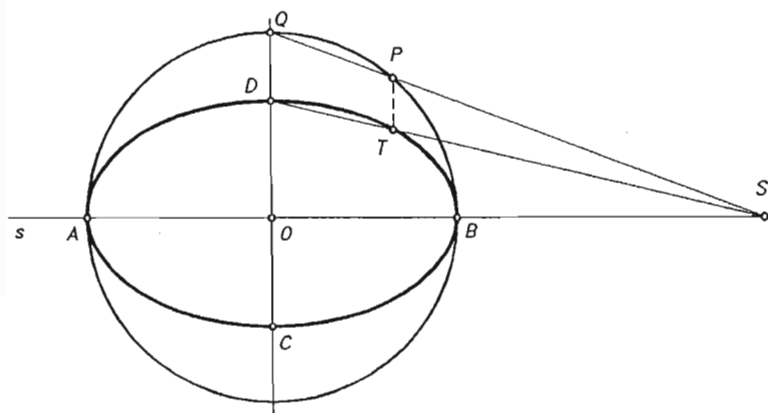
PROPOZICIJA 1. Kontraktibilna slika kružnice polumjera a , kojoj je os na osi kontrakcije, elipsa je, kojoj je središte u središtu kružnice s velikom poluosi a i malom poluosi $b = ka$, gdje je k koeficijent kontrakcije.

Dokaz. Neka je os x os kontrakcije, k njezin koeficijent i neka je dalje središte kružnice u ishodištu koordinatnog sustava. Njezina jednadžba tada glasi $x^2 + y^2 = a^2$, a jednadžba njezine slike (prema (8)) $(x')^2 + \frac{(y')^2}{k^2} = a^2$, odnosno $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{a^2 k^2} = 1$. Dakle, kružnica se preslikava u elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 k^2} = 1$ s poluosima a i $b = ka$. ■

Ova propozicija nam omogućuje da riješimo određene konstruktivne zadatke u vezi s elipsom. Ilustrirajmo to na primjerima.

Primjer 6. Nacrtna je velika os \overline{AB} elipse i jedna njezina točka T . Konstruirajte malu os \overline{CD} te elipse.

Rješenje. Uzet ćemo kontrakciju kojoj je pravac $s = AB$ os. Neka je O polovište od \overline{AB} . Oko O kao središta opišemo kružnicu kroz A (sl. 277) i točkom T povucimo okomicu na s . Ta okomica siječe gornju polukružnicu u točki P .



Sl. 277.

Prema propoziciji 1. kontrakcija kojoj je s os i koja točku P preslikava u T preslikat će kružnicu u elipsu kojoj je \overline{AB} velika os i koja prolazi točkom T . Mala os elipse ležat će na pravcu kroz O okomitom na s . Neka taj pravac siječe gornju polukružnicu u točki Q . Slika D točke Q bit će tada tjeme na maloj osi. Da nađemo točku D , povucimo pravac QP do njegova sjecišta S s osi s . Tada pravac ST siječe pravac OQ u tjemenu D . Tjeme C je simetrično tjemenu D s obzirom na S . ■

Više o konstruktivnim zadacima u vezi s kontrakcijom vidite u prvom dijelu str. 327.

5.3. Tangenta elipse. Zrcalna svojstva elipse. Pol i polara

Nadimo analitički uvjet da pravac $y = kx + l$ bude tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, tj. da on s elipsom ima samo jednu zajedničku točku. Sjecišta pravca s elipsom određujemo tako da riješimo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} y &= kx + l, \\ b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2. \end{aligned}$$

Uvrstimo li y iz prve jednadžbe u drugu, dobit ćemo, nakon sređivanja,

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2k lx + a^2l^2 - a^2b^2 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe dana su sa

$$x_{1,2} = -\frac{1}{a^2k^2 + b^2} \left(a^2kl \pm ab\sqrt{a^2k^2 + b^2 - l^2} \right). \quad (9)$$

Uvrštenje u prvu jednadžbu sustava daje

$$y_{1,2} = \frac{1}{a^2k^2 + b^2} \left(b^2l \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2 - l^2} \right). \quad (10)$$

Iz (9) i (10) slijedi da će pravac $y = kx + l$ biti tangenta elipse ako i samo ako je

$$a^2k^2 + b^2 = l^2. \quad (11)$$

Jednakost (11) zovemo **uvjetom dodira pravca i elipse**, tj. uvjetom da je pravac tangenta elipse.

Iz (9) i (10) slijedi da pravac siječe elipsu ako je $a^2k^2 + b^2 > l^2$, a nema s njome zajedničkih točaka ako je $a^2k^2 + b^2 < l^2$.

Nadimo jednadžbu tangente elipse ako je zadano njezino diralište $D = (x_1, y_1)$. Iz (9) i (10) zbog (11) slijedi $x_1 = -\frac{ka^2}{l}$, $y_1 = \frac{b^2}{l}$, a odavde je $k = -\frac{x_1l}{a^2}$, $l = \frac{b^2}{y_1}$. Iz ovih je jednadžbi

$$k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}. \quad (12)$$

Relacijom (12) određen je koeficijent smjera tangente elipse ako je zadano diralište.

Uvrstimo li (12) i $l = \frac{b^2}{y_1}$ u $y = kx + l$, dobit ćemo

$$y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x + \frac{b^2}{y_1},$$

a odavde je

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1, \quad (13)$$

ili

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0. \quad (13')$$

Jednadžba (13) je segmentni oblik jednadžbe tangente elipse, a (13') njezin opći oblik.

Dakako da se jednadžba tangente može izvesti i pomoću diferencijalnog računa, ali se mi time nećemo ovdje baviti.

Primjer 7. U sjecištima pravaca $y = \pm x$ i elipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ povučene su tangente. Odredite površinu četverokuta određenog tim tangentama.

Rješenje. Uvrstimo li $y = \pm x$ u jednadžbu elipse, dobit ćemo njezina sjecišta s tim pravcima. Dobiva se $b^2 x^2 + a^2 x^2 = a^2 b^2$. Odavde je

$$x_{1,2} = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_{1,2} = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

dakle četiri sjecišta. Zbog simetrije je dovoljno naći tangentu u točki

$$D_1 = \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Prema (13') jednadžba te tangente glasi

$$b^2 \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + a^2 \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} y = a^2 b^2,$$

odnosno

$$\frac{x}{\frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{b}} + \frac{y}{\frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{a}} = 1.$$

Očito je četverokut omeđen tangentama romb. Duljine njegovih dijagonala su dvostruki segmenti tangente na koordinatnim osima. Iz prethodne jednadžbe slijedi da su duljine tih dijagonala jednake

$$d_1 = \frac{2a\sqrt{a^2 + b^2}}{b}, \quad d_2 = \frac{2b\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

pa je površina romba jednaka

$$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = 2(a^2 + b^2). \quad \blacksquare$$

Primjer 8. Neka je k kružnica, t tangenta na k s diralištem D a $f: M \rightarrow M$ kontrakcija ravnine prema pravcu koji prolazi središtem kružnice. Dokažite da je tada $f(t)$ tangenta elipse $f(k)$ s diralištem u točki $f(D)$.

Rješenje. Uzmimo da je os kontrakcije os x koordinatnog sustava, λ koeficijent kontrakcije, te neka kružnica k ima jednadžbu $x^2 + y^2 = a^2$, a njezina tangenta s diralištem $D = (x_1, y_1)$ jednadžbu $x_1 x + y_1 y = a^2$. Prema (8) (v. dokaz propozicije 1) kružnica k se preslikava u elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \lambda^2} = 1$, a tangenta te kružnice u pravac $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y / \lambda}{a^2 \lambda^2} = 1$, dakle u tangentu elipse s diralištem u točki $D'(x_1, \frac{1}{\lambda} y_1)$, a prema (7) D' je upravo slika točke D pri toj kontrakciji. \blacksquare

Napomena. Ovim su opravdane konstrukcije navedene u prvom dijelu, III, §7, str. 330.

Primjer 9. Dokažite da je produkt udaljenosti bilo koje tangente elipse od njezinih fokusa konstantan i jednak kvadratu male poluso.

Rješenje. Neka je $b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2 = 0$ bilo koja tangenta elipse. Normalni oblik jednadžbe tangente glasi

$$\frac{b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}} = 0,$$

pa su udaljenosti d_1 i d_2 dva fokusa $F_1 = (-e, 0)$ i $F_2 = (e, 0)$ od tog pravca dane sa

$$d_1 = \frac{|-b^2ex_1 - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}, \quad d_2 = \frac{|b^2ex_1 - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}.$$

Kako diralšte $D = (x_1, y_1)$ leži na elipsi, to je $a^2y_1^2 = a^2b^2 - b^2x_1^2$, pa iz gornjih jednakosti zbog $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, slijedi

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{|a^4b^4 - b^4(a^2 - b^2)x_1^2|}{b^4x_1^2 + a^2(a^2b^2 - b^2x_1^2)} = \frac{|b^4(a^4 - a^2x_1^2 + b^2x_1^2)|}{b^2(b^2x_1^2 + a^4 - a^2x_1^2)}.$$

Dakle je $d_1 \cdot d_2 = b^2$. ■

Za točku T kažemo da je **unutarnja (unutrašnja) točka elipse** ako svaki pravac kroz T siječe elipsu u dvije različite točke. Točka koja nije unutarnja točka elipse i ne leži na njoj zove se **vanjska točka elipse**. Skup svih unutarnjih točaka zovemo **nutrinom elipse**, a skup svih vanjskih njenom **vanjštinom**. Vrijedi

PROPOZICIJA 2. Točka $T = (x_0, y_0)$ unutarnja je točka elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ako i samo ako vrijedi $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 < 0$.

Dokaz. Svaki pravac kroz $T = (x_0, y_0)$ dopušta parametarsko predočenje oblika

$$x = x_0 + \lambda_1 t, \quad y = y_0 + \lambda_2 t, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0.$$

Parametri λ_1 i λ_2 , koji određuju sjecišta tog pravca s elipsom rješenja su jednadžbe

$$(b^2\lambda_1^2 + a^2\lambda_2^2)t^2 + 2(b^2\lambda_1x_0 + a^2\lambda_2y_0)t + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Diskriminanta D ove kvadratne jednadžbe dana je sa

$$\frac{1}{4}D = (b^2\lambda_1x_0 + a^2\lambda_2y_0)^2 - (b^2\lambda_1^2 + a^2\lambda_2^2) \cdot (b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2).$$

Svi pravci kroz T sijeći će elipsu u dvije različite točke ako i samo ako za sve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ vrijedi $D > 0$, pa iz prethodne jednakosti slijedi da je to samo onda ako vrijedi $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 < 0$. Vanjske točke elipse su očito karakterizirane sa $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 > 0$. ■

Primjer 10. Pokažite da su fokusi i središte unutarnje točke elipse.

Rješenje. Uzmimo fokus $F_1 = (-e, 0)$. Treba vidjeti da je $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 < 0$ za $x_0 = -e, y_0 = 0$. Imamo redom $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = b^2e^2 - a^2b^2 = b^2(e^2 - a^2) = b^2(a^2 - b^2 - a^2) = -b^4 < 0$ i F_1 je unutarnja točka elipse. Da je središte unutarnja točka elipse slijedi iz $-a^2b^2 < 0$. ■

PROPOZICIJA 3. Iz vanjske točke elipse mogu se povući točno dvije tangente na elipsu.

Dokaz. Pravac $y = kx + l$ je tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, onda i samo onda ako vrijedi $a^2k^2 + b^2 = l^2$. Neka je $T = (x_0, y_0)$ vanjska točka elipse, tj.

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 > 0. \quad (14)$$

Kako $T = (x_0, y_0)$ leži na spomenutom pravcu, to je

$$l = y_0 - kx_0.$$

Iz uvjeta dodira i ove jednakosti slijedi da je

$$(a^2 - x_0^2)k^2 + 2x_0y_0k + b^2 - y_0^2 = 0.$$

Točkom T mogu se povući dvije tangente na elipsu ako ova jednadžba ima dva realna različita korijena k_1 i k_2 , tj. ako je njezina diskriminanta $D > 0$. Kako je

$$D = 4x_0^2y_0^2 - 4(a^2 - x_0^2)(b^2 - y_0^2),$$

odnosno

$$D = -4(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2),$$

to iz (14) slijedi da je $D > 0$, i tvrdnja je dokazana. ■

Napomena 1. Pomoću (5) se lako pokazuje da je T unutarnja točka elipse ako i samo ako je $|F_1T| + |F_2T| < 2a$, a vanjska ako je $|F_1T| + |F_2T| > 2a$.

Primjer 11. Kako glase jednadžbe tangenata povučениh iz točke $T = (-5, 4)$ na elipsu $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$?

Rješenje. Uvjet da pravac $y = kx + l$ dira elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ glasi $a^2k^2 + b^2 = l^2$. U našem je slučaju

$$25k^2 + 4 = l^2. \quad (*)$$

Kako točka $T = (-5, 4)$ leži na pravcu to je $4 = -5k + l$, odnosno $l = 4 + 5k$. Ako to uvrstimo u (*), dobivamo $25k^2 + 4 = (4 + 5k)^2$, odnosno $40k + 12 = 0$, dakle $k = -\frac{3}{10}$.

Sada se iz $l = 4 + 5k$ dobiva $l = \frac{5}{2}$, pa jednadžba tangente glasi $y = -\frac{3}{10}x + \frac{5}{2}$, odnosno $3x + 10y - 25 = 0$. Gdje se izgubila druga tangenta? Kako je velika poluos elipse $a = 5$ i kako je apscisa točke T jednaka -5 , to je pravac $x + 5 = 0$ druga tangenta. Njezin koeficijent smjera nismo mogli dobiti iz uvjeta dodira jer je on neodređen. ■

Primjer 12. Gdje leže sve one točke ravnine iz kojih se elipsa vidi pod pravim kutom?

Rješenje. Neka je $T = (\xi, \eta)$ točka iz koje se elipsa vidi pod pravim kutom, tj. tangente povučene iz te točke na elipsu su međusobno okomite. Ako tangenta $y = kx + l$ prolazi točkom T , onda je $\eta = k\xi + l$, tj.

$$l = \eta - k\xi. \quad (*)$$

Kako je $y = kx + l$ tangenta elipse, to vrijedi i

$$a^2 k^2 + b^2 = l^2.$$

Uvrstimo li (*) u prethodnu jednadžbu i središnje je po k , dobit ćemo

$$(a^2 - \xi^2)k^2 + 2\xi\eta k + b^2 - \eta^2 = 0.$$

Ako su k_1 i k_2 korijeni ove jednadžbe, onda, prema Viéteovoj formuli, slijedi da je

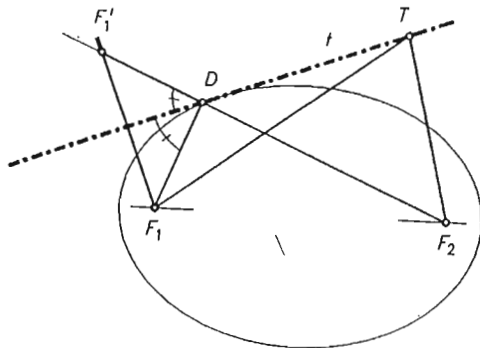
$$k_1 k_2 = \frac{b^2 - \eta^2}{a^2 - \xi^2}.$$

Dakle, tangente će biti okomite ako je $k_1 \cdot k_2 = -1$, odnosno $b^2 - \eta^2 = -a^2 + \xi^2$, tj. ako vrijedi $\xi^2 + \eta^2 = a^2 + b^2$. Dakle, točka T mora ležati na kružnici $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, a to je kružnica sa središtem u ishodištu polunjera $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Očito, to je kružnica opisana pravokutniku koji zatvaraju tjemene tangente elipse. Ta se kružnica zove Mongeova kružnica elipse.

Sada ćemo izvesti neka važna svojstva tangenata elipse.

PROPOZICIJA 4. (Zrcalno svojstvo elipse). Simetrala vanjskog kuta radijvektora $\overline{F_1 D}$, $\overline{F_2 D}$ točke D na elipsi je tangenta elipse s diralištem u D (sl. 278).

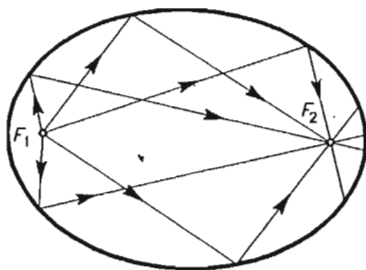
Dokaz. Dakako da treba pretpostaviti da se D ne podudara ni s jednim od tjemena na velikoj osi elipse. U tom slučaju izreka propozicije gubi smisao. Neka je t -simetrala vanjskog kuta radijvektora $\overline{F_1 D}$ i $\overline{F_2 D}$ i F'_1 zrcalna slika od F_1



Sl. 278.

obzirom na t . Tada su očito točke F_2 , D i F'_1 kolinearne. Da pokažemo da je t tangenta, dovoljno je vidjeti da ona, osim D , nema drugih točaka zajedničkih s elipsom. Da to pokažemo, uzmimo na t bilo drugu točku $T \neq D$. Tada vrijedi (prema nejednakosti trokuta i definiciji elipse) $|F_1 T| + |T F_2| = |F'_1 T| + |T F_2| > |F'_1 F_2| = |F'_1 D| + |D F_2| = |F_1 D| + |D F_2| = 2a$, gdje je a duljina velike poluose elipse. Dakle je $|F_1 T| + |F_2 T| > 2a$, a to, prema napomeni iza Propozicije 3, pokazuje da je T vanjska točka elipse. Ovim je tvrdnja dokazana. ■

Napomena 2. Odavde neposredno slijedi da je normala u točki elipse simetrala unutrašnjeg kuta radijvektora te točke. Stoga, ako se u fokusu F_1 nalazi izvor svjetlosti, onda iz ove činjenice slijedi da se zrake reflektiraju na elipsi tako da prolaze drugim fokusom F_2 i obrnuto. To je i razlog zašto se F_1 i F_2 zovu fokusima ili žarištima elipse (sl. 279).



Sl. 279.

Zrcalna slika F'_1 fokusa F_1 s obzirom na tangentu t zove se **suprotište** fokusa F_1 s obzirom na tu tangentu. Analogno se definira suprotište fokusa F_2 . Vrijedi

PROPOZICIJA 5. Skup svih suprotišta jednog fokusa elipse s obzirom na sve njezine tangente je kružnica sa središtem u drugom fokusu. Polumjer te kružnice jednak je velikoj osi elipse.

Dokaz. Dokaz je neposredna posljedica činjenice da su F'_1 , F_2 i D tri kolinearne točke, definicije elipse i činjenice da je $|F_1D| = |DF'_1|$. ■

Kružnica na kojoj leže sva suprotišta fokusa F_1 zove se **kružnica suprotišta s obzirom na fokus F_1** . Analogno se definira kružnica suprotišta s obzirom na fokus F_2 .

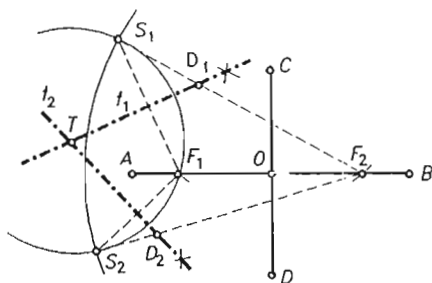
Kružnica suprotišta omogućuje da se iz točke izvan elipse konstruiraju tangente povučene na tu elipsu, kao i tangente elipse paralelne sa zadanim pravcem.

Primjer 13. U ravnini su nacrtane osi elipse i točka T koja je izvan elipse. Konstruirajte tangente povučene iz točke T na tu elipsu.

Rješenje. Neka su \overline{AB} i \overline{CD} osi i O središte elipse. Kružnica radijusa $a = |AO|$ sa središtem u C siječe \overline{AB} u žarištima F_1 i F_2 . Suprotišta S_1 i S_2 žarišta F_1 s obzirom na tražene tangente nalaze se na kružnici suprotišta kojoj je središte u F_2 i polumjer jednak $|AB|$ (sl. 280). Točke S_1 i S_2 se također moraju nalaziti i na kružnici sa središtem u T polumjera $|TF_1|$. Tangenta t_1 je tada okomica spuštena iz T na pravac S_1F_1 , a druga okomica iz T na S_2F_1 daje t_2 . Pravci F_2S_1 i F_2S_2 sijeku tangente t_1 i t_2 u diralištima D_1 i D_2 . ■

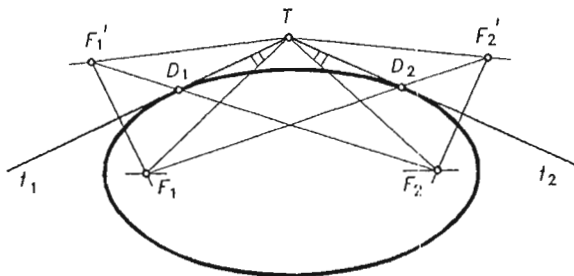
Slično se pomoću kružnice suprotišta konstruiraju i one tangente elipse zadane svojim osima, koje su paralelne sa zadanim pravcem.

Primjer 14. Iz točke T povučene su dvije tangente t_1 i t_2 na elipsu (sl. 281) s diralištima D_1 i D_2 . Dokažite da je $\sphericalangle D_1TF_1 = \sphericalangle D_2TF_2$.



Sl. 280.

Rješenje. Neka su F'_i zrcalne slike od F_i s obzirom na t_i , $i = 1, 2$. Kako je $|TF'_1| = |TF_1|$, $|TF_2| = |TF'_2|$ i $|F'_1F_2| = |F_2F'_1| = 2a$, to je $\triangle TF'_1F_2 \cong \triangle TF_1F'_2$ (S-S-S), pa stoga $\sphericalangle F_1TF'_2 = \sphericalangle F'_1TF_2$. Zbog $\sphericalangle F_1TD_1 = \sphericalangle F'_1TD_1$ i $\sphericalangle F_2TD_2 = \sphericalangle F'_2TD_2$, slijedi $\sphericalangle D_1TF_1 = \sphericalangle D_2TF_2$. ■



Sl. 281.

Drugi način određivanja tangenata povučeni iz vanjske točke elipse na elipsu omogućuje nam pojam pola i polare.

Za zadanu točku $P = (x_0, y_0)$ ($P \neq O$) i elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ pravac

$$p \dots b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0 \quad | \quad (15)$$

zovemo **polarom** od P s obzirom na zadanu elipsu. Točku P zovemo **polom** pravca p . Uočimo da je polara točke elipse tangenta elipse s diralištem u toj točki, tako da je polara u neku ruku poopćenje pojma tangente.

Geometrijsko značenje polare dano je sljedećom propozicijom.

PROPOZICIJA 6. Polara vanjske točke elipse je spojnica dirališta tangenata povučeni iz te točke na elipsu.

Dokaz. Neka su $D_1 = (x_1, y_1)$, $D_2 = (x_2, y_2)$ dirališta tangenata povučeni iz točke $P = (x_0, y_0)$ na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. Tangente elipse kojima su dirališta D_1 i D_2 imaju jednadžbe

$$t_1 \dots b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2 = 0, \quad t_2 \dots b^2x_2x + a^2y_2y - a^2b^2 = 0.$$

Kako točka P leži i na tangenti t_1 i na tangenti t_2 , to vrijedi

$$b^2 x_1 x_0 + a^2 y_1 y_0 - a^2 b^2 = 0, \quad b^2 x_2 x_0 + a^2 y_2 y_0 - a^2 b^2 = 0,$$

a iz tih jednakosti čitamo da točke D_1 i D_2 leže na polari (15) točke P . ■

Primjer 15. Neka se pomoću polare odrede jednadžbe tangenata povučeni iz točke $P = (14, 1)$ na elipsu $x^2 + 4y^2 = 100$.

Rješenje. Iz jednadžbe elipse svođenjem na kanonski oblik nalazimo da je $b^2 = 25$, $a^2 = 100$, pa jednadžba polare točke $P = (14, 1)$ glasi $7x + 2y - 50 = 0$. Dirališta traženih tangenata su prema Propoziciji 6. sjecišta tog pravca i elipse. Koordinate dirališta dobivaju se rješavanjem sustava

$$\begin{cases} 7x + 2y - 50 = 0, \\ x^2 + 4y^2 = 100. \end{cases}$$

Lako se nalazi da je $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $y_1 = -3$, $y_2 = 4$. Dakle, dirališta tangenata su u točkama $D_1 = (8, -3)$, $D_2 = (6, 4)$. Dakle, jednadžbe tangenata glase $2x - 3y + 25 = 0$ i $3x + 8y - 50 = 0$. ■

Primjer 16. Dokažite da polare točaka koje leže na jednom pravcu, s obzirom na elipsu, prolaze istom točkom.

Rješenje. Uzmimo pravac $y = kx + l$ i točku $P_0 = (x_0, y_0)$ na njemu. Tada je $P_0 = (x_0, kx_0 + l)$. Polara točke P_0 s obzirom na elipsu $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ ima jednadžbu $b^2 x_0 x + a^2 (kx_0 + l) - a^2 b^2 = 0$. Neka je sada $P_1 = (x_1, kx_1 + l)$ neka druga točka tog pravca. Njezina polara tada ima jednadžbu $b^2 x_1 x + a^2 (kx_1 + l) - a^2 b^2 = 0$. Lako se vidi da sjecište S tih polara ima koordinate $S = \left(-\frac{a^2 k}{l}, \frac{b^2}{l}\right)$. Ako je sada $P(\xi, k\xi + l)$ bilo koja točka pravca $y = kx + l$, onda se lako provjerava da točka S leži na polari točke P . Još je lakše provjeriti tvrdnju za pravac $x = m$. Učinite to sami. ■

5.4. Direktrise elipse

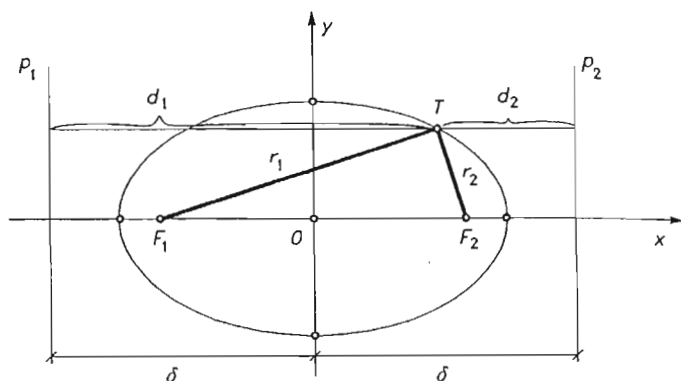
Neka je F jedan fokus elipse. Pravac p koji ima svojstvo da za svaku točku T elipse vrijedi $\frac{d(T, p)}{d(T, F)} = c$, gdje je c pozitivna konstanta, zove se **direktrisa** (ravnalica) elipse. Dakle, ako elipsa ima direktrisu, onda ih očito mora imati dvije jer elipsa ima dva fokusa.

Označimo sa d_i udaljenost točke T elipse od direktrise p_i i sa r_i radijvektor te točke, $i = 1, 2$. Ako elipsa ima direktrise, onda za njih mora vrijediti

$$r_i = c \cdot d_i, \quad (16)$$

gdje je c pozitivna konstanta. Iz uvjeta (16) koji mora zadovoljavati direktrisa slijedi da ona ne može sjeći krivulju i da ona mora biti okomita na veliku os elipse. Dakle, ako direktrise postoje, to su pravci koji imaju jednadžbe oblika

$$p_1 \dots x + \delta = 0, \quad p_2 \dots x - \delta = 0, \quad \delta > a, \quad (17)$$



Sl. 282.

gdje je a duljina velike poluosi elipse. Neka su d_i , $i = 1, 2$ udaljenosti točke $T = (x, y)$ elipse od direktrisa p_i . Sa slike 282 razabiremo da vrijedi

$$d_1 = \delta + x, \quad d_2 = \delta - x. \quad (18)$$

Iz (16), zbog (18) i (5) slijedi $a + \epsilon x = c\delta + cx$, a to povlači da je $\epsilon = c$, pa iz obje jednakosti slijedi $\delta = \frac{a}{\epsilon}$. Iz (17) sada slijedi da direktrise postoje i imaju jednadžbe

$$p_1 \dots \epsilon x + a = 0, \quad p_2 \dots \epsilon x - a = 0. \quad (19)$$

Primjer 17. Kako glasi jednadžba elipse kod koje fokusi dijele razmak između direktrisa na tri jednaka dijela ako je duljina velike osi elipse $2a = 6$.

Rješenje. Iz $\delta = \frac{a}{\epsilon}$ slijedi $\delta = \frac{3}{\epsilon}$, pa je dvostruki razmak između direktrisa jednak $\frac{6}{\epsilon}$. Prema uvjetu zadatka je $2\epsilon = \frac{2}{\epsilon}$, tj. $\epsilon\epsilon = 1$. Zbog $\epsilon = \frac{c}{a}$ odavde je $e^2 = 3$. Kako je $e^2 = a^2 - b^2$ to je $b^2 = 6$. Jednadžba elipse, dakle, glasi $6x^2 + 9y^2 - 54 = 0$. ■

5.5. Elipsa kojoj su fokusi na osi ordinata

Segmentni oblik jednadžbe elipse glasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdje je $a > b$. Postavlja se pitanje kako izgleda skup točaka ravnine koje su određene istom jednadžbom, ali je $a < b$. Da odgovorimo na to pitanje, trebat će nam koordinatni zapis osne simetrije s obzirom na pravac $y = x$. Uzmimo u tu svrhu točku $T = (x, y)$ i označimo njezinu zrcalnu sliku s obzirom na pravac $y = x$ sa $T' = (x', y')$. Neka su N i N' nožišta okomica spuštenih redom iz T i T' na osi x i y (nacrtaj sliku). Kako je $\sphericalangle TOP = \sphericalangle T'OP$, gdje je P polovište dužine $\overline{TT'}$, to je i $\sphericalangle NOT = \sphericalangle T'ON$, pa je $\triangle ONT \cong \triangle N'OT$, što povlači $|ON| = |ON'|$, $|NT| = |NT'|$, a kako je $|ON| = x$, $|TN| = y$, $|N'T'| = x'$, $|ON'| = y'$, to slijedi

$$x' = y, \quad y' = x. \quad (20)$$

Relacije (20) predstavljaju traženi analitički zapis osne simetrije s osi $y = x$. Dakle, koordinate zrcalne točke neke točke dobijemo tako da jednostavno zamijenimo njezine koordinate. Na primjer, ako je $T = (-3, 5)$, onda zrcalna točka ima koordinate $T' = (5, -3)$.

Vratimo se sada na naš problem. Promotrimo elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$. Zrcaljenjem na pravcu $y = x$, prema (20), vidimo da je zrcalna slika te elipse elipsa koja ima jednadžbu $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, a fokusi su joj u točkama $F_1 = (0, -e)$ i $F_2 = (0, e)$, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Primjer 18. Kako glasi jednadžba elipse kojoj je pravac $3x + 2y - 9 = 0$ tangenta, a fokusi su joj u točkama $F_1 = (0, -2)$, $F_2 = (0, 2)$?

Rješenje. Riješimo "zrcalni zadatak". Prema (20) zrcalna slika tangente ima jednadžbu $2x + 3y - 9 = 0$, a zrcalne slike fokusa imaju koordinate $F'_1 = (-2, 0)$, $F'_2 = (2, 0)$. Eksplicitna jednadžba zrcalne slike tangente glasi $y = -\frac{2}{3}x + 3$. Pravac $y = kx + l$ je tangenta elipse ako vrijedi $a^2k^2 + b^2 = l^2$. Kako je $k = -\frac{2}{3}$, $l = 3$, to uvjet dodira glasi $\frac{4}{9}a^2 + b^2 = 9$. Iz $a^2 - b^2 = e^2$ slijedi $a^2 - b^2 = 4$, pa se iz ovog sustava jednadžbi dobiva $a^2 = 9$, $b^2 = 5$. Dakle, jednadžba zrcalne slike tražene elipse glasi $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$. Kako je tražena elipsa zrcalna slika ove elipse, to jednadžba tražene elipse glasi $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$. ■

Primjer 19. Kako glase jednadžbe tangenata povučениh iz točke $T = (4, -5)$ na elipsu $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$?

Rješenje. To je elipsa kojoj su fokusi na osi y . Opet rješavamo "zrcalni zadatak". Zrcalna slika te elipse ima jednadžbu $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$, a zrcalna slika točke T ima koordinate $T' = (-5, 4)$. Prema primjeru 11. jednadžbe tangenata povučениh iz točke T' na tu elipsu glase $x + 5 = 0$, $3x + 10y - 25 = 0$. Dakle, jednadžbe tangenata povučениh iz točke $T = (4, -5)$ na elipsu $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ glase $y + 5 = 0$, $10x + 3y - 25 = 0$. ■

5.6. Jednadžba translirane elipse

Nađimo jednadžbu elipse koja se dobije iz elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, translacijom koja središte elipse translira u točku $O'(p, q)$. To je translacija za vektor $\vec{a} = \overrightarrow{OO'} = p\vec{i} + q\vec{j}$. Neka je $T = (x, y)$ bilo koja točka i $T' = (x', y')$ njezin translant. Po definiciji translacije tada vrijedi $\overrightarrow{OT'} = \overrightarrow{OT} + \vec{a}$. Kako je $\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\overrightarrow{OT'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, to je $x'\vec{i} + y'\vec{j} = (x + p)\vec{i} + (y + q)\vec{j}$, pa vrijedi

$$x' = x + p, \quad y' = y + q. \quad (21)$$

Relacije (21) predočuju koordinatni zapis translacije za vektor $p\vec{i} + q\vec{j}$. Uzmimo elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Iz (21) je $x = x' - p$, $y = y' - q$. Ako je točka (x, y) na elipsi,

onda njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu $\frac{(x' - p)^2}{a^2} + \frac{(y' - q)^2}{b^2} = 1$. Dakle, translacijom za spomenuti vektor dobije se elipsa koja ima jednadžbu

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1. \quad (22)$$

Primjer 20. Zadana je elipsa $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0$. Odredite koordinate njezinog središta, fokusa i duljine poluosi.

Rješenje. Svedimo jednadžbu elipse na oblik (22). Imamo redom

$$9(x^2 - 4x) + 25(y^2 - 2y) = 164,$$

odnosno

$$9(x - 2)^2 + 25(y - 1)^2 = 164 + 36 + 25,$$

tj.

$$9(x - 2)^2 + 25(y - 1)^2 = 225.$$

Odavde je

$$\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{9} = 1.$$

Središte elipse je u točki $S = (2, 1)$, poluosi su $a = 5, b = 3$. Linearni ekscentricitet elipse je $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, tj. $e = 4$. Fokusi su očito u točkama $F_1 = (-2, 1)$ i $F_2 = (6, 1)$. (Nacrtajte sliku.) ■

Primjer 21. Glavna os elipse je paralelna s osi x , a jedno njezino tjeme na glavnoj poluosi je u točki $A = (-4, 3)$. Kako glasi jednadžba elipse ako ona prolazi točkama $P = (-1, \frac{9}{2})$ i $Q = (-3, \frac{3}{2})$?

Rješenje. U jednadžbi $\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1$, treba odrediti p, q, a i b . Kako je tjeme na glavnoj poluosi u točki $A = (-4, 3)$, to je očito $q = 3$. Jednadžba elipse dakle glasi

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - 3)^2}{b^2} = 1.$$

Kako točke A, P, Q leže na elipsi, to vrijedi

$$\frac{(-4 - p)^2}{a^2} = 1,$$

$$\frac{(-1 - p)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{9}{2} - 3\right)^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{(-3 - p)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{3}{2} - 3\right)^2}{b^2} = 1.$$

Ovaj sustav jednadžbi je ekvivalentan sa

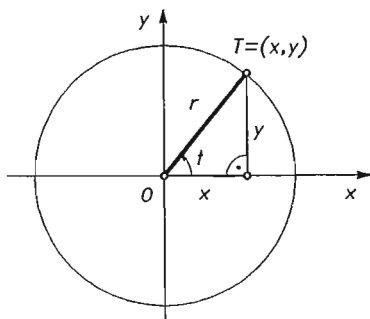
$$\begin{aligned} a^2 &= (4 + p)^2, \\ 4b^2[(1 + p)^2 - a^2] &= -9a^2, \\ 4b^2[(3 + p)^2 - a^2] &= -9a^2. \end{aligned}$$

Dijeljenjem druge i treće jednadžbe dobivamo $(1+p)^2 = (3+p)^2$, a odavde je $p = -2$, što uvršteno u prvu jednadžbu sustava daje $a^2 = 4$, pa iz druge jednadžbe slijedi $b^2 = 3$.
Jednadžba elipse dakle glasi

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{3} = 1. \blacksquare$$

5.7. Parametarske jednadžbe kružnice i elipse

Uzmimo kružnicu sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava polumjera r i na njoj bilo koju točku $T = (x, y)$. Označimo sa t kut koji orijentirani polupravac OT zatvara s orijentiranom osi x . Tada je svakoj točki T kružnice pridružen jedinstveni realni broj $t \in [0, 2\pi)$ i obrnuto. Realni broj t zovemo tada **parametrom**



Sl. 283.

točke T . Da je točki T pridružena vrijednost parametra t označavamo sa $T(t)$. Na sl. 283. razabiremo da za koordinate točke T vrijedi

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t. \quad (23)$$

Za svaku točku kružnice postoji $t \in [0, 2\pi)$ tako da za njezine koordinate vrijede jednakosti (23) i obrnuto za svaki $t \in [0, 2\pi)$ jednadžbe (23) određuju koordinate točke, koja leži na kružnici. Iz tog se razloga jednadžbe (23) zovu **parametarske jednadžbe kružnice**.

Uočimo da se eliminiranjem parametra t iz (23) (ako jednadžbe (23) kvadriramo i zbrojimo) dobije $x^2 + y^2 = r^2$, tj. standardna jednadžba centralne kružnice.

Ako je središte kružnice u točki $S = (p, q)$ i njezin polumjer jednak r , onda se lako vidi da njezine parametarske jednadžbe glase

$$x = p + r \cos t, \quad y = q + r \sin t.$$

Uzeli smo da je $t \in [0, 2\pi)$, dok je u fizici često potrebno uzeti da se t mijenja u nekom većem intervalu ili čak da je $t \in \mathbb{R}$. Takav slučaj imamo, na primjer, kada se promatra gibanje materijalne točke po kružnici (titanje), gdje točka više puta prolazi kroz isti položaj.

Sjetimo se da je

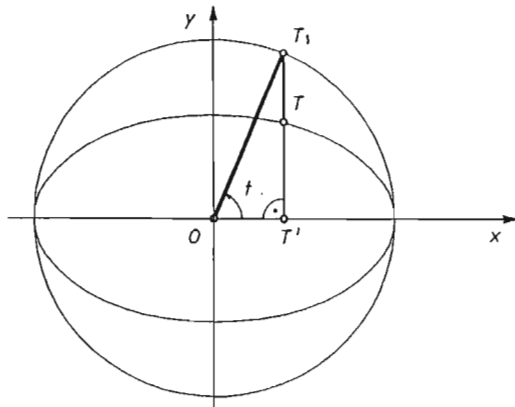
$$\sin t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}, \quad \cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}.$$

Stavimo li $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, onda (23) možemo pisati u obliku

$$x = \frac{r(1-u^2)}{1+u^2}, \quad y = \frac{2ru}{1+u^2}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

Jednadžbe (24) predstavljaju drugi oblik parametarskih jednadžbi centralne kružnice polumjera r . Lako se vidi da se eliminacijom parametra u iz (24) opet dobije standardna jednadžba kružnice. Zgodno je primijetiti da iz (24) slijedi da, na primjer, na jediničnoj kružnici postoji beskonačno mnogo točaka, kojima su obje koordinate racionalne.

Izvedimo sada parametarske jednadžbe elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. U tu svrhu sjetimo se da se ta elipsa dobije iz kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ kontrakcijom prema osi x , i to s koeficijentom $k = \frac{b}{a}$. Uzmimo na elipsi bilo koju točku $T = (x, y)$ i označimo



Sl. 284.

sa T_1 onu točku kružnice koja se kontrakcijom preslikava u točku T . Označimo kao i prije kut osi x i polupravca OT_1 sa $t \in [0, 2\pi)$. Neka je T' ortogonalna projekcija točke T (pa i T_1) na os x . Iz $\triangle OT'T_1$, vidimo da je $|OT'| = |OT_1| \cos t$. Zbog $|OT_1| = a$ i $|OT'| = x$ odavde slijedi $x = a \cos t$. Iz istog je trokuta $|T_1T'| = a \sin t$, a kako je $|TT'| = ka = \frac{b}{a} \cdot a = b$, to odavde zbog $|TT'| = y$ slijedi $y = b \sin t$. Parametarske jednadžbe elipse, dakle glase

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t. \quad (25)$$

Odavde se analogno, kao i prije eliminacijom t , dobije kanonska jednadžba elipse. Dakako da jednadžbama (25) možemo dati i drukčiji oblik kao i kod kružnice, tj.

$$x = \frac{a(1 - u^2)}{1 + u^2}, \quad y = \frac{2bu}{1 + u^2}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Primjer 22. Nađite parametarske jednadžbe kružnice $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ uzevši kao parametar koeficijent smjera svih sekanata kružnice koje čine pramen s vrhom u točki $A = (-r, 0)$.

Rješenje. Jednadžba pravca glasi $y = t(x + r)$. Ako to uvrstimo u jednadžbu kružnice, dobit ćemo

$$(1 + t^2)x^2 + 2rt^2x + r^2(t^2 - 1) = 0.$$

Odavde je $x_1 = -r$ i $x_2 = \frac{r(1 - t^2)}{1 + t^2}$; $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{2rt}{1 + t^2}$. Sjecišta s kružnicom su dakle

$A = (-r, 0)$ i $S = \left(\frac{r(1 - t^2)}{1 + t^2}, \frac{2rt}{1 + t^2} \right)$. Ako izuzmemo točku A , vidimo da uz opisani izbor parametra parametarske jednadžbe kružnice glase

$$x = \frac{r(1 - t^2)}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2rt}{1 + t^2},$$

a to su upravo jednadžbe (24). Ovim je onda dobivena i geometrijska interpretacija parametra u tim jednadžbama. Primijetimo da se točka A dobije na limesu kada $t \rightarrow +\infty$, tj. $\lim_{t \rightarrow +\infty} x = -r$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y = 0$, pa treba smatrati da je točki A pridružena vrijednost parametra $t = \infty$. ■

Primjer 23. Točkom kružnice povučen je pramen pravaca. Na kojoj krivulji leže polovišta tetiva koje na kružnici odsjecaju pravci tog pramena?

Rješenje. Odaberimo koordinatni sustav tako da je središte kružnice u ishodištu i zadana točka ima koordinate $A = (-r, 0)$, gdje je r polumjer kružnice. Prema prethodnom primjeru tada sjecišta kružnice i pravaca pramena imaju koordinate $A = (-r, 0)$ i $S(t) = \left(\frac{r(1 - t^2)}{1 + t^2}, \frac{2rt}{1 + t^2} \right)$, a polovišta tetiva $P(t) = \left(-\frac{rt^2}{1 + t^2}, \frac{rt}{1 + t^2} \right)$. Parametarske jednadžbe tražene krivulje dakle glase

$$x = -\frac{rt^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{rt}{1 + t^2}.$$

Diobom ovih jednadžbi dobije se $t = -\frac{x}{y}$, pa ako to uvrstimo u bilo koju od prethodnih jednadžbi dobit ćemo $(x - \frac{r}{2})^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}$. Prema tome, polovišta tetiva leže na kružnici koja iznutra dira zadanu kružnicu i prolazi njezinim središtem. ■

Na kraju spomenimo gdje se u prirodi pojavljuje elipsa. Tu, prije svega, treba spomenuti **Keplerove² zakone**. Kepler je ustanovio da se planeti gibaju oko Sunca po elipsama. Ti zakoni glase ovako.

²Johann Kepler (1571-1630), njemački astronom i fizičar. Bavio se i matematikom, osobito problemima izračunavanja volumena. Poznato je njegovo djelo *Stereometria doliorum vinorum* (Stereometrija vinskih bačava) koje se pojavilo 1615 g. Upravo zbog toga i njega treba smatrati pretečom integralnog računa.

1. Svaki se planet giba po elipsi s jednim žarištem u Suncu.
2. Radijektori planeta u jednakim vremenima opisu jednake površine.
3. Kvadrati ophodnih vremena planeta odnose se kao kubovi njihovih srednjih udaljenosti od Sunca.

Spomenimo da je putanja Zemlje oko Sunca elipsa kojoj je velika poluos približno jednaka $1,5 \cdot 10^8$ km, a numerički ekscentricitet približno jednak $\epsilon = 0,017$.

I meridijan ima približno oblik elipse. Omjer poluosi te elipse je približno 293 : 300.

§ 6. Hiperbola

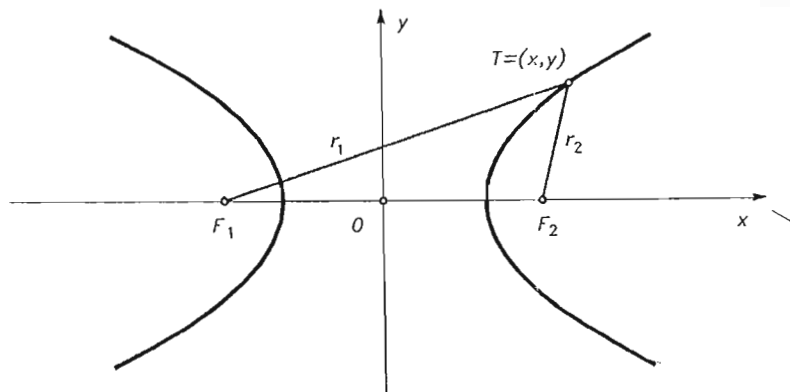
6.1. Jednadžba hiperbole

Neka su F_1 i F_2 dvije različite čvrste točke u ravnini i $|F_1F_2| = 2e$. Hiperbolom zovemo skup svih točaka ravnine kojima je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od tih točaka konstantna i jednaka $2a$, gdje je $0 < a < e$. Dakle, to je skup H određen sa

$$H = \{T \in M \mid ||F_1T| - |F_2T|| = 2a\}.$$

Točke F_1 i F_2 zovu se žarišta ili fokusi hiperbole. Realni broj e zove se linearni ekscentricitet hiperbole.

Da se odredi jednadžba hiperbole uzмимо koordinatni sustav tako da fokusi F_1 i F_2 imaju koordinate $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$ (sl. 285) i neka je $T = (x, y)$ bilo koja točka hiperbole. Označimo sa $r_1 = |F_1T|$ i $r_2 = |F_2T|$ radijektore točke T .



Sl. 285.

Prema definiciji hiperbole vrijedi

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Kako je $r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$, to prethodnu jednakost možemo pisati u obliku

$$|\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}| = 2a,$$

a odavde je

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \pm 2a, \quad (1)$$

Pomnožimo li (1) sa $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$, dobit ćemo

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \pm \frac{2e}{a}x. \quad (2)$$

Zbrajanjem jednadžbi (1) i (2) dobivamo

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \pm \left(a + \frac{e}{a}x \right),$$

a kvadriranjem te jednadžbe slijedi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1.$$

Kako je $0 < a < e$, to možemo uvesti oznaku $a^2 - e^2 = -b^2$, pa prethodna jednadžba prima oblik

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Dakle, ako točka T leži na hiperboli, onda njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu (3). Pokazat ćemo da jednadžba (3) jest jednadžba hiperbole, tj. ako koordinate neke točke $T = (x, y)$ zadovoljavaju jednadžbu (3), onda je T točka hiperbole. Uzmimo točke $F_1 = (-e, 0)$ i $F_2 = (e, 0)$ i pretpostavimo da koordinate točke $T = (x, y)$ zadovoljavaju (3), tj. da vrijedi

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right).$$

Nađimo radijvektor $r_1 = |TF_1|$ točke T . Očito je $r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$, pa slijedi

$$r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)}, \text{ tj. } r_1 = \sqrt{e^2 - b^2 + 2ex + \frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2}.$$

Kako je $e^2 = a^2 + b^2$, to je

$$r_1 = \sqrt{a^2 + 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2},$$

dakle je konačno

$$r_1 = \left| a + \frac{e}{a}x \right|.$$

Analogno se za radijvektor $r_2 = |TF_2|$ dobiva

$$r_2 = \left| a - \frac{e}{a}x \right|.$$

Kako je $0 < a < e$, a zbog (4) i $|x| \geq a$, to slijedi da za $x > 0$ vrijedi $a + \frac{e}{a}x > 0$ i $a - \frac{e}{a}x > 0$, pa su za $x > 0$ radijvektori dani sa

$$r_1 = a + \frac{e}{a}x, \quad r_2 = -a + \frac{e}{a}x,$$

a za $x < 0$ sa

$$r_1 = -a - \frac{e}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{e}{a}x.$$

U oba slučaja iz ovih jednakosti slijedi $|r_1 - r_2| = 2a$, pa točka T leži na hiperboli i jednadžba (3) jest jednadžba hiperbole.

Realan broj a zovemo **duljinom realne poluosi hiperbole**, a realan broj b **duljinom imaginarne poluosi**. Iz (3) razabiremo da je hiperbola definirana samo za $|x| \geq a$ i da siječe os x u točkama $A = (-a, 0)$ i $B = (a, 0)$. Te točke zovemo **tjemenima hiperbole**. Dužinu \overline{AB} zovemo **realnom osi hiperbole**, a dužinu \overline{CD} $C = (0, b)$, $D = (0, -b)$ **imaginarnom osi hiperbole**. Dužine $|OA|$ i $|OB|$ zovemo **realnim poluosima**, a dužine $|OC|$ i $|OD|$ **imaginarnim poluosima**. Omjer $\epsilon = \frac{e}{a}$ zovemo **numeričkim ekscentricitetom hiperbole**. Kako je $e > a$, to je kod hiperbole $\epsilon > 1$. Kod elipse je numerički ekscentricitet bio $0 < \epsilon < 1$. Pomoću numeričkog ekscentriciteta možemo izraziti za radijvektore točke $T = (x, y)$ hiperbole napisati u obliku

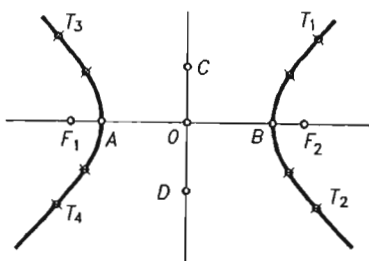
$$\begin{aligned} r_1 &= a + \epsilon x, & r_2 &= -a + \epsilon x, & \text{za } x > 0, \\ r_1 &= -a - \epsilon x, & r_2 &= a - \epsilon x, & \text{za } x < 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Iz jednadžbe hiperbole dalje razabiremo da ona ima dvije osi simetrije, to su os x i os y , tj. pravci na kojima leže njezine osi, pa je to i centralno simetrična krivulja i sjecište osiju je centar simetrije. Stoga tu točku zovemo i **središtem hiperbole**.

Duljina tetive koja prolazi jednim od fokusa hiperbole i okomita je na glavnu os zove se **parametar hiperbole** i označava sa $2p$. Stavimo li u (3) $x = e$ i $y = p$, dobivamo za **poluparametar** vrijednost

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (5)$$

Konstrukciju točaka hiperbole izvodimo kao i kod elipse. Pokažimo kako se one konstruiraju ako su zadane njezine poluosi \overline{AB} i \overline{CD} . Najprije ćemo konstruirati



Sl. 286.

žarišta F_1 i F_2 . U tu svrhu sjetimo se da su a , b i linearni ekscentricitet hiperbole vezani relacijom

$$a^2 + b^2 = e^2. \quad (6)$$

Oдавde slijedi da je $|CB| = e$, pa ako od O lijevo i desno nanesimo $|CB|$, dobit ćemo točke F_1 i F_2 (sl. 286). Nacrtajmo sada dužinu duljine AB i uzmimo točku P na pravcu AB , tako da je $|AP| > |AB| = 2a$. Opišimo oko F_1 , kao središta luk kružnice polumjera $|AP|$ i oko F_2 luk kružnice polumjera $|BP|$. Ti se lukovi sijeku u točkama T_1 i T_2 , i to su točke hiperbole. Ponovimo postupak zamijenivši uloge od F_1 i F_2 i dobijemo točke T_3 i T_4 hiperbole. Istim postupkom možemo konstruirati po volji velik broj točaka hiperbole.

Primjer 1. Kako glasi jednadžba hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ako ona prolazi točkama $T_1 = (5, 4)$ i $T_2 = (2, 1)$? Odredite poluosi, žarišta te linearni i numerički ekscentricitet te hiperbole.

Rješenje. Kako točke $T_1 = (5, 4)$, $T_2 = (2, 1)$ leže na hiperboli, to vrijedi

$$\begin{aligned} 25b^2 - 16a^2 &= a^2b^2, \\ 4b^2 - a^2 &= a^2b^2. \end{aligned}$$

Oduzimanjem ovih jednadžbi dobiva se $b^2 = \frac{5}{7}a^2$, što uvršteno u drugu jednadžbu sustava daje $b^2 = \frac{13}{7}$, pa je $a^2 = \frac{13}{5}$. Poluosi su $a = \sqrt{\frac{13}{5}}$, $b = \sqrt{\frac{13}{7}}$, pa jednadžba hiperbole

glasi $5x^2 - 7y^2 = 13$. Iz $e^2 = a^2 + b^2$ za linearni ekscentricitet dobivamo $e = \sqrt{\frac{156}{35}}$, pa

su žarišta u točkama $F_1 = \left(-\sqrt{\frac{156}{35}}, 0\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{\frac{156}{35}}, 0\right)$. Numerički ekscentricitet je

$$e = \frac{e}{a} = \sqrt{\frac{12}{7}}. \quad \blacksquare$$

Primjer 2. Porodica hiperbola zadana je sa

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\lambda^2} = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Provjerite da sve hiperbole te porodice prolaze točkom $(5, 4)$ i odredite onu od tih hiperbola kojoj je jedno žarište u točki $(13, 0)$.

Rješenje. Sve hiperbole očito prolaze točkom $(5,0)$, no sve one prolaze i točkom $(-5,0)$. Kako je $a^2 = 25$ i $b^2 = \lambda^2$, to je $e^2 = a^2 + b^2 = 25 + \lambda^2$. Jedno je žarište u točki $(13,0)$, pa je $25 + \lambda^2 = 169$. Odavde je $\lambda^2 = 144$. Jednadžba tražene hiperbole glasi $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$, odnosno $144x^2 - 25y^2 = 3600$. ■

Primjer 3. Kako glasi uvjet da dvije točke $T = (x, y)$ i $T' = (x', y')$ leže na istoj elipsi ili hiperboli s fokusima $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$?

Rješenje. Jednadžbu elipse ili hiperbole možemo pisati kao

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1,$$

gdje je a velika poluos elipse ($a > e$), odnosno hiperbole ($a < e$). Odavde slijedi

$$a^4 - a^2(x^2 + y^2 + e^2) + e^2x^2 = 0.$$

Analogno dobivamo $a^4 - a^2(x'^2 + y'^2 + e^2) + e^2x'^2 = 0$. Iz ove dvije jednadžbe eliminacijom a^2 (ili gledajući rezolventu ovih dviju jednadžbi) lako se dobiva da je traženi uvjet

$$e^2(x^2 - y^2)(x'^2 - y'^2) + (x^2 - y^2 + x'^2 - y'^2)(x^2y'^2 - x'^2y^2) = 0. \quad \blacksquare$$

6.2. Tangenta i zrcalna svojstva hiperbole

Nađimo analitički uvjet da pravac $y = kx + l$ bude tangenta hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, tj. da on s hiperbolom ima samo jednu zajedničku točku. Koordinate sjecišta pravca i hiperbole su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} y &= kx + l \\ b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2. \end{aligned}$$

Sasvim analogno kao i kod elipse dobijemo

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2klx - a^2(b^2 + l^2) = 0. \quad (7)$$

Promotrimo slučaj $b^2 - a^2k^2 \neq 0$. Slučaj $b^2 - a^2k^2 = 0$ tretirat ćemo posebno. Iz (7) je

$$x_{1,2} = \frac{1}{b^2 - a^2k^2}(a^2kl \pm ab\sqrt{l^2 + b^2 - a^2k^2}), \quad (8)$$

$$y_{1,2} = \frac{1}{b^2 - a^2k^2}(b^2l \pm kab\sqrt{l^2 + b^2 - a^2k^2}). \quad (9)$$

Iz (8) i (9) slijedi, ako je $a^2k^2 - b^2 < l^2$, onda pravac siječe hiperbolu u dvije različite točke, a ako je $a^2k^2 - b^2 > l^2$, onda pravac i hiperbola nemaju zajedničkih točaka. Ako je pak

$$a^2k^2 - b^2 = l^2, \quad (10)$$

onda pravac i hiperbola imaju samo jednu točku zajedničku, tj. u tome je slučaju pravac tangenta hiperbole. Jednadžbu (9) zovemo uvjetom dodira (tangen- cijalnosti) pravca i hiperbole.

Ako je pak $b^2 - a^2k^2 = 0$, onda iz (8) i (9) slijedi da pravac i hiperbola imaju "beskonačno daleku" točku zajedničku i takav pravac zovemo **asimptotom hiperbole**. Iz $b^2 - a^2k^2 = 0$ slijedi $k = \pm \frac{b}{a}$, pa vidimo da hiperbola ima dvije asimptote. Iz (10) tada slijedi $l = 0$, pa asimptote imaju jednadžbu

$$y = \pm \frac{b}{a}x. \quad (11)$$

Izvedimo sada i jednadžbu tangente hiperbole, ako je zadano njezino diralište $D = (x_1, y_1)$. Iz (8) i (9) zbog (10) slijedi $x_1 = -\frac{a^2k}{l}, y_1 = -\frac{b^2}{l}$, a odavde je $k = -\frac{x_1l}{a^2}, l = -\frac{b^2}{y_1}$. Slijedi

$$k = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}. \quad (12)$$

Jednadžbom (12) određen je koeficijent smjera tangente hiperbole ako je zadano diralište $D = (x_1, y_1)$. Uvrstimo li (12) i $l = -\frac{y_1}{b^2}$ u $y = kx + l$, dobivamo

$$y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}x - \frac{b^2}{y_1},$$

a odavde je

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1, \quad (13)$$

ili

$$b^2x_1x - a^2y_1y - a^2b^2 = 0. \quad (13')$$

Jednadžba (13) je segmentni oblik jednadžbe tangente hiperbole, a (13') njezin opći oblik.

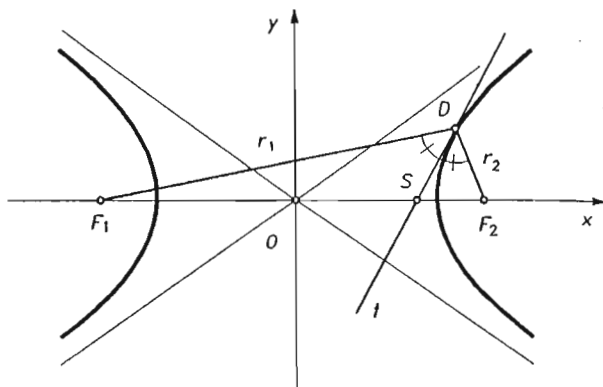
Tangenta hiperbole ima analogno svojstvo kao i tangenta elipse, tj. vrijedi

PROPOZICIJA 1. (Zrcalno svojstvo hiperbole). *Tangenta hiperbole je simetrala unutrašnjeg kuta između radijevktora dirališta.*

Dokaz. Neka je $D = (x_1, y_1)$ diralište tangente hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Jednadžba te tangente glasi $b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$. Označimo sa S sjecište te tangente s osi x . Lako se vidi da je $S = \left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$. Treba pokazati da je $\sphericalangle SDF_1 = \sphericalangle SDF_2$ (sl. 287).

To dokazujemo pomoću poučka o simetrali unutrašnjeg kuta trokuta. Prema tom poučku dovoljno je dokazati da je apsolutna vrijednost $|\lambda|$ djelišnog omjera λ , u kojem točka S dijeli dužinu $\overline{F_1F_2}$, jednaka omjeru $\frac{r_1}{r_2}$ duljina radijevktora.

Očito je $|F_1S| = \left|\frac{a^2}{x_1} + e\right|$, $|F_2S| = \left|\frac{a^2}{x_1} - e\right|$. Kako je $e = ae$, to odavde slijedi



Sl. 287.

$|F_1S| = a \left| \frac{a + \varepsilon x_1}{x_1} \right|$, $|F_2S| = a \left| \frac{a - \varepsilon x_1}{x_1} \right|$. Stoga je $|\lambda| = |a + \varepsilon x_1| / |a - \varepsilon x_1|$. Kako je $r_1 = |a + \varepsilon x_1|$ i $r_2 = |a - \varepsilon x_1|$, to vrijedi

$$|\lambda| = \frac{r_1}{r_2}.$$

(Kao i kod elipse, i ovdje se može dati čisto geometrijski dokaz. Učinite to! ■

Na temelju ove propozicije lako se konstruiraju tangente hiperbole ako je zadano diralište.

Zrcalnu sliku fokusa F_1 hiperbole s obzirom na njezinu tangentu t zovemo **suprotište** fokusa F_1 s obzirom na t . Vrijedi

PROPOZICIJA 2. *Suprotišta fokusa F_1 s obzirom na sve tangente hiperbole leže na kružnici kojoj je središte u drugom fokusu F_2 , a polumjer jednak duljini realne osi hiperbole.*

Dokaz. Neka je t tangenta hiperbole s diralištem u D (sl. 288). Označimo sa S_1 suprotište fokusa F_1 s obzirom na t . Zbog Propozicije 1 točka S_1 leži na F_2D . Dakle je $|F_2S_1| = r_2 - |DS_1|$. Kako je $|DS_1| = |DF_1| = r_1$ to je $|F_2S_1| = |r_1 - r_2| = 2a$, gdje je $2a$ duljina realne poluosi hiperbole. ■

O konstruktivnim primjenama ove propozicije bit će kasnije riječi.

Primjer 4. U točkama s apscisama $x = \pm e$ hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ povučene su tangente na hiperbolu. Dokažite da one zatvaraju romb površine $P = 2a^3/e$.

Rješenje. Zbog simetrije hiperbole dovoljno je promotriti samo onaj njezin dio koji je u I. kvadrantu, tj. tangentu u točki $D = (e, \frac{b^2}{a})$. Prema (13) jednadžba tangente s diralištem u D glasi

$$\frac{x}{a^2/e} - \frac{y}{a} = 1,$$

pa je površina trokuta koji ta tangenta zatvara s koordinatnim osima jednaka $P = \frac{1}{2} \frac{a^3}{e}$,

a površina romba je $4P = \frac{2a^3}{e}$. ■

Primjer 5. Dokazite da je produkt udaljenosti fokusâ hiperbole od bilo koje njezine tangente konstantan.

Rješenje. Udaljenosti d_1 i d_2 fokusâ $(-e, 0)$, $(e, 0)$ od bilo koje tangente $b^2 x_1 - a^2 y_1 - a^2 y_1 - a^2 b^2 = 0$ iznose

$$d_1 = \frac{-b^2 x_1 e - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}}, \quad d_2 = \frac{b^2 x_1 e - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}}.$$

Odavde je

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{a^4 b^4 - b^4 x_1^2 e^2}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}.$$

Kako diralište $D = (x_1, y_1)$ tangente leži na hiperboli, to vrijedi $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$. Odavde je $a^2 y_1^2 = b^2 x_1^2 - a^2 b^2$. Ako to uvrstimo u prethodnu jednakost i uzmemo u obzir da vrijedi (6), tj. $e^2 = a^2 + b^2$, odmah slijedi

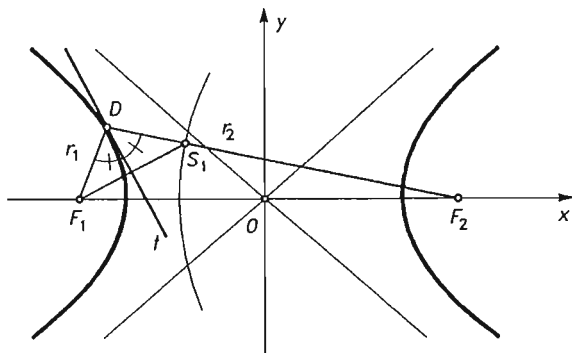
$$d_1 \cdot d_2 = -b^2.$$

Dakle, po apsolutnoj vrijednosti produkt udaljenosti fokusâ od tangente hiperbole iznosi b^2 . ■

Pokažimo na primjerima kako se koristi uvjet dodira.

Primjer 6. Odredite jednadžbu hiperbole kojoj su pravci $8x - 5\sqrt{3}y - 20 = 0$, $4\sqrt{2}x - 5y - 20 = 0$ tangente.

Rješenje. Eksplicitni oblik prve tangente glasi $y = \frac{8\sqrt{3}}{15}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}$, dakle njezin koeficijent smjera je jednak $k_1 = \frac{8\sqrt{3}}{15}$, a odrezak na osi y $l_1 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Na isti način iz druge jednadžbe dobivamo $k_2 = \frac{4\sqrt{2}}{2}$, $l_2 = -4$. Ako to uvrstimo u uvjet dodira



Sl. 288.

$a^2 k^2 - b^2 = l^2$ za a^2 i b^2 , dobivamo, nakon sređivanja, sustav

$$64a^2 - 75b^2 = 400,$$

$$32a^2 - 25b^2 = 400.$$

Rješenje ovog sustava je $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, pa jednačba tražene hiperbole glasi $16x^2 - 25y^2 = 400$. ■

Primjer 7. Odredite sve tangente hiperbole $5x^2 - 9y^2 = 180$ koje su za $d = \sqrt{3}$ udaljene od ishodišta.

Rješenje. Tražene tangente su zajedničke tangente zadane hiperbole i kružnice $x^2 + y^2 = 8$. Svedemo li jednačbu hiperbole na kanonski oblik nalazimo da je $b^2 = 20$, $a^2 = 36$. Pravac $y = kx + l$ je tangenta hiperbole ako vrijedi $a^2 k^2 - b^2 = l^2$, tj. $36k^2 - 20 = l^2$. Taj isti pravac je tangenta kružnice ako vrijedi $r^2(1 + k^2) = l^2$, tj. $8(1 + k^2) = l^2$. Iz dobivenih jednačbi slijedi $k = \pm 1$, $l = \pm 4$, pa dobivamo četiri rješenja $\pm x - y \pm 4 = 0$. ■

6.3. Asimptote hiperbole

Asimptotom hiperbole zovemo granični položaj tangente kada se njezino diralište po beskonačnoj grani hiperbole giba prema neizmjernosti.

Pokažimo kako se iz ove definicije izvodi jednačba asimptote.

Jednačba tangente hiperbole s diralištem $D = (x_1, y_1)$ glasi $b^2 x_1 x - a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0$. Odavde je

$$y = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x - \frac{b^2}{y_1}.$$

Kako točka D leži na hiperboli, to je

$$y_1 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2}.$$

Promotrimo desnu gornju granu hiperbole, tj. onu koja leži u I. kvadrantu. Za točke te grane je $x_1 > 0$ i $y_1 > 0$, pa jednačba tangente glasi

$$y = \frac{b x_1}{a \sqrt{x_1^2 - a^2}} x - \frac{a}{b \sqrt{x_1^2 - a^2}}.$$

Dakle, koeficijent smjera tangente $y = kx + l$ jednak je

$$k = \frac{b x_1}{a \sqrt{x_1^2 - a^2}},$$

a odrezak na osi y jednak je $l = -\frac{a}{b \sqrt{x_1^2 - a^2}}$. Označimo sa k_a koeficijent smjera graničnog položaja tangente. Tada je

$$k_a = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} k = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{b x_1}{a \sqrt{x_1^2 - a^2}} = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{b}{a \sqrt{1 - \frac{a^2}{x_1^2}}} = \frac{b}{a}.$$

Neka je l_a odrezak graničnog položaja tangente. Tada je

$$l_a = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \left(-\frac{a}{b\sqrt{x_1^2 - a^2}} \right) = 0,$$

pa jednačba asimptote glasi

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Ako sada isti postupak ponovimo za lijevu donju granu hiperbole ($x_1 < 0$, $y_1 < 0$) i promotrimo granični proces za $x_1 \rightarrow -\infty$ opet dolazimo do jednačbe $y = \frac{b}{a}x$. Dakle, desna gornja grana i lijeva donja grana hiperbole imaju istu asimptotu.

Analogno se pokazuje da desna donja grana i lijeva gornja grana hiperbole opet imaju istu asimptotu i njezina jednačba glasi $y = -\frac{b}{a}x$.

Dakle hiperbola ima dvije asimptote i one su dane jednačbama (11).

Pokazat ćemo sada da se asimptota hiperbole može definirati kao pravac kojemu se hiperbola približuje kada se točka po njezinoj beskonačnoj grani giba prema neizmjenosti.

Uzmimo, određenosti radi, opet gornju granu hiperbole (3) i na njoj točku $(x_1, y_1) = (x_1, \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2})$, $x_1 > 0$. Udaljenost d te točke od asimptote $bx - ay = 0$ jednaka je

$$d = \frac{b(x_1 - \sqrt{x_1^2 - a^2})}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Odavde racionalizacijom brojnika dobivamo

$$d = \frac{ba^2}{\sqrt{a^2 + b^2}(x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2})}.$$

Kako je očito

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} d = 0,$$

to je tvrdnja dokazana.

Dakle, kao što vidimo, imamo dvije definicije asimptote. Prema jednoj asimptota krivulje je granični položaj tangente kada se diralište po beskonačnoj grani krivulje giba prema beskonačnosti. Prema drugoj to je pravac kojemu se krivulja približava kada se točka po beskonačnoj grani krivulje giba prema beskonačnosti. Valja napomenuti da općenito te dvije definicije nisu ekvivalentne. Pokazuje se ako je krivulja **algebarska**, tj. ako ona u pravokutnom Kartezijevu koordinatnom sustavu ima jednačbu oblika $\mathcal{F}(x, y) = 0$, gdje je \mathcal{F} polinom u dvije varijable, onda su te definicije ekvivalentne. One nisu ekvivalentne u slučaju tzv. transcendentnih krivulja. Takva krivulja je npr. $y = e^{-x} \sin x$; za nju je os x asimptota prema drugoj definiciji, a prema prvoj nije.

Hiperbola kojoj su osi jednake, tj. za koju vrijedi $b = a$ zove se **jednakostranična hiperbola**. Njezina jednadžba glasi $x^2 - y^2 = a^2$. Asimptote jednakostranične hiperbole su pravci $y = \pm x$, dakle njezine su asimptote okomite.

Primjer 8. Dokažite da je diralište tangente polovište dužine koju ta tangenta odsijeca na njezinim asimptotama.

Rješenje. Tangenta t s diralištem u točki $D = (x_1, y_1)$ ima jednadžbu $b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = a^2 b^2$. Jednadžbe asimptota jesu $a_1 \dots y = \frac{b}{a} x$, $a_2 \dots y = -\frac{b}{a} x$. Sjecišta D_1 i D_2 asimptota a_1, a_2 i tangente imaju koordinate

$$D_1 = \left(\frac{a^2 b}{bx_1 - ay_1}, \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1} \right),$$

$$D_2 = \left(\frac{a^2 b}{bx_1 + ay_1}, -\frac{ab^2}{bx_1 + ay_1} \right).$$

Kako je

$$x_{D_1} + x_{D_2} = a^2 b \left(\frac{1}{bx_1 - ay_1} + \frac{1}{bx_1 + ay_1} \right) = \frac{a^2 b \cdot 2bx_1}{b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2} = 2x_1$$

i slično $y_{D_1} + y_{D_2} = 2y_1$, to je D zaista polovište dužine $\overline{D_1 D_2}$. ■

Primjer 9. Dokažite da tangenta hiperbole odsijeca trokut konstantne površine od njezinih asimptota.

Rješenje. Prema oznakama iz prethodnog primjera imamo da je

$$P(\triangle OD_2 D_1) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{a^2 b}{bx_1 + ay_1} & -\frac{ab^2}{bx_1 + ay_1} & 1 \\ \frac{a^2 b}{bx_1 - ay_1} & \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1} & 1 \end{vmatrix},$$

odnosno

$$P(\triangle OD_2 D_1) = \frac{a^3 b^3}{b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2}.$$

Kako je $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, to konačno imamo

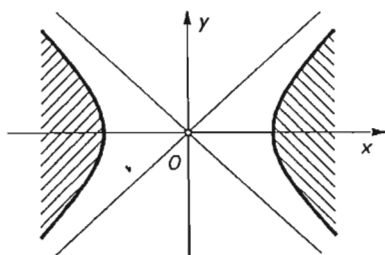
$$P(\triangle OD_2 D_1) = ab. \quad \blacksquare$$

6.4. Tangente povučene iz točke izvan hiperbole na hiperbolu. Pol i polara hiperbole

Za točku T kažemo da je **unutarnja (unutrašnja) točka** hiperbole ako svaki pravac kroz T siječe hiperbolu u dvije različite točke. Točku koja nije unutarnja točka hiperbole i ne leži na njoj zovemo **vanjskom točkom** hiperbole. Skup svih unutarnjih točaka zovemo **nutrinom hiperbole**, a skup svih vanjskih točaka njezinom **vanjštinom**. Analogno kao i u slučaju elipse dokazuju se

PROPOZICIJA 3. Točka $T = (x_0, y_0)$ je unutarnja točka hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ako i samo ako vrijedi $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 > 0$, a vanjska ako je $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 < 0$. ■

Na sl. 289 osjenčano područje je područje unutarnjih točaka hiperbole.



Sl. 289.

Primjer 10. Dokažite da su fokusi hiperbole njezine unutarnje točke, a sve točke na asimptotama su vanjske.

Rješenje. Uzmimo fokus $F_1 = (-e, 0)$. Treba vidjeti da za $x_0 = -e, y_0 = 0$ vrijedi $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 > 0$. Imamo redom $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = b^2e^2 - a^2b^2 = b^2(e^2 - a^2) = b^2(a^2 + b^2 - a^2) = b^4 > 0$. Dakle, fokus je zaista unutarnja točka hiperbole. Točke na asimptoti $y = \frac{b}{a}x$ imaju koordinate $(x_0, \frac{b}{a}x_0)$, pa imamo da je $a^2x_0^2 - a^2\frac{b^2}{a^2}x_0^2 - a^2b^2 = -a^2b^2 < 0$, i one su vanjske točke hiperbole. Specijalno je središte hiperbole vanjska točka. ■

Sasvim analogno kao i kod elipse dokazuje se da vrijedi

PROPOZICIJA 4. Iz one vanjske točke hiperbole, koja ne leži ni na jednoj od asimptota, mogu se povući točno dvije tangente na tu hiperbolu. ■

Primjer 11. Provjerite da je $T = (7, \frac{13}{3})$ vanjska točka hiperbole $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ i nađite jednadžbe tangenata povučenih iz te točke na hiperbolu.

Rješenje. Za $x_0 = 7, y_0 = \frac{13}{3}$ dobivamo $4x_0^2 - 9y_0^2 - 36 = 4 \cdot 49 - 9 \cdot \frac{169}{9} - 36 = -9 < 0$, pa je T zaista vanjska točka hiperbole. Lako se vidi da T ne leži na asimptoti, pa se iz T mogu povući dvije tangente na hiperbolu. Neka je pravac $y = kx + l$ tangenta hiperbole. Kako ona prolazi točkom T , to koordinate te točke moraju zadovoljavati jednadžbu tog pravca, tj. vrijedi $21k + 3l = 13$. Dalje, k i l moraju još zadovoljavati i uvjet dodira, tj. $9k^2 - 4 = l^2$. Iz prve od dobivenih jednadžbi je $l = (13 - 21k)/3$, pa ako to uvrstimo u drugu i sredimo, dobit ćemo $360k^2 - 546k + 205 = 0$. Korijeni te jednadžbe jesu $k_1 = \frac{5}{6}, k_2 = \frac{41}{60}$. Dalje je $l_1 = \frac{13 - 21k_1}{3} = \frac{13 - 21 \cdot \frac{5}{6}}{3} = -\frac{3}{2}$. Analogno je $l_2 = -\frac{27}{60}$, pa jednadžbe tangenata glase $y = \frac{5}{6}x - \frac{3}{2}$ i $y = \frac{41}{60}x - \frac{27}{60}$, odnosno $5x - 6y - 9 = 0$ i $41x - 60y - 27 = 0$. ■

Primjer 12. Isto za $T = (10, 6)$ i hiperbolu $9x^2 - 25y^2 = 225$.

Rješenje. Kao i u prethodnom primjeru vidi se da je T vanjska točka hiperbole, ali u ovom slučaju T leži na asimptoti $y = \frac{3}{5}x$. Postupkom kao u prethodnom primjeru dobivamo sustav jednažbi $l = 6 - 10k$, $25k^2 - 9 = l^2$. Eliminacijom nepoznanice l dobiva se kvadratna jednažba $5k^2 - 8k + 3 = 0$. Njezini su korijeni $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{3}{5}$, $l_1 = -4$, $l_2 = 0$, pa je $y = x - 4$ jedina tangenta, koja se iz točke T može povući na hiperbolu. Formalni račun za drugu tangentu daje asimptotu hiperbole. Provjerite sami da se iz središta hiperbole ne može povući nijedna tangenta na tu hiperbolu. ■

Primjer 13. Dokažite da je skup svih točaka ravnine iz kojih se hiperbola $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, $a > b$, vidi pod pravim kutom kružnica $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$. Ta se kružnica zove Mongeova kružnica hiperbole.

Rješenje. Neka je $T = (x_0, y_0)$ vanjska točka hiperbole iz koje se ona vidi pod pravim kutom, tj. iz koje se na hiperbolu $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ mogu povući međusobno okomite tangente. Neka je $y = kx + l$ jednažba tangente. Kako tangenta prolazi točkom $T = (x_0, y_0)$ to je $l = y_0 - kx_0$. Ako to uvrstimo u uvjet dodira $a^2k^2 - b^2 = l^2$, dobit ćemo

$$(a^2 - x_0^2)k^2 + 2x_0y_0k - (b^2 + y_0^2) = 0.$$

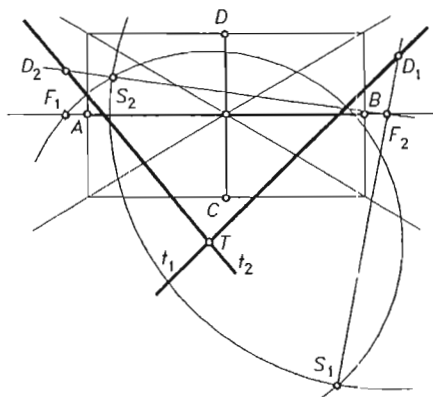
Neka su k_1 i k_2 korijeni gornje jednažbe. Tangente su okomite samo ako je $k_1 \cdot k_2 = -1$. Prema Viétovoj formuli je

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2 + y_0^2}{a^2 - x_0^2},$$

pa iz ove jednažbe za $k_1 \cdot k_2 = -1$ slijedi $x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2$, dakle točka T mora ležati na kružnici $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$. ■

Primjer 14. U ravnini su nacrtane osi \overline{AB} i \overline{CD} hiperbole i točka T . Konstruirajte tangente povučene iz točke T na hiperbolu. Konstruirajte pripadna dirališta.

Rješenje. Konstruirajmo najprije žarišta hiperbole, i to tako da dužinu \overline{AC} nanesemo (sl. 290) lijevo i desno od središta O na pravac AB . Dobijemo F_1 i F_2 ($|OF_1| = |OF_2| = |AC|$). Zatim nacrtamo asimptote hiperbole, to su pravci na kojima leže dijagonale pravokutnika nacrtanog na sl. 290. Odaberimo sada točku T , tako da je ona vanjska točka hiperbole i da ne leži ni na jednoj od asimptota. Suprotišta S_1 i S_2 žarišta



Sl. 290.

F_1 s obzirom na tražene tangente nalaze se na kružnici suprotišta k_1 kojoj je središte u F_2 i polumjer jednak $|AB|$. Točke S_1 i S_2 se također moraju nalaziti i na kružnici k_2 sa središtem u T polumjera $\overline{TF_1}$. Sjecišta od k_1 i k_2 su suprotišta S_1 i S_2 traženih tangenata t_1 i t_2 . Dakle, tangenta t_1 je okomica spuštena iz točke T na pravac S_1F_1 , a t_2 na pravac S_2F_1 . Pravci F_2S_1 i F_2S_2 sijeku tangente t_1 i t_2 redom u traženim diralištima D_1 i D_2 . ■

Drugi način određivanja tangenata povučenih iz točke izvan hiperbole na hiperbolu omogućuju nam pojmovi pol i polara. Oni se definiraju slično kao i kod elipse.

Zadana je točka $P = (x_0, y_0)$, $P \neq O$ i hiperbola $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. Pravac $p: b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2 = 0$ zovemo **polarom** točke P s obzirom na hiperbolu $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, a točku P zovemo **polom** pravca p . Uočite da je polara točke na hiperboli tangenta s diralištem u toj točki.

Kao i kod elipse dokazuje se da vrijedi

PROPOZICIJA 5. Polara vanjske točke hiperbole, koja ne leži ni na jednoj od njezinih asimptota, spojnica je dirališta tangenata povučenih iz te točke na tu hiperbolu. ■

Primjer 15. Odredite pomoću polare jednadžbe tangenata povučenih iz točke $P = (\frac{1}{5}, -\frac{1}{10})$ na hiperbolu $x^2 - 2y^2 = 1$.

Rješenje. Iz jednadžbe hiperbole svođenjem na kanonski oblik nalazimo da je $a^2 = 1$, $b^2 = \frac{1}{2}$, pa jednadžba polare točke $P = (\frac{1}{5}, -\frac{1}{10})$ glasi $x + y - 5 = 0$. Dirališta traženih tangenata su prema propoziciji 5. sjecišta polare i hiperbole. Dakle, koordinate dirališta dobivaju se kao rješenja sustava

$$\begin{aligned}x + y &= 5, \\x^2 - 2y^2 &= 1.\end{aligned}$$

Lako se vidi da je $x_1 = 17$, $x_2 = 3$, $y_1 = -12$, $y_2 = 2$. Dirališta tangenata su dakle u točkama $D_1 = (17, -12)$, $D_2 = (3, 2)$, pa jednadžbe tangenata glase $17x + 24y - 1 = 0$, $3x - 4y - 1 = 0$. ■

Primjer 16. Zadani su pravci $x - 3y + 8 = 0$, $4x - y - 1 = 0$ i hiperbola $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$. Pokažite da polovi tih pravaca s obzirom na zadanu hiperbolu leže na polari njihova sjecišta. Generalizirajte!

Rješenje. Odredimo najprije polare tih pravaca. Označimo sa $P_1 = (x_1, y_1)$ pol pravca $x - 3y + 8 = 0$. Jednadžba polare glasi $9x_1x - 16y_1y - 144 = 0$. Te dvije jednadžbe bit će jednadžbe istog pravca ako vrijedi

$$9x_1 = \frac{16y_1}{3} = -\frac{144}{8}.$$

Oдавде je $x_1 = -2$, $y_1 = -\frac{27}{8}$. Dakle, pol prvog pravca je točka $P_1 = (-2, -\frac{27}{8})$. Analogno se nalazi pol pravca $4x - y - 1 = 0$. Dobiva se $P_2 = (64, 9)$. Zadani se pravci sijeku u točki $S = (1, 3)$. Polara te točke ima jednadžbu $3x - 16y - 48 = 0$ i na njoj očito leže točke P_1 i P_2 . Generalizacija: Polovi pramena pravaca leže na polari vrha tog pramena. ■

6.5. Direktrise hiperbole

Direktrise hiperbole definiraju se analogno kao i direktrise elipse.

Neka je F jedan od fokusa hiperbole. Pravac takav da za svaku točku T hiperbole vrijedi $d(T, p)/d(T, F) = c$, gdje je c pozitivna konstanta zove se **direktrisa (ravnalica) hiperbole**. Ako hiperbola ima direktrisu, onda ih očito ima dvije.

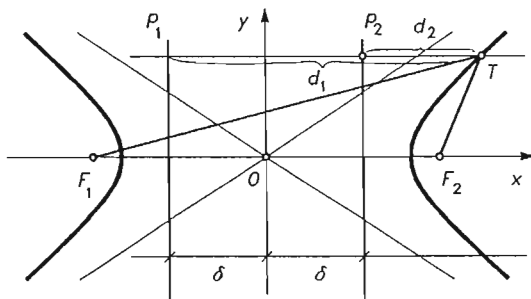
Označimo sa d_i udaljenost točke T hiperbole od direktrisa p_i i sa r_i radijvektore te točke, $i = 1, 2$. Ako direktrise hiperbole postoje, onda za njih mora vrijediti

$$r_i = c \cdot d_i. \quad (12)$$

Iz uvjeta (12) slijedi da direktrisa (ako postoji) ne smije sjeći hiperbolu i da mora biti okomita na njezinu realnu os, dakle paralelna s osi y . Dalje, zbog simetrije hiperbole i direktrise moraju biti simetrične s obzirom na os y . Dakle, to su pravci koji imaju jednadžbe oblika

$$p_1 \dots x + \delta = 0, \quad p_2 \dots x - \delta = 0, \quad 0 < \delta < a, \quad (13)$$

gdje je a realna poluos hiperbole. Uzmimo na hiperboli bilo koju točku $T = (x, y)$. Pretpostavimo, određenosti radi, da se T nalazi desno od osi y , tj. da je $x > 0$.



Sl. 291.

Označimo sa d_i , $i = 1, 2$ udaljenosti točke T od direktrisa p_i . Tada na slici 291. razabiremo da vrijedi

$$d_1 = \delta + x, \quad d_2 = \delta - x. \quad (14)$$

Zbog $x > 0$ vrijedi

$$r_1 = a + \epsilon x, \quad r_2 = \epsilon x - a. \quad (15)$$

Uvrstimo li prve od jednakosti (14) i (15) u prvu od jednakosti (12), dobivamo $a + \epsilon x = c\delta + cx$, pa je odavde $c = \epsilon$ i iz prethodne jednakosti slijedi $\delta = \frac{a}{\epsilon}$. Ako pak druge od jednakosti (14) i (15) uvrstimo u drugu od jednakosti (12), opet slijedi $c = \epsilon$ i $\delta = \frac{a}{\epsilon}$. Prema tome, hiperbola ima dvije direktrise i one zbog (13) imaju jednadžbe

$$p_1 \dots \epsilon x + a = 0, \quad p_2 \dots \epsilon x - a = 0. \quad (16)$$

Primjer 17. Pokažite da se polara fokusa hiperbole podudara s njezinom direktrisom.

Rješenje. Polara točke $P = (x_0, y_0)$ hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ima jednadžbu $b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2 = 0$, pa jednadžba polare fokusa $F_1 = (-e, 0)$ glasi $-b^2ex - a^2b^2 = 0$, tj. $ex + a^2 = 0$. Podijelimo li ovu jednakost sa a i uzmemo u obzir da je $e = \frac{c}{a}$, dobivamo konačno $ex + a = 0$, a to je prema (16) jednadžba direktrise p_1 . Analogno se vidi da je polara fokusa F_2 direktrisa p_2 . ■

Primjer 18. Odredite jednadžbu hiperbole kojoj je pravac $y = \frac{\sqrt{5}}{2}$ asimptota, a pravac $3x - 8 = 0$ direktrisa.

Rješenje. Jednadžbe $ex - a = 0$ i $3x - 8 = 0$ predstavljat će isti pravac ako i samo ako vrijedi $\frac{e}{3} = \frac{a}{8}$. Kako je $e = \frac{c}{a}$, to odavde slijedi $e = \frac{3a^2}{8}$, odnosno

$$a^2 + b^2 = \frac{9a^4}{64}. \quad (*)$$

Kako pak je $y = \frac{\sqrt{5}}{2}$ asimptota hiperbole, to je $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, tj. $b^2 = \frac{5}{4}a^2$. Ako to uvrstimo u (*), dobit ćemo da je $a^2 = 16$, a to povlači $b^2 = 20$. Jednadžba hiperbole dakle glasi $20x^2 - 16y^2 - 320 = 0$, odnosno $5x^2 - 4y^2 - 80 = 0$. ■

6.6. Hiperbola kojoj su fokusi na osi ordinata

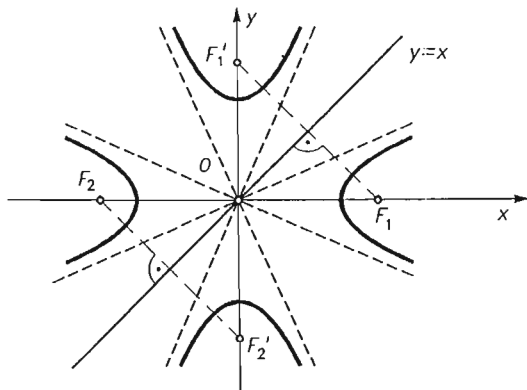
Promotrimo hiperbolu $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. Ako tu hiperbolu zrcalimo na pravcu $y = x$ dobit ćemo hiperbolu kojoj je centar u ishodištu koordinatnog sustava, a fokusi se nalaze na osi ordinata. Prema rečenome, u t.5.5. jednadžbu zrcaljene hiperbole dobit ćemo tako da u jednadžbi polazne hiperbole umjesto x pišemo y i umjesto y pišemo x . Dakle, jednadžba zrcalne slike hiperbole glasi $b^2y^2 - a^2x^2 - a^2b^2 = 0$, ili $a^2x^2 - b^2y^2 = -a^2b^2$. Segmentni oblik te jednadžbe je

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1. \quad (17)$$

Fokusi su u točkama $F'_1 = (0, e)$ i $F'_2 = (0, -e)$, gdje je $e = \sqrt{a^2 + b^2}$, a asimptote imaju jednadžbe $y = \pm \frac{a}{b}x$. Direktrise hiperbole (17) imaju jednadžbe $ey + a = 0$, gdje je opet $e = \frac{c}{a}$. Uočite da je sada u jednadžbi (17) b poluos na osi x , a poluos na osi y . Na slici 292. prikazana je hiperbola i njezina zrcalna slika s obzirom na pravac $y = x$.

Primjer 19. Kako glasi jednadžba hiperbole kojoj je pravac $x - y + 1 = 0$ tangenta i kojoj su fokusi u točkama $F'_1 = (0, \sqrt{7})$, $F'_2 = (0, -\sqrt{7})$?

Rješenje. Kao i kod elipse postupit ćemo tako da riješimo "zrcalni zadatak". Zrcalna slika tangente je pravac $y - x + 1 = 0$, a zrcalne slike fokusa su u točkama $F_1 = (\sqrt{7}, 0)$, $F_2 = (-\sqrt{7}, 0)$. Iz jednadžbe tangente vidimo da je njezin koeficijent smjera $k = 1$, a odrezak na osi y $l = -1$. Iz uvjeta dodira $a^2k^2 - b^2 = l^2$ sada slijedi $a^2 - b^2 = 1$, a iz $e = \sqrt{7}$ slijedi $a^2 + b^2 = 7$. Iz dobivenih jednadžbi je $a^2 = 4$, $b^2 = 3$, pa dobivamo $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$. Zrcaljenjem ove hiperbole nalazimo i traženu hiperbolu, njezina



Sl. 292.

jednadžba glasi $3y^2 - 4x^2 - 12 = 0$, odnosno $4x^2 - 3y^2 + 12 = 0$ ili u segmentnom obliku $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = -1$. ■

Primjer 20. Odredite jednadžbu tangenata povučenih iz točke $T = (\frac{13}{3}, 7)$ na hiperbolu $9x^2 - 4y^2 = 36$.

Rješenje. Rješenje tom zadatku "zrcalnog zadatka" dano je u primjeru 10 i ono glasi $t_1 \dots 5x - 6y - 9 = 0$, $t_2 \dots 41x - 60y - 27 = 0$. Prema tome, tražene tangente imaju jednadžbe $6x - 5y + 9 = 0$, $60x - 41y + 27 = 0$. ■

6.7. Jednadžba translirane hiperbole

Kao i u t. 5.6., odmah slijedi da se translacijom ravnine koja točku $O = (0, 0)$ preslikava u točku $O' = (p, q)$ hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ preslikava u hiperbolu koja ima jednadžbu

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1. \quad (18)$$

Primjer 21. Zadana je hiperbola $7x^2 - 16y^2 - 42x - 128y - 295 = 0$. Odredite koordinate njezina središta, fokusa, duljine poluosi i jednadžbe asimptota.

Rješenje. Svedimo jednadžbu na oblik (18). Imamo redom

$$7(x^2 - 6x) - 16(y^2 + 8y) = 295,$$

odnosno

$$7(x-3)^2 - 7 \cdot 9 - 16(y+4)^2 + 16 \cdot 16 = 295,$$

tj.

$$7(x-3)^2 - 16(y+4)^2 = 102.$$

Oдавde je

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+4)^2}{7} = 1.$$

Središte hiperbole je u točki $O' = (3, -4)$, duljine poluosi su $a = 4$, $b = \sqrt{7}$. Iz $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ slijedi $e = \sqrt{23}$, pa su fokusi u točkama $F_1 = (3 - \sqrt{23}, -4)$, $F_2 = (3 + \sqrt{23}, -4)$. Koeficijenti smjera asimptota dani su sa $k = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$, a kako asimptote prolaze točkom O' , to njihove jednadžbe glase $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}(x - 3) - 4$. ■

Primjer 22. Kako glasi jednadžba hiperbole kojoj su osi paralelne s koordinatnim osima i koja prolazi točkom $T = (7, \frac{7}{4})$, a pravci $x - 2y = 0$, $x + 2y - 4 = 0$ su joj asimptote?

Rješenje. Kako se pravci $x - 2y = 0$ i $x + 2y - 4 = 0$ sijeku u točki $O' = (2, 1)$, to je ta točka središte hiperbole. Koeficijent smjera asimptote jednak je $\frac{1}{2}$, pa je $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, tj. $a = 2b$. Jednadžba tražene hiperbole glasi

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1.$$

Kako ona prolazi točkom T , to je

$$\frac{25}{a^2} - \frac{9}{4b^2} = 1.$$

Iz ove jednadžbe i jednadžbe $a = 2b$ slijedi $b^2 = 4$ i $a^2 = 16$, pa jednadžba hiperbole glasi

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1,$$

odnosno

$$(x-2)^2 - 4(y-1)^2 = 16. \quad \blacksquare$$

6.8. Alternativna definicija hiperbole

Neka su g i l pravci koji se sijeku u točki O i neka je $2\alpha < 180^\circ$ kut između tih pravaca. Neka je T točka unutar krakova toga kuta. Točkom T povucimo paralele TP i TQ s pravcima l i g (sl. 293). Na taj se način dobije paralelogram $OPTQ$. Postavlja se pitanje kako odrediti geometrijsko mjesto točaka T tako da je površina tog paralelograma konstantna. Pokazat ćemo da je to geometrijsko mjesto točaka hiperbola kojoj su pravci l i g asimptote. Odaberimo koordinatni sustav kao na sl. 293. Neka točka T ima koordinate $T = (x, y)$. Produžimo \overline{CT} preko T do sjecišta R s pravcem g , i dobit ćemo jednakokrtačan trokut $\triangle TRQ$, dakle je $|TQ| = |QR| = |OP|$. Odredimo duljine stranica $|OP|$ i $|OQ|$ paralelograma $OPTQ$. Očito je

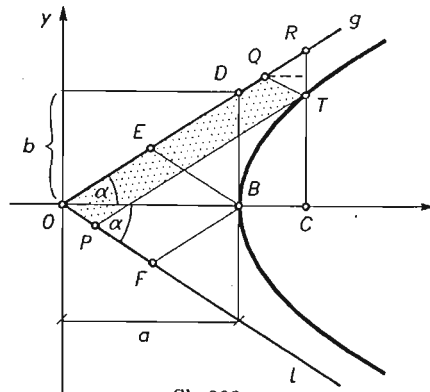
$$(|OQ| + |QR|) \cos \alpha = (|OQ| + |OP|) \cos \alpha = x,$$

$$(|OQ| - |TQ|) \sin \alpha = (|OQ| - |OP|) \sin \alpha = y.$$

Odavde je

$$|OQ| = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} \right),$$

$$|OP| = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha} \right).$$



Sl. 293.

Stoga je površina Δ tog paralelograma jednaka

$$|OQ| \cdot |OP| \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} \right) \cdot \sin 2\alpha,$$

dakle

$$\Delta = \frac{1}{2} (x^2 \operatorname{tg} \alpha - y^2 \operatorname{ctg} \alpha).$$

Neka je B položaj točke T na pozitivnoj osi x . Stavimo $|OB| = a$ i $|BD| = b$. Točkom B povucimo paralele sa g i l . Dobijemo romb $OFBE$. Površina tog romba jednaka je $\Delta_1 = \frac{1}{2} ab$. Dalje je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$ i $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}$. Ako je površina paralelograma $OPTQ$ konstantna za svaki položaj točke T , onda ta površina mora biti ista i za $T \equiv B$, dakle mora biti $\Delta = \Delta_1$, što daje

$$\frac{ab}{2} = \frac{1}{2} \left(x^2 \cdot \frac{b}{a} - y^2 \cdot \frac{a}{b} \right),$$

odnosno

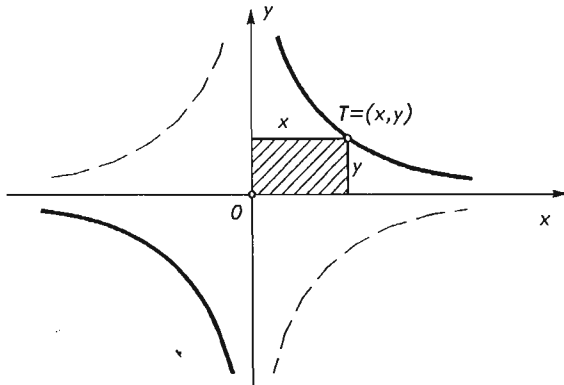
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

pa je tvrdnja dokazana.

6.9. Hiperbola kojoj su asimptote paralelne s koordinatnim osima

Ako su asimptote hiperbole paralelne s koordinatnim osima, onda su one okomite, pa svaka takva hiperbola nužno mora biti jednakostranična.

Promotrimo najprije slučaj jednakostranične hiperbole kojoj se asimptote podudaraju s koordinatnim osima (sl. 294). Neka je $\mathcal{T} = (x, y)$ bilo koja točka te



Sl. 294.

hiperbole i neka ona leži ili u I. ili III. kvadrantu. Prema t.6.8, točke te hiperbole su karakterizirane svojstvom da asimptote (osi x i y) i paralele s asimptotama povučene točkama hiperbole zatvaraju pravokutnik konstantne površine. Dakle, jednadžba takve hiperbole glasi

$$xy = c, \quad (18')$$

ili

$$y = \frac{c}{x} \quad (18'')$$

gdje je $c > 0$ realna konstanta. Ako točka T leži u II. ili IV. kvadrantu, onda je jednadžba takve hiperbole opet dana sa (18) samo je u ovom slučaju $c < 0$. Na sl. 294. ta je hiperbola izvučena crtkano. Takav par hiperbola zovemo **koasimptotskim hiperbolama**. Odredimo duljinu a realne poluosi hiperbole (18'). U slučaju $c > 0$ realna poluos očito leži na pravcu $y = x$. Taj pravac siječe onu granu hiperbole koja leži u I. kvadrantu u njezinu tjemenu (\sqrt{c}, \sqrt{c}) , pa je duljina realne poluosi jednaka udaljenosti te točke od ishodišta, tj.

$$a = \sqrt{2c}. \quad (19)$$

Za njoj koasimptotsku hiperbolu dobije se

$$a = \sqrt{-2c}. \quad (19')$$

Iz (19) slijedi $c = \frac{a^2}{2}$, pa jednadžba jednakokranične hiperbole kojoj je duljina poluosi a prema (18') glasi

$$xy = \frac{a^2}{2}. \quad (20)$$

U drugom je slučaju

$$xy = -\frac{a^2}{2}. \quad (20')$$

Očito su realna tjemena hiperbole (20) u točkama

$$A = \left(-\sqrt{\frac{a^2}{2}}, -\sqrt{\frac{a^2}{2}} \right), \quad B = \left(\sqrt{\frac{a^2}{2}}, \sqrt{\frac{a^2}{2}} \right),$$

a hiperbole (20') u točkama

$$A' = \left(-\sqrt{\frac{a^2}{2}}, \sqrt{\frac{a^2}{2}} \right), \quad B' = \left(\sqrt{\frac{a^2}{2}}, -\sqrt{\frac{a^2}{2}} \right),$$

a fokusi u točkama $F_1 = (-a, -a)$, $F_2 = (a, a)$ i $F_1' = (-a, a)$, $F_2' = (a, -a)$. Nađimo i jednadžbu tangente hiperbole (18'), odnosno (20) s diralištem u njezinoj točki $D = (x_1, y_1)$. Označimo odreske tangente na koordinatnim osima x i y redom sa m i n . Prema primjeru 8 očito je $\frac{m}{2} = x_1$ i $\frac{n}{2} = y_1$, pa segmentni oblik jednadžbe tangente glasi

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1. \quad (21)$$

Hiperbola kojoj su asimptote paralelne s koordinatnim osima, a ne podudaraju se s njima, dobije se translacijom hiperbole (18'). Ako asimptote imaju jednadžbe $x = p$, $y = q$, onda jednadžba hiperbole glasi

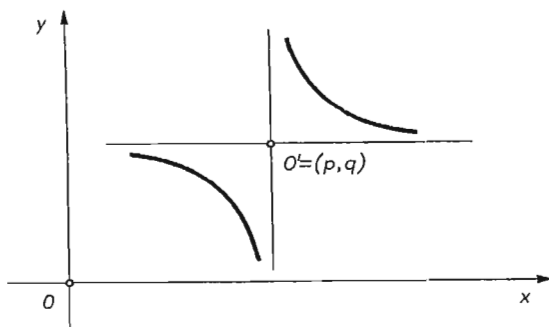
$$(x - p)(y - q) = c. \quad (22)$$

Graf hiperbole (22) (za $c > 0$) skiciran je na sl. 295. Odavde je

$$y = q + \frac{c}{x - p}. \quad (23)$$

Jednadžbu (23) možemo napisati i u obliku

$$y = \frac{qx - pq + c}{x - p}.$$



Sl. 295.

Vidimo da je to jednadžba oblika

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (24)$$

gdje su a, b, c, d , realne konstante takve da je $c \neq 0$. Obrnuto i svaka jednadžba ovog oblika je jednadžba jednakostranične hiperbole kojoj su asimptote paralelne s koordinatnim osima. Iz (24) slijedi $cx + dy = ax + b$, ili

$$xy - \frac{a}{c}x + \frac{d}{c}y = \frac{b}{c},$$

odnosno

$$\left(x + \frac{d}{c}\right) \left(y - \frac{a}{c}\right) = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Usporedba s (22) pokazuje da se radi o hiperboli kojoj je središte u točki $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, a asimptote su pravci $cx + d = 0$ i $cy - a = 0$, dakako uz uvjet da je $bc - ad \neq 0$.

Lako se vidi da jednadžba tangente hiperbole (22) s diralištem u točki $D = (x_1, y_1)$ glasi

$$\frac{x - p}{2(x_1 - p)} + \frac{y - q}{2(y_1 - q)} = 1. \quad (25)$$

Primjer 23. Pokažite da je jednadžba $xy + 2x - y - 22 = 0$ jednadžba hiperbole kojoj su asimptote paralelne s koordinatnim osima. Odredite središte, jednadžbe asimptota, duljine poluosi, tjemena i fokuse te hiperbole.

Rješenje. Jednadžba $xy + 2x - y - 22 = 0$ lako se transformira na oblik $(x-1)(y+2) = 20$. Usporedba s (18') kazuje da se radi o hiperboli kojoj je središte u točki $O' = (1, -2)$, pa asimptote imaju jednadžbe $x - 1 = 0$ i $y + 2 = 0$. Usporedba s (20) pokazuje da je $\frac{a^2}{2} = 20$, pa je $a = 2\sqrt{10}$ duljina realne poluosi. Tjemena i fokusi hiperbole su očito u točkama (vidi tekst poslije formule (20')) $A = (1 - \sqrt{20}, -2 - \sqrt{20})$, $B = (1 + \sqrt{20}, -2 + \sqrt{20})$, $F_1 = (1 - 2\sqrt{10}, -2 - 2\sqrt{10})$, $F_2 = (1 + 2\sqrt{10}, -2 + 2\sqrt{10})$. ■

Primjer 24. Zadana je hiperbola $y = \frac{5x-6}{x-3}$. U točki apscise $x_1 = 2$ povučena je tangenta. Odredite površinu trokuta koji ta tangenta zatvara s koordinatnim osima.

Rješenje. Zadanu jednadžbu napišimo u obliku $xy - 5x - 3y + 6 = 0$, a (22) u obliku $xy - qx - py + pq - c = 0$. Usporedbom tih jednadžaba nalazimo da je $q = 5$, $p = 3$, $pq - c = 6$, pa je $c = 9$. Dakle, jednadžba hiperbole glasi $(x-3)(y-5) = 9$. Za $x_1 = 2$ iz jednadžbe hiperbole nalazimo da je $y_1 = -4$, pa je $D = (2, -4)$ diralište tangente. Prema (25) jednadžba tangente glasi $\frac{x-3}{-2} + \frac{y-5}{-18} = 1$, odnosno $\frac{x}{9} + \frac{y}{7} = 1$, pa je tražena

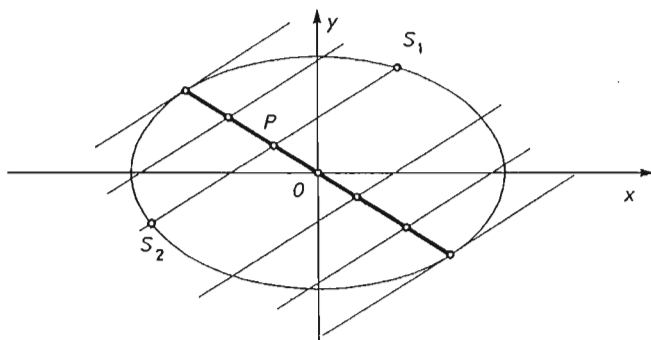
površina jednaka $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{14}{9} = \frac{2}{9}$. ■

6.10. Dijametri elipse i hiperbole

Tetivu koju od elipse (hiperbole) odsijeca pravac koji prolazi njezinim središtem zovemo **dijametrom** elipse (hiperbole). Pokazat ćemo sada kako se do dijametra elipse dolazi na drugi način. Vrijedi, naime, sljedeće svojstvo.

PROPOZICIJA 6. *Polovišta tetiva elipse (hiperbole) koje od elipse (hiperbole) odsijeca pramen paralelnih pravaca leže na dijametru elipse (hiperbole).*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju za elipsu. U tu svrhu presijecimo elipsu pramenom paralelnih pravaca $y = kx + l$, gdje je k čvrst realan broj, a $l \in \mathbf{R}$ parametar pravca. Po volji odabrani pravac pramena neka siječe elipsu u točkama S_1 i S_2



Sl. 296.

i neka je $P = (\xi, \eta)$ polovište tetive $\overline{S_1S_2}$ (sl. 296). Ako je $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ jednadžba elipse, onda uvrštavanjem $y = kx + l$ u tu jednadžbu nalazimo da su apscise x_1 i x_2 točaka S_1 i S_2 korijeni jednadžbe

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2klx + a^2(l^2 - b^2) = 0.$$

Kako je P polovište tetive $\overline{S_1S_2}$, to je $\xi = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, pa iz prethodne jednadžbe (Viéte) slijedi

$$\xi = -\frac{a^2kl}{a^2k^2 + b^2}. \quad (26)$$

Iz $\eta = k\xi + l$ nalazimo da je

$$\eta = \frac{b^2l}{a^2k^2 + b^2}. \quad (27)$$

Iz (26) i (27) eliminacijom parametra l nalazimo

$$\eta = -\frac{b^2}{a^2k}\xi.$$

Dakle, koordinate točke P zadovoljavaju jednadžbu

$$y = -\frac{b^2}{a^2k}x. \quad (28)$$

Dakle, sva polovišta tetive $\overline{S_1S_2}$ leže na pravcu (28), tj. na dijametru elipse. Analogno se u slučaju hiperbole nalazi da polovišta leže na pravcu

$$y = \frac{b^2}{a^2k}x. \quad \blacksquare \quad (28')$$

Označimo koeficijent smjera pravca (28) sa k' , tj. $k' = -\frac{b^2}{a^2k}$, odnosno

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}. \quad (29)$$

Vidimo da je jednačba (29) simetrična u k i k' , tj. ako k zamijenimo sa k' i k' sa k , onda se jednačba ne mijenja. Odavde zaključujemo:

Ako su k i k' dva koeficijenta smjera za koje vrijedi (28), onda polovišta onih tetiva elipse koje su paralelne s pravcem $y = kx$ leže na pravcu $y = k'x$, a polovišta tetiva paralelnih s pravcem $y = k'x$ leže na pravcu $y = kx$. Dakle, svakom je dijametru elipse na prirodan način pridružen jedan drugi njezin dijametar, tj. dijametri se pojavljuju u parovima. Takav par dijametara zovemo parom **konjugiranih dijametara elipse**. Prema rečenome, koeficijenti smjerova konjugiranih dijametara elipse vezani su relacijom (29).

Isto razmatranje vrijedi i u slučaju hiperbole, ali u tom slučaju iz (28') slijedi da su koeficijenti smjerova konjugiranih dijametara hiperbole vezani relacijom

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}. \quad (29')$$

Ovdje valja istaknuti: ako je $|k| > \frac{b}{a}$, onda pravac $y = kx$ siječe hiperbolu u dvije konjugirano kompleksne točke S_1 i S_2 , a ipak je formalno polovište tetive $\overline{S_1 S_2}$ realna točka.

Označimo li sa α i α' kutove koje konjugirani dijametari elipse zatvaraju s osi apscisa (tj. osi elipse), tada iz (29) slijedi $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$, a odavde slijedi da je jedan od tih kutova šiljast, a drugi tup. Dakle, konjugirani dijametri elipse razdvojeni su njezinim osima.

Iz (29') slijedi da se u slučaju hiperbole dobiva $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha' = \frac{b^2}{a^2}$, pa zaključujemo da konjugirani dijametri hiperbole nisu razdvojeni osima hiperbole (nacrtajte sliku).

Postavlja se pitanje mogu li se konjugirani dijametri podudarati, tj. može li biti $k = k'$. U slučaju elipse iz (29) slijedilo bi tada $k^2 = -\frac{b^2}{a^2}$, što nije moguće, pa takav par ne postoji. U slučaju hiperbole iz (29') slijedilo bi $k^2 = \frac{b^2}{a^2}$, pa se takvi dijametri podudaraju s asimptotama hiperbole.

Mogu li konjugirani dijametri biti okomiti? U tom je slučaju $kk' = -1$, pa bi iz (29) slijedilo $-1 = -\frac{b^2}{a^2}$, a odavde je $a = b$. Dakle, konjugirani dijametri elipse okomiti su u slučaju ako elipsa degenerira u kružnicu. Iz definicije konjugiranih dijametara neposredno slijedi da je kod kružnice zaista svaki par konjugiranih dijametara okomit. Napišemo li (29) u obliku $k = -\frac{b^2}{a^2} k'$, vidimo da tu jednačbu i jednačbu $k = -\frac{1}{k'}$ istodobno formalno zadovoljava $k = 0$, $k' = \infty$. Dakle, jedini par okomitih konjugiranih dijametara elipse jesu njezine osi, što je i geometrijski evidentno.

Slično se vidi da su osi hiperbole također jedini par njezinih okomitih konjugiranih dijametara.

Primjer 25. Odredite koeficijente smjera onog para konjugiranih dijametara elipse $x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ koji zatvaraju kut od 45° .

Rješenje. Iz jednadžbe elipse nalazimo da je $a^2 = 36$, $b^2 = 4$. Ako su k i k' koeficijenti smjera para konjugiranih dijametara, prema (29) vrijedi $kk' = -\frac{1}{9}$. Prema uvjetu zadatka mora biti

$$\frac{k - k'}{1 + kk'} = 1.$$

Iz ove dvije jednadžbe eliminacijom k' dobivamo $9k^2 - 8k + 1 = 0$, tj. $k_1 = \frac{1}{9}(4 + \sqrt{7})$, $k_2 = \frac{1}{9}(4 - \sqrt{7})$.

Slično se iz

$$\frac{k - k'}{1 + kk'} = -1$$

nalazi drugi takav par.

Primjer 26. Neka je $\overline{S_1S_2}$ bilo koji dijametar elipse i T bilo koja njezina točka, $T \neq S_1, S_2$. Dokažite da oni dijometri elipse koji su paralelni s tetivama $\overline{AS_1}$ i $\overline{AS_2}$ čine konjugirani par dijametara.

Rješenje. Uzmimo bilo koji dijametar $\overline{S_1S_2}$ elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ i neka on leži na pravcu $y = kx$. Točke S_1 i S_2 su tada sjecišta tog pravca i elipse. Uzmemo li, određenosti radi, da je S_2 u prvom kvadrantu, lako se vidi da ta sjecišta imaju koordinate

$$S_1 = \left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}, -\frac{kab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}} \right), \quad S_2 = \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}, \frac{kab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}} \right).$$

Po volji odabrana točka T elipse ima koordinate oblika $T = \left(\xi, \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2} \right)$. Označimo koeficijente smjera pravaca TS_1 i TS_2 sa k_{TS_1} i k_{TS_2} . Očito je

$$k_{TS_1} = \frac{\pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2} \cdot \sqrt{a^2k^2 + b^2} + kab}{\xi \sqrt{a^2k^2 + b^2} + ab}, \quad k_{TS_2} = \frac{\pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2} \cdot \sqrt{a^2k^2 + b^2} - kab}{\xi \sqrt{a^2k^2 + b^2} - ab}.$$

Odavde slijedi

$$k_{TS_1} \cdot k_{TS_2} = \frac{\frac{b^2}{a^2} (a^2 - \xi^2) (a^2k^2 + b^2) - a^2b^2k^2}{\xi^2 (a^2k^2 + b^2) - a^2b^2}.$$

Lako se vidi da je

$$k_{TS_1} \cdot k_{TS_2} = -\frac{b^2}{a^2},$$

pa se zaista radi o konjugiranim dijametrima. ■

Primjer 27. Kontrakcijom kružnice dobije se elipsa. Dokažite da je svaki par konjugiranih dijametara elipse slika jednog para ortogonalnih dijametara kružnice.

Rješenje. Neka je $x^2 + y^2 = a^2$ kružnica. Kontrakcijom s koeficijentom $\frac{b}{a}$, $a, b > 0$, $b < a$ dobije se elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Ako je (x_1, y_1) kraj jednog dijametara elipse, onda je koeficijent smjera tog dijametara jednak $k = \frac{y_1}{x_1}$, i on je očito slika onog dijametara

kružnice koji ima koeficijent smjera $k_1 = \frac{ay_1}{bx_1}$. Prema $k \cdot k' = -\frac{b^2}{a^2}$ slijedi da konjugirani dijametar uočenog dijametra elipse ima koeficijent smjera $k' = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$. Taj dijametar elipse je očito slika onog dijametra kružnice koji ima koeficijent smjera $k'_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \cdot \frac{a}{b}$, tj. $k'_1 = -\frac{bx_1}{ay_1}$. Konačno je $k_1 \cdot k'_1 = \frac{ay_1}{bx_1} \cdot \left(-\frac{bx_1}{ay_1}\right) = -1$ i tvrdnja je dokazana. ■

Primjer 28. Postoji li kod hiperbole koji par konjugiranih dijametara simetričnih spram asimptota?

Rješenje. Ako jedan dijametar hiperbole $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ leži na pravcu $y = kx$, onda prema (29') njemu konjugirani dijametar leži na pravcu $y = b^2 x / a^2 k$. Normalni oblici tih pravaca glase

$$\frac{kx - y}{\sqrt{1 + k^2}} = 0, \quad \frac{b^2 x - a^2 ky}{\sqrt{b^4 + a^4 k^2}} = 0.$$

Ti su dijometri simetrični spram asimptote ako je ta asimptota simetrala kuta tih pravaca, a ona će to biti ako je svaka točka $(\xi, \frac{b}{a}\xi)$ asimptote $y = \frac{b}{a}x$ jednako udaljena od tih pravaca, tj. ako je

$$\frac{\left|k\xi - \frac{b}{a}\xi\right|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{|b^2\xi - abk\xi|}{\sqrt{b^4 + a^4 k^2}}.$$

Oдавde je

$$\frac{1}{a\sqrt{1 + k^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^4 + a^4 k^2}},$$

a ova je jednakost moguća samo ako je $a = b$. Dakle, ako je $a \neq b$, onda takav par konjugiranih dijametara ne postoji. Znači, takvi parovi mogu postojati samo kod jednakostranične hiperbole. Lako se vidi da je kod jednakostranične hiperbole *svaki* par konjugiranih dijametara simetričan spram asimptota. ■

§ 7. Parabola

7.1. Jednadžba parabole

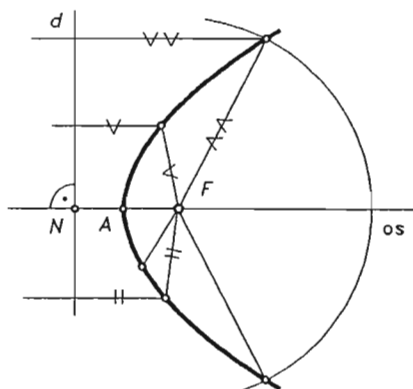
Neka je d bilo koji pravac u ravnini i F točka te ravnine M koja ne leži na d . Skup svih točaka ravnine kojih je udaljenost od pravca d jednaka udaljenosti od točke F zovemo **parabolom**. Dakle, parabola je skup točaka

$$P = \left\{ T \in M \mid d(T, d) = d(T, F) \right\}.$$

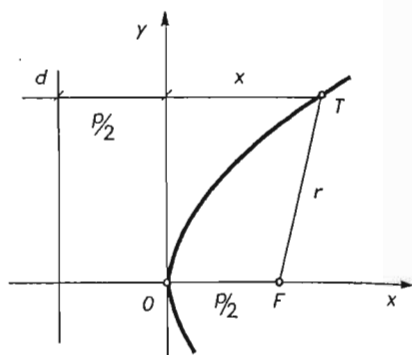
Pravac d zove se **direktrisa** ili **ravnalica** parabole, a F **fokus** ili **žarište**. Ako točkom F povučemo okomicu na d i sa N označimo njezino nožište na d , onda očito

polovište A dužine \overline{NF} pripada paraboli. Ta se točka zove **tjeme parabole**. Iz definicije parabole je jasno da je parabola simetrična s obzirom na tu okomicu, pa se ta okomica stoga i zove **os parabole**. Na sl. 297. prikazana je konstrukcija točaka parabole ako je zadan fokus F i direktrisa d .

Po volji odabranom točkom na osi povučena je paralela s direktrisom d i oko F opisana kružnica kojoj je polumjer jednak udaljenosti te paralele od d . Ta kružnica siječe paralelu u dvije točke parabole. Na sl. 297. nacrtano je nekoliko točaka parabole. Očito da parabola nije definirana lijevo od njezinog tjemena A .



Sl. 297.



Sl. 298.

Nađimo sada jednadžbu parabole ako je pravokutni Kartezijev koordinatni sustav odabran tako da je os x os parabole, a ishodište O je u njezinom tjemenu. Neka u tako odabranom koordinatnom sustavu direktrisa ima jednadžbu $x + \frac{p}{2} = 0$, gdje je $p > 0$ bilo koji realan broj; p se zove **poluparametar parabole**, a broj $2p$ **parametar parabole**. Tada fokus parabole ima koordinate $F = (\frac{p}{2}, 0)$. Neka je $T = (x, y)$ bilo koja točka parabole. Prema definiciji parabole, točka T leži na paraboli ako je $d(T, F) = d(T, p)$, ($d(T, F) = r$ zove se **radijvektor** točke T parabole), tj. ako vrijedi (sl. 298)

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Odavde kvadriranjem i sređivanjem odmah dobivamo

$$y^2 = 2px. \quad (1)$$

Dakle, ako točka $T = (x, y)$ leži na paraboli, onda njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu (1). Da se pokaže da (1) jest jednadžba parabole, treba pokazati: ako koordinate neke točke $T = (x, y)$ zadovoljavaju jednadžbu (1), onda T leži na paraboli. Pokažimo to. Za svaku točku $T = (x, y)$, koja leži u I. ili IV. kvadrantu,

vrijedi

$$d(T, p) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d(T, F) = x + \frac{p}{2}. \quad (2)$$

Ako koordinate točke T zadovoljavaju jednadžbu (1), onda iz prve od jednadžaba (2) slijedi da je

$$d(T, p) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Kako je T u prvom ili četvrtom kvadrantu, to je $x > 0$, a kako je i $p > 0$, to iz prethodne jednakosti slijedi $d(T, p) = x + \frac{p}{2}$, pa iz druge od jednadžaba (2) slijedi $d(T, p) = d(T, F)$, tj. točka T leži na paraboli. Ovim je dokazano da (1) jest jednadžba parabole. Jednadžba (1) zove se još i **tjemena jednadžba parabole**.

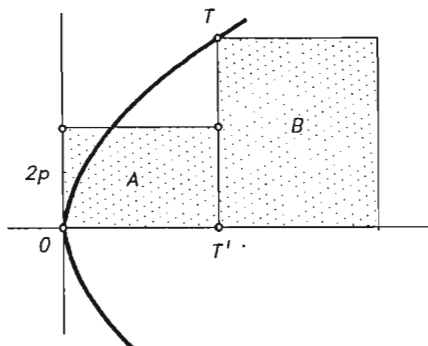
Ako u jednadžbu (1) uvrstimo $x = \frac{p}{2}$, dobit ćemo $y^2 = p^2$, tj. $y = \pm p$. Dakle, duljina one tetive parabole, koja prolazi fokusom parabole i okomita je na os parabole, jednaka je $2p$, tj. parametru parabole.

Uočite da je i jednadžba $y^2 = -2px$, $p > 0$ jednadžba parabole. Ta se parabola dobiva iz parabole $y^2 = 2px$ zrcaljenjem s obzirom na os y . Njezin je fokus u točki $F = \left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, a direktrisa je pravac $x - \frac{p}{2} = 0$.

Napomena 1. Jednadžbe krivulja 2. reda prvi put susrećemo već kod starogrčkog matematičara Apolonija (oko 250-200 g. pr. Kr.) iz Perge i to u njegovu djelu *Konike* (u osam knjiga). O tome će kasnije biti više rečeno. Na primjer, "jednadžba" parabole kod Apolonija glasi ovako:

"Kvadrat nad udaljenosti neke točke od osi jednak je pravokutniku kojemu jedna stranica ima stalnu dužinu, a druga je stranica jednaka udaljenosti te točke od tjemene tangente."

Pod pravokutnikom Apolonije misli na njegovu površinu. Označimo sa $2p$ duljinu one stranice tog pravokutnika koja je stalna (sl. 299). Neka je visina pravokutnika A stalne visine jednaka $2p$, druga je stranica tada jednaka $\overline{OT'}$, a B je



Sl. 299.

kvadrat "nad udaljenosti točke T od osi", tj. kvadrat stranice $|TT'|$. Ako uvedemo koordinatni sustav takav da je OT' os x i ishodište u točki O , i točka T ima koordinate $T = (x, y)$, onda je $|OT'| = x$, $|TT'| = y$, pa je površina kvadrata B jednaka y^2 , a površina kvadrata A je $2px$. Iz Apolonijeve definicije slijedi $y^2 = 2px$, a to je upravo jednadžba (1).

U ovoj Apolonijevoj definiciji vidimo početak ideje koordinata, koja je svoj puni današnji oblik dobila tek početkom 17. stoljeća u Descartesovu djelu *La geometrie* (1637). Valja naglasiti da je Dubrovčanin Marin Getaldić³ (lat. Ghetaldus), učenik Viéte, bio neposredni Descarteov preteča, i to u djelu *De resolutione et compositione mathematica*, koje je izišlo 1630 godine, dakle sedam godina prije Descartesova djela. Kažimo još da u svojem djelu *La geometrie* (koje je zapravo izišlo kao dodatak njegovoj čuvenoj *Discours de la methode* (Raspravi o metodi)) daje samo osnovne ideje analitičke geometrije i namjerice ne daje njezinu sustavnu izgradnju da bi (kao što sam kaže) drugi u izgradnji te znanosti našli svoj užitak.

7.2. Uvjet dodira pravca i parabole. Jednadžba tangente i zrcalno svojstvo parabole

Za pravac, koji nije paralelan s osi parabole, kažemo da je **tangenta parabole** ako ima s njome točno jednu zajedničku točku. Nađimo uvjet da pravac $y = kx + l$, $k \neq 0$ bude tangenta parabole $y^2 = 2px$, tj. uvjet da taj pravac dira parabolu. Koordinate (x, y) sjecišta pravca i parabole su očito rješenja sustava

$$\begin{aligned} y &= kx + l, \\ y^2 &= 2px. \end{aligned} \quad (3)$$

Uvrstimo li y iz prve jednadžbe u drugu, dobit ćemo

$$k^2x^2 + 2(kl - p)x + l^2 = 0.$$

Korijeni ove jednadžbe jesu

$$x_{1,2} = \frac{p - kl \pm \sqrt{p(p - 2kl)}}{k^2}. \quad (4)$$

Pravac će dirati parabolu ako sustav (3) ima jedinstveno rješenje, tj. ako je $p(p - 2kl) = 0$. Kako je uvijek $p \neq 0$, to odavde slijedi

$$p = 2kl. \quad (5)$$

Jednakost (5) je uvjet da pravac $y = kx + l$ dira parabolu $y^2 = 2px$.

³Marin Getaldić (1566 - 1627), hrvatski matematičar i fizičar.

⁴Pamtite to kao "dvije klupe".

Nađimo sada i jednadžbu tangente parabole (2) ako je zadano njezino diralište $D = (x_1, y_1)$. U slučaju dodira iz (4) slijedi

$$x_1 = \frac{p - kl}{k^2},$$

a kako $D = (x_1, y_1)$ leži i na tangenti, to je $y_1 = kx_1 + l$, pa uvrštavanjem prethodne jednakosti nalazimo da je $y_1 = \frac{p}{k}$. Dakle, k i l su rješenja sustava

$$x_1 = \frac{p - kl}{k^2}, \quad y_1 = \frac{p}{k}.$$

Uzmemo li u obzir da je $y_1^2 = 2px_1$, to iz tog sustava slijedi

$$k = \frac{p}{y_1}, \quad l = \frac{px_1}{y_1},$$

pa ako to uvrstimo u $y = kx + l$, dobit ćemo jednadžbu tangente

$$yy_1 = p(x + x_1). \quad (6)$$

Primjer 1. Fokusom parabole $y^2 = 16x$ povučena je tetiva kojoj je koeficijent smjera jednak $\sqrt{3}$. Krajevima te tetive povučene su tangente. Napišite jednadžbe tih tangenata i odredite kut među njima.

Rješenje. Iz $y^2 = 16x$ slijedi $2p = 16$, pa je $\frac{p}{2} = 4$. Fokus parabole je, dakle, u točki $F = (4, 0)$. Pravac na kojemu leži tetiva ima jednadžbu $y = \sqrt{3}(x - 4)$. Ako to uvrstimo u jednadžbu parabole dobivamo $3x^2 - 40x + 48 = 0$. Odavde je $x_1 = 12$, $x_2 = \frac{4}{3}$, pa iz $y = \sqrt{3}(x - 4)$ slijedi $y_1 = 8\sqrt{3}$, $y_2 = -\frac{8}{3}\sqrt{3}$. Dakle, parabola i pravac se sijeku u točkama $D_1 = (12, 8\sqrt{3})$, $D_2 = (\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\sqrt{3})$. Prema (6) jednadžbe tangenata s diralištima u tim točkama glase $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\sqrt{3}$ i $y = -x\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3}$. Koeficijenti smjera tangenata su $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $k_2 = -\sqrt{3}$. Kako je $k_1 \cdot k_2 = -1$, to su te tangente okomite. ■

Primjer 2. U točkama parabole $y^2 = 12x$, kojima su ordinate redom 2, 6, -3, povučene su tangente. Odredite omjer površina trokuta kojima su vrhovi u tim točkama i trokuta omeđenog povučenim tangentama.

Rješenje. Iz $y^2 = 12x$, uvrštavanjem $y_1 = 2$, $y_2 = 6$, $y_3 = -3$ nalazimo apscise tih točaka $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{3}{4}$. Dirališta tangenata su dakle u točkama $D_1 = (\frac{1}{3}, 2)$, $D_2 = (3, 6)$, $D_3 = (\frac{3}{4}, -3)$. Površina trokuta $\triangle D_1 D_2 D_3$ jednaka je

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 1 \\ \frac{3}{3} & 6 & 1 \\ \frac{3}{4} & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{15}{2}.$$

Prema (6) jednadžbe tangenata s diralištima u D_1 , D_2 i D_3 glase $3x - y + 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$ i $4x + 2y + 3 = 0$. Prema primjeru 9 u t.3.6. površina trokuta omeđenog tim tangentama jednaka je

$$P_t = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}},$$

tj.

$$P_t = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-30)^2}{(-2) \cdot 6 \cdot (-10)} = \frac{15}{4}.$$

Dakle je $P : P_t = \frac{15}{2} : \frac{15}{4}$ i konačno $P : P_t = 2 : 1$. ■

Primjer 3. Odredite jednadžbe onih tangenata parabole $y^2 = 16x$ kojima je udaljenost od ishodišta jednaka $d = 2\sqrt{2}$.

Rješenje. Te su tangente zajedničke tangente parabole $y^2 = 16x$ i kružnice $x^2 + y^2 = 8$. Prava $y = kx + l$ je tangenta parabole ako prema (5) vrijedi $p = 2kl$, tj. $kl = 4$, a kružnice $x^2 + y^2 = 8$ ako vrijedi $r^2(1 + k^2) = l^2$, tj. $l^2 = 8(1 + k^2)$. Uvrstimo li $l = 4/k$ u prethodnu jednadžbu dobit ćemo $16 = 8k^2(1 + k^2)$, odnosno $k^4 + k^2 - 2 = 0$. Realni korijeni ove jednadžbe jesu $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, pa je $l_1 = 4$, $l_2 = -4$. Jednadžbe traženih tangenata glase $y = x + 4$ i $y = -x - 4$. ■

Primjer 4. Dokažite da se odrezak tangente parabole između dirališta i sjecišta s direktrisom vidi iz fokusa pod pravim kutom.

Rješenje. Tangenta parabole $y^2 = 2px$ s diralištem u točki $D = (x_1, y_1)$ ima jednadžbu $yy_1 = p(x + x_1)$. Lako se nalazi da sjecište S te tangente i direktrise $x + \frac{p}{2} = 0$ ima koordinate $S = (-\frac{p}{2}, \frac{p}{y_1}(x_1 - \frac{p}{2}))$. Koeficijent smjera pravca FS jednak je

$$k_{FS} = \frac{\frac{p}{y_1}(x_1 - \frac{p}{2}) - 0}{-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}},$$

odnosno

$$k_{FS} = \frac{p - 2x_1}{2y_1}.$$

Za koeficijent smjera pravca FD nalazimo da je

$$k_{FD} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - \frac{p}{2}},$$

odnosno $k_{FD} = \frac{2y_1}{2x_1 - p}$. Iz ovih jednakosti slijedi $k_{FS} \cdot k_{FD} = -1$, pa su FS i FD okomiti pravci i tvrdnja je dokazana. ■

Primjer 5. Dokažite da je skup nožišta okomica povučenih iz fokusa parabole na sve njezine tangente tjemena tangenta parabole.

Rješenje. Neka je $yy_1 = p(x + x_1)$ tangenta parabole $y^2 = 2px$ s diralištem u točki $D = (x_1, y_1)$. Koeficijent smjera pravca okomitog na tu tangentu jednak je $k = -\frac{y_1}{p}$, pa

jednadžba okomice povučene iz fokusa $F = (\frac{p}{2}, 0)$ na tangentu glasi $y = -\frac{y_1}{p}(x - \frac{p}{2})$. Koordinate sjecišta okomice i tangente rješenje je sustava od tih dviju jednadžaba. Lako se vidi eliminacijom nepoznanice y iz tih dviju jednadžbi da zbog $y_1^2 = 2px_1$ slijedi $x = 0$, pa je traženo nožište zaista na tjemenoj tangenti parabole. ■

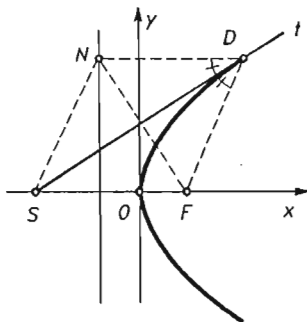
Primjer 6. Dokažite da kružnica opisana trokutu koji omeđuju tri tangente parabole prolazi njezinim fokusom.

Rješenje. Koristimo se Simsonovim teoremom pogl. IV, §9 koji kaže da se neka točka nalazi na trokutu opisanoj kružnici ako i samo ako nožišta okomica povučениh iz te točke na stranice trokuta (ili produžetke stranica) leže na jednom pravcu (Simsonov pravac). Prema primjeru 5 nožišta okomica spuštenih iz fokusa parabole na njezine tri tangente leže na tjemenoj tangenti (dakle na jednom pravcu), pa prema Simsonovu teoremu žarište F leži na kružnici opisanoj trokutu koji zatvaraju tjemene tangente. ■

Pogledajmo sada i tzv. fokalna, odnosno zrcalna svojstva parabole.

PROPOZICIJA 1. (Zrcalno svojstvo parabole). *Tangenta parabole je simetrala kuta radijvektora dirališta i paralele povučene diralištem s osi parabole.*

Dokaz. Neka je $D = (x_1, y_1)$ diralište tangente parabole $y^2 = 2px$ i \overline{FD} radijvektor dirališta. Povucimo točkom D paralelu s osi parabole i neka ona siječe direktrisu u točki N (sl. 300). Označimo sa S sjecište tangente s osi x . Iz jednadžbe



Sl. 300.

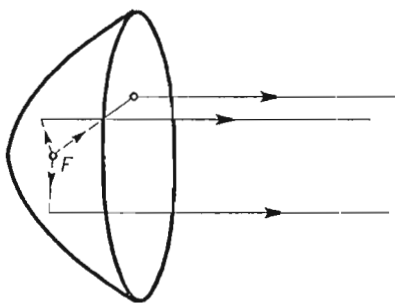
tangente slijedi da je $S = (-\frac{p}{2}, 0)$. Treba dokazati da je $\sphericalangle FDS = \sphericalangle SDN$. To pokazujemo tako da dokažemo da su trokuti $\triangle SFD$ i $\triangle SDN$ sukladni. Naprije po definiciji parabole je $|FD| = |DN|$. Dalje je $N = (-\frac{p}{2}, \pm\sqrt{2px_1})$ (zbog $y_1^2 = 2px_1$), pa je

$$|SN| = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px_1} = x_1 + \frac{p}{2},$$

a kako je $|SF| = x_1 + \frac{p}{2}$, to je $|SN| = |SF|$. Kako je pak \overline{SD} zajednička stranica tih dva trokuta to se oni podudaraju u sve tri stranice, pa su sukladni, što povlači da je $\sphericalangle FDS = \sphericalangle SDN$ i tvrdnja je dokazana. (I ovdje je moguće dati čisto geometrijski dokaz; učinite to!) ■

Napomena 2. Propozicija 1. omogućuje da se lako konstruira tangenta parabole ako je zadano njezino diralište. Uočimo da se još jednostavnija konstrukcija dobiva korištenjem činjenice da je $S = (-x_1, 0)$.

Napomena 3. Na ovom se fokalnom svojstvu parabole temelji i konstrukcija paraboličnog reflektora. Ako parabola rotira oko svoje osi, onda se dobije ploha koja se zove **rotacioni paraboloid** (v. § 9.9). Ako u žarište paraboloida stavimo izvor svjetlosti, onda zraka svjetlosti pada na takvo zrcalo i reflektira se tako da je kut upadanja jednak kutu refleksije. Iz navedenog svojstva slijedi da su sve reflektirane zrake paralelne s osi paraboloida (sl. 301). Obrnuto, ako zrake svjetlosti



Sl. 301.

padaju paralelno s osi na parabolično zrcalo, onda se reflektiraju tako da sve prolaze njegovim žarištem, pa se ta točka iz tog razloga i zove žarište.

Zrcalnu sliku fokusa parabole s obzirom na njezinu tangentu zovemo **suprotišt**em fokusa s obzirom na tu tangentu. Vrijedi

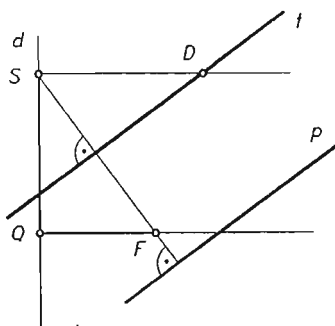
PROPOZICIJA 2. Skup suprotišta fokusa parabole s obzirom na sve njezine tangente je njezina direktrisa.

Dokaz. Po definiciji parabole trokut $\triangle FDN$ je jednakokračan i tangenta t je simetrala $\sphericalangle FDN$, pa je t visina tog trokuta (sl. 300). Stoga je upravo točka N suprotište od F i ona zaista leži na direktrisi parabole. ■

Napomena 4. Vidimo, dakle, da kod parabole kružnica suprotišta degenerira u pravac, i to upravo u direktrisu.

Primjer 7. Na sl. 302. nacrtan je fokus parabole, njezina direktrisa i pravac p . Konstruirajte one tangente parabole koje su paralelne s p , kao i pripadna dirališta. Koliko ima takvih tangenata?

Rješenje. Točkom F povucimo okomicu na d . Ta okomica je os parabole. Sjecišta osi s direktrisom d označimo sa Q . Suprotište fokusa s obzirom na traženu tangentu leži na okomici kroz F na p . Prema Propoziciji 2. ta okomica siječe d u suprotištu S tražene tangente t . Prema Propoziciji 1. tražena tangenta t je simetrala dužine \overline{FS} . Ako točkom S povučemo paralelu s osi, ona siječe t u traženom diralištu D .



Sl. 302.

Postoji samo jedna tangenta parabole paralelna sa zadanim pravcem, što neposredno slijedi iz konstrukcije, a lako slijedi iz uvjeta diranja $p = 2kl$; naime za zadani p i k postoji jedinstven $l = p/2k$ koji zadovoljava tu jednadžbu. ■

7.3. Tangente povučene iz točke izvan parabole na parabolu. Pol i polara parabole

Točku T zovemo **unutarnjom (unutrašnjom) točkom parabole** ako svaki pravac kroz T (osim paralele s osi parabole) siječe parabolu u dvije različite točke. Skup svih unutarnjih točaka parabole zovemo **nutrinom parabole**. Točku koja ne leži na paraboli i nije unutarnja zovemo **vanjskom točkom parabole**. Skup svih vanjskih točaka parabole zovemo njezinom **vanjštinom**. Vrijedi

PROPOZICIJA 3. Točka $T = (x_0, y_0)$ unutarnja je točka parabole $y^2 = 2px$ ako i samo ako vrijedi $y_0^2 - 2px_0 < 0$, a vanjska ako je $y_0^2 - 2px_0 > 0$.

Dokaz. Svaki pravac kroz T (koji nije paralelan s osi y) ima jednadžbu oblika $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$. Lako se vidi da kvadratna jednadžba koja određuje sjecište tog pravca i parabole $y^2 = 2px$ glasi

$$\lambda^2 x^2 + 2(\lambda y_0 - x_0 \lambda^2 - p)x + (\lambda x_0 - y_0)^2 = 0.$$

Diskriminanta D te jednadžbe dana je sa

$$\frac{1}{4}D = 2px_0\lambda^2 - 2py_0\lambda + p^2.$$

Pravac će sjeći parabolu u dvije različite točke ako i samo ako je $D > 0$ za sve λ , a to će biti ako je $4p^2y_0^2 - 8p^3x_0 < 0$, tj. $y_0^2 - 2px_0 < 0$. ■

Napomena 5. Fokus parabole $y^2 = 2px$ je unutarnja točka jer za $x_0 = \frac{p}{2}$, $y_0 = 0$ vrijedi $y_0^2 - 2px_0 = -p^2 < 0$, dok su sve točke direktrise vanjske točke jer za $x_0 = -\frac{p}{2}$, $y_0 = a$, $a \in \mathbf{R}$ vrijedi $y_0^2 - 2px_0 = a^2 + p^2 > 0$.

Primjer 8. Dokažite da je svaka točka tangente parabole (osim njezinog dirališta) vanjska točka te parabole.

Rješenje. Iz jednadžbe tangente $yy_1 = p(x + x_1)$ parabole s diralištem u točki $D = (x_1, y_1)$ slijedi da su koordinate točke na tangenti oblika $(x_0, \frac{p}{y_1}(x_0 + x_1))$. Dalje je

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{y_1^2}(x_0 + x_1)^2 - 2px_0 &= \frac{p^2(x_0 + x_1)^2 - 2px_0y_1^2}{y_1^2} = \\ &= \frac{p^2(x_0 + x_1)^2 - 4p^2x_0x_1}{y_1^2} = \frac{p^2(x_0 - x_1)^2}{y_1^2} > 0, \end{aligned}$$

pa je (zbog $x_0 \neq x_1$) tvrdnja dokazana. ■

PROPOZICIJA 4. Iz vanjske točke parabole, koja ne leži na tjemenoj tangenti, mogu se povući točno dvije tangente na parabolu. Iz točke na tjemenoj tangenti može se povući samo jedna tangenta na parabolu.

Dokaz. Neka je $T = (x_0, y_0)$ vanjska točka parabole $y^2 = 2px$, tj. $y_0^2 - 2px_0 > 0$. Neka je $y = kx + l$ jednadžba tangente koja prolazi točkom T , tj. vrijedi $l = y_0 - kx_0$. Uvrstimo li to u uvjet diranja $p = 2kl$, dobit ćemo za koeficijent smjera tangente kvadratnu jednadžbu $2x_0k^2 - 2y_0k + p = 0$. Točkom $T = (x_0, y_0)$, $x_0 \neq 0$ prolaziti će točno dvije tangente parabole ako je diskriminanta D ove kvadratne jednadžbe pozitivna. Kako je

$$\frac{1}{4}D = y_0^2 - 2px_0,$$

to je $D > 0$ ako i samo ako je $y_0^2 - 2px_0 > 0$, tj. ako je T vanjska točka parabole. Za $x_0 = 0$ jednadžba za k postaje linearna, pa se iz točke tjemena tangente može povući samo jedna tangenta na parabolu, i to je upravo tjemena. ■

Primjer 9. Kako glase jednadžbe tangenata povučениh iz točke $T = (3, 4)$ na parabolu $y^2 = 4x$?

Rješenje. Lako se vidi da je T vanjska točka parabole, pa prema Propoziciji 4. postoje dvije tangente povučene iz točke T na tu parabolu. Te se tangente određuju pomoću uvjeta diranja. Neka je $y = kx + l$ tražena tangenta. Kako ona prolazi točkom $T = (3, 4)$, to vrijedi $4 = 3k + l$. Iz $y^2 = 4x$ slijedi $p = 2$, pa uvjet diranja $p = 2kl$ daje $kl = 1$. Dakle, k i l su rješenja sustava

$$l = 4 - 3k, \quad kl = 1.$$

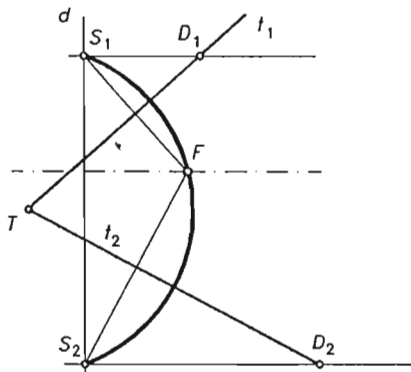
Iz ovih jednadžbi slijedi $3k^2 - 4k + 1 = 0$, a njezini korijeni su $k_1 = 1$, $k_2 = 1/3$, što povlači $l_1 = 1$, $l_2 = 3$. Dakle, jednadžbe tangenata glase $y = x + 1$ i $y = \frac{1}{3}x + 3$, odnosno $x - y + 1 = 0$ i $x - 3y + 9 = 0$. ■

Primjer 10. Odredite sve točke ravnine iz kojih se na parabolu mogu povući dvije okomite tangente.

Rješenje. Neka su $T = (\xi, \eta)$ koordinate točke iz koje se na parabolu $y^2 = 2px$ mogu povući dvije okomite tangente. Neka je $y = kx + l$ jednadžba tangente. Kako tangenta prolazi točkom T , to vrijedi $\eta = k\xi + l$, što, uvršteno u uvjet diranja, daje $2\xi k^2 - 2k\eta + p = 0$. Neka su k_1 i k_2 korijeni ove jednadžbe. Tangente će biti okomite ako

je $k_1 \cdot k_2 = -1$, tj. ako je (Viétina formula) $\frac{p}{2\xi} = -1$, tj. $\xi = -\frac{p}{2}$, a odatle slijedi da je točka T na direktrisi parabole. Dakle, skup svih točaka ravnine iz kojih se na parabolu mogu povući dvije okomite tangente jest direktrisa te parabole. ■

Primjer 11. Na sl. 303. nacrtan je fokus F parabole, njezina direktrisa d i točka T . Konstruirajte tangente parabole povučene iz točke T kao i pripadna dirališta.



Sl. 303.

Rješenje. Konstruirat ćemo suprotišta S_1 i S_2 fokusa s obzirom na one tangente t_1 i t_2 parabole koje prolaze točkom T . Kako su S_1 i S_2 zrcalne slike fokusa F s obzirom na tangente t_1 i t_2 , to one leže na kružnici kojoj je središte u T , a polumjer joj je jednak \overline{TF} . U drugu ruku S_1 i S_2 leže na direktrisi (Propozicija 2) pa su te točke sjecišta kružnice i direktrise. Tangente t_1 i t_2 su tada okomice spuštene iz T na pravce FS_1 i FS_2 . Povučemo li točkama S_1 i S_2 paralele sa osi parabole, one sijeku t_1 i t_2 u traženim diralištima D_1 i D_2 . ■

Tangente povučene iz točke T na parabolu mogu se odrediti i pomoću polare. Polarom točke $P = (x_0, y_0)$ s obzirom na parabolu $y^2 = 2px$ zovemo pravac p zadan jednadžbom

$$yy_0 = p(x + x_0). \quad (7)$$

Točku P zovemo **polom** pravca p . Tako smo definirali preslikavanje koje svakoj točki ravnine pridružuje neki pravac te ravnine. To preslikavanje zovemo polarnim preslikavanjem ili polaritetom. Očito je svakoj točki parabole pridružena upravo njezina tangenta.

Primjer 12. Odredite polaru fokusa parabole $y^2 = 2px$.

Rješenje. Uvrstimo li u jednadžbu polare (37) koordinate fokusa $x_0 = \frac{p}{2}$, $y_0 = 0$, dobit ćemo $p(x + \frac{p}{2}) = 0$, a odatle, zbog $p \neq 0$, slijedi $x + \frac{p}{2} = 0$. Polara fokusa parabole je dakle njezina direktrisa. ■

Primjer 13. Odredite koordinate pola pravca $x - 2y - 2 = 0$ s obzirom na parabolu $y^2 = 3x$.

Rješenje. Iz jednadžbe parabole nalazimo $p = \frac{3}{2}$. Ako su $P = (x_0, y_0)$ koordinate pola, onda prema (7) jednadžba polare glasi $yy_0 = \frac{3}{2}(x+x_0)$, odnosno $3x - 2y_0y + 3x_0 = 0$. Ova jednadžba i jednadžba $x - 2y - 2 = 0$ moraju reprezentirati isti pravac, a to će biti onda ako vrijedi $\frac{3}{1} = \frac{-2y_0}{-2} = \frac{3x_0}{-2}$. Odavde je $y_0 = 3$ i $x_0 = -2$. Pol tog pravca je dakle u točki $P = (-2, 3)$. ■

Primjer 14. Dokažite: ako polovi pravaca s obzirom na parabolu leže na jednom pravcu, onda pripadne polare prolaze istom točkom i ta je točka pol pravca na kojemu leže polovi.

Rješenje. Pretpostavimo da polovi leže na pravcu $y = ax + b$ i neka su $P_i = (x_i, ax_i + b)$ tri različite točke tog pravca. Ako je $y^2 = 2px$ jednadžba parabole, onda pripadne polare p_i imaju jednadžbe $px - (ax_i + b)y + px_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Te će polare prolaziti istom točkom ako i samo ako determinanta

$$D = \begin{vmatrix} p & -(ax_1 + b) & px_1 \\ p & -(ax_2 + b) & px_2 \\ p & -(ax_3 + b) & px_3 \end{vmatrix}$$

iščezava. Ako u ovoj determinanti elemente prvog retka oduzmemo od elemenata drugoga i trećeg retka, i razvijemo determinantu po elementima prvog stupca, odmah nalazimo da je $D = 0$. Ovim je prva tvrdnja dokazana. Da dokažemo drugu tvrdnju, odredimo točku u kojoj se sijeku ti pravci. Nađimo sjecište dvaju od njih, recimo pravaca $px - (ax_i + b)y + px_i = 0$, $i = 1, 2$. Lako se vidi da se oni sijeku u točki $P = (\frac{b}{a}, \frac{p}{a})$, a polara te točke ima jednadžbu $\frac{p}{a}y = p(x + \frac{b}{a})$, pa odavde, zbog $p \neq 0$, slijedi $y = ax + b$, i tvrdnja je dokazana. ■

Geometrijsko značenje polare dano je ovom propozicijom.

PROPOZICIJA 5. Polara one vanjske točke parabole, koja ne leži na tjemenoj tangenti, spojnica je dirališta tangenata povučениh iz te točke na parabolu.

Dokaz. Neka su $D_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ dirališta tangenata povučениh iz točke $T = (x_0, y_0)$ na parabolu $y^2 = 2px$. Jednadžbe tih tangenata glase $yy_i = p(x + x_i)$, $i = 1, 2$. Kako te tangente prolaze točkom T , to vrijedi $y_0y_i = p(x_0 + x_i)$, $i = 1, 2$, a iz ovih jednadžbi zaključujemo da dirališta D_i , $i = 1, 2$ tangenata leže na polari $yy_0 = p(x + x_0)$ točke T . Ovim je tvrdnja dokazana. ■

Primjer 15. Neka se pomoću polare odrede jednadžbe tangenata povučениh iz točke $T = (-2, 1)$ na parabolu $y^2 = 4x$.

Rješenje. Jednadžba polare točke T glasi $y = 2(x - 2)$. Prema Propoziciji 5. dirališta tangenata su rješenje sustava jednadžbi $y = 2(x - 2)$, $y^2 = 4x$. Lako se nalazi da je $D_1 = (4, 4)$, $D_2 = (1, -2)$, pa jednadžbe tangenata glase $x - 2y + 4 = 0$ i $x + y + 1 = 0$. ■

7.4. Dijametri parabole

U prethodnim smo razmatranjima vidjeli da su dijametri elipse i hiperbole polovišta paralelnih tetiva. To je razlog da i skup polovišta paralelnih tetiva nazovemo **dijametrima parabole**. O dijametrima parabole govori ova propozicija.

PROPOZICIJA 6. *Dijametri parabole su pravci paralelni s njezinom osi.*

Dokaz. Da to dokažemo, presijecimo parabolu $y^2 = 2px$ pramenom paralelnih pravaca $y = kx + l$, gdje je $k \neq 0$ čvrst realan broj, a $l \in \mathbb{R}$ varijabilni parametar. Ordinate sjecišta S_1 i S_2 parabole i pravaca tog pramena korijeni su jednadžbe koja se dobije eliminacijom apscise x iz tih dviju jednadžbi. Ona glasi

$$ky^2 - 2py + 2pl = 0.$$

Označimo sa y_1 i y_2 korijene te jednadžbe. Ordinata polovišta P tetive $\overline{S_1S_2}$ jednaka je $y_P = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$. Iz kvadratne jednadžbe dobivene pomoću Viétine formule slijedi $y_P = p/k$. Vidimo, dakle, da bez obzira koji pravac pramena uzmemo (y_P ne ovisi o parametru l) te ordinate imaju uvijek istu vrijednost. Prema tome, polovišta tetiva leže na pravcu $ky - p = 0$, tj. na paraleli s osi parabole. ■

Napomena 6. Prije smo dijametre elipse i hiperbole definirali kao one tetive koje prolaze kroz njihov centar. Može se pokazati da se graničnim procesom, kada se centar tih krivulja giba po glavnoj osi u beskonačnost, u oba slučaja dobiva parabola. Pri tom graničnom procesu ti dijametri elipse i hiperbole postaju paralelni s osi parabole. To je i razlog što se dijametri parabole definiraju onako kako je to i učinjeno.

Primjer 16. Dana je parabola $y^2 = 5x$ i njezin dijametar $y - 4 = 0$. Kako glasi jednadžba pramena paralela na kojima leže tetive koje taj dijametar raspolavlja?

Rješenje. Traženi pramen je oblika $y = kx + l$, gdje je $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$ čvrst broj, a $l \in \mathbb{R}$ varijabilni parametar. Odredimo ordinate sjecišta tog pramena i parabole. Iz jednadžbe pramena je $x = \frac{y-l}{k}$, pa ako to uvrstimo u jednadžbu parabole, dobit ćemo $ky^2 - 5y + 5l = 0$. Ako su y_1 i y_2 korijeni te jednadžbe, onda iz nje slijedi $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5}{2k}$. Kako dijametar ima jednadžbu $y - 4 = 0$, to je $\frac{5}{2k} = 4$, pa je $k = \frac{5}{8}$. Jednadžba pramena dakle glasi $y = \frac{5}{8}x + l$, odnosno $5x - 8y + 8l = 0$. ■

Primjer 17. Parabola je presječena pramenom paralelnih pravaca. Što je skup polara pravaca tog pramena?

Rješenje. Nađimo polare pramena paralela zadanog sa $kx - y + l = 0$, gdje je $k \neq 0$ čvrst realan broj, a $l \in \mathbb{R}$ parametar familije pramena. Jednadžba polare parabole glasi $px - yy_0 + px_0 = 0$. Polovi pramena pravaca određeni su sa $\frac{p}{k} = \frac{-y_0}{-1} = \frac{px_0}{l}$. Odavde je $x_0 = \frac{l}{k}$, $y_0 = \frac{p}{k}$, dakle oni leže na pravcu $ky - p = 0$, tj. upravo na dijametru koji je pridružen tom pramenu paralela. ■

7.5. Parabola kojoj je os paralelna s jednom od koordinatnih osi

Promotrimo najprije slučaj parabole kojoj je os paralelna s osi x . Očito svaku takvu parabolu možemo dobiti translacijom parabole $y^2 = 2px$ ($p > 0$) za neki vektor. Uzmimo translaciju koja ishodište O koordinatnog sustava preslikava u točku $O' = (a, b)$. Tom se translacijom parabola $y^2 = 2px$ preslikava u parabolu

$$(y - b)^2 = 2p(x - a), \quad (8)$$

kojoj je tjeme u točki $O' = (a, b)$, os joj leži na pravcu $y - b = 0$, a fokus je u točki $F = \left(\frac{p}{2} + a, b\right)$. Direktrisa te parabole je pravac $x = a - \frac{p}{2}$ (nacrtajte sliku i provjerite).

Svi zadaci analitičke geometrije u vezi s parabolom (8) rješavaju se tako da se riješe za pripadnu parabolu $y^2 = 2px$ i zatim se koristi translacija koja tu parabolu preslikava u parabolu (8).

Primjer 18. Odredite onu tangentu parabole $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$, koja je paralelna s pravcem $x - y - 7 = 0$.

Rješenje. Napišimo najprije jednadžbu zadane parabole u obliku (8). Imamo redom

$$(y - 3)^2 - 9 = 4x - 17,$$

odnosno

$$(y - 3)^2 = 4(x - 2).$$

Ta je parabola nastala translacijom parabole $y^2 = 4x$ za vektor $2\vec{i} + 3\vec{j}$. Kako translacija pravac preslikava u paralelni pravac, to treba naći onu tangentu parabole $y^2 = 4x$ koja je paralelna s pravcem $x - y - 7 = 0$. Tražena tangenta dobit će se tada translacijom te tangente za taj isti vektor. Koeficijent smjera zadanog pravca jednak je $k = 1$, pa uvjet dodira $p = 2kl$ daje $2 = 2l$, tj. $l = 1$, pa njezina jednadžba glasi $y = x + 1$. Translacija tog pravca za vektor $2\vec{i} + 3\vec{j}$ ima jednadžbu

$$y + 3 = x - 2 + 1, \quad \text{odnosno} \quad x - y + 2 = 0.$$

Translacijom parabole $y^2 = -2px$, $p > 0$, koja ishodište O koordinatnog sustava preslikava u točku $O' = (a, b)$ dobije se parabola

$$(y - b)^2 = -2p(x - a), \quad (8')$$

kojoj je os također paralelna s osi x i leži na pravcu $y - b = 0$. Tjeme te parabole u točki O' , fokus ima koordinate $F = \left(a - \frac{p}{2}, b\right)$, a direktrisa je pravac $x = a + \frac{p}{2}$ (nacrtajte sliku i provjerite).

Primjer 19. Odredite jednadžbe tangenata povučenih iz točke $T = (5, -1)$ na parabolu $y^2 + 9x - 4y - 14 = 0$.

Rješenje. Kao i u prethodnom primjeru nalazimo da se jednadžba zadane parabole može napisati u obliku $(y - 2)^2 = -9(x - 2)$. Ta je parabola nastala translacijom parabole $y^2 = -9x$ za vektor $2\vec{i} + 2\vec{j}$. Kako je točka $T = (5, -1)$ dobivena translacijom točke $T' = (3, -3)$ za isti vektor, to zadatak treba riješiti za parabolu $y^2 = -9x$ i točku $T' = (3, -3)$. Međutim, parabola $y^2 = -9x$ nastaje zrcaljenjem parabole $y^2 = 9x$ na osi y , a

Kako se tim zrcaljenjem točka T' preslikava u $T'' = (-3, -3)$, to smo konačno zadatak sveli na određivanje tangenata provučenih iz točke T'' na parabolu $y^2 = 9x$. Pomoću uvjeta diranja nalazimo da jednačbe tih tangenata glase $3x - 2y + 3 = 0$, $x + 2y + 9 = 0$. Tražene tangente dobit ćemo tako da sve tangente zrcalimo na osi y i zatim transliramo za vektor $2\vec{i} + 2\vec{j}$. Zrcaljenjem dobivamo $3x + 2y - 3 = 0$, $x - 2y - 9 = 0$ (naprosto se x zamijeni sa $-x$). Translacijom ovih pravaca za vektor $2\vec{i} + 2\vec{j}$ dobivamo $3(x - 2) + 2(y - 2) - 3 = 0$, $x - 2 - 2(y - 2) - 9 = 0$. Dakle, tražene tangente imaju jednačbe $3x + 2y - 13 = 0$, $x - 2y - 7 = 0$. ■

Parabole kojima je os y os simetrije dobiju se od parabola $y^2 = 2px$ i $y^2 = -2px$, $p > 0$, zrcaljenjem na pravcu $y = x$. Njihove jednačbe glase (naprosto se y zamijeni sa x i x sa y)

$$y = \frac{1}{2p} x^2 \quad \text{i} \quad y = -\frac{1}{2p} x^2. \quad (9)$$

Fokusi ovih parabola su u točkama $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ i $F = \left(0, -\frac{p}{2}\right)$. Tjeme im je u ishodištu, a direktrise su pravci $y + \frac{p}{2} = 0$ i $y - \frac{p}{2} = 0$.

Napokon parabole kojima su osi paralelne s osi y dobivaju se translacijom parabola (9) za neki vektor, recimo $a\vec{i} + b\vec{j}$. Nihove jednačbe glase

$$y - b = \frac{1}{2p}(x - a)^2 \quad \text{i} \quad y - b = -\frac{1}{2p}(x - a)^2. \quad (10)$$

Os parabola (10) je pravac $x - a = 0$. Tjeme im je u točki $O' = (a, b)$. Fokusi su im redom u točkama $F = \left(a, \frac{p}{2} + b\right)$ i $F = \left(a, b - \frac{p}{2}\right)$, a direktrise su redom pravci $y + \frac{p}{2} - b = 0$ i $y - \frac{p}{2} - b = 0$ (nacrtajte sliku i provjerite).

Primjer 20. Odredite koordinate tjemena i fokusa i jednačbu direktrise parabole $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a > 0$.

Rješenje. Svedimo jednačbu na oblik (10). Imamo redom:

$$\begin{aligned} y &= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x \right) + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Konačno je

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

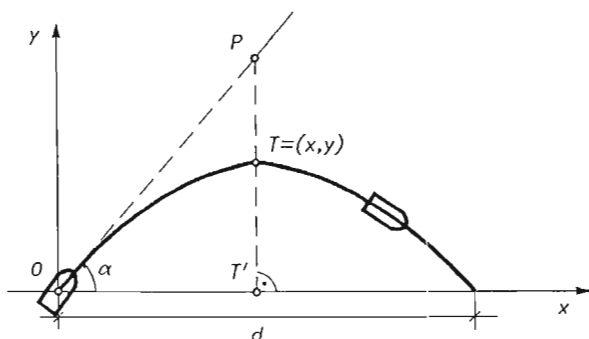
Usporedba sa (10) pokazuje da je tjeme parabole u točki

$$O' = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

i da je $a = \frac{1}{2p}$, pa je $p = \frac{1}{2a}$. Stoga je fokus u točki $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} + \frac{1}{4a}\right)$, dakle u $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$, a direktrisa ima jednadžbu $y = \frac{4ac - b^2}{4a} - \frac{1}{4a}$, tj. $y - \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} = 0$. ■

Primjer 21. (Kosi hitac.) Dokažite da je staza topovskog zrna parabola uz uvjet da se otpor zraka zanemari.

Rješenje. Identificirat ćemo zrno točkom, recimo njegovim težištem. U trenutku $t = 0$ neka je zrno u ishodištu O koordinatnog sustava, a koordinatna ravnina Oxy neka se podudara s ravninom leta zrna. Neka je os x pravac u kojem ta ravnina siječe horizontalnu ravninu kroz O . Označimo sa α kut pod kojim je zrno ispaljeno (sl. 304). Staza zrna je tada neka krivulja za koju treba pokazati da je parabola. Neka je v_0 brzina



Sl. 304.

zrna u momentu $t = 0$ (tzv. početna brzina). Da na zrno ne djeluje sila teža nakon t sekundi, zrno bi se, krećući jednoliko po pravcu, našlo u točki P . Kako je $|OP| = v_0 t$, to iz pravokutnog trokuta $\triangle OT'P$ vidimo da su njezine koordinate $P = (v_0 t \cos \alpha, v_0 t \sin \alpha)$. Međutim, na zrno djeluje i sila teža. Neka je njezino ubrzanje jednako g . Zbog njezinog djelovanja nakon t sekundi zrno je u $T = (x, y)$, gdje je $|PT| = \frac{g}{2} t^2$ (prosti pad). Dakle, koordinate točke T jesu

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2.$$

Ovo su parametarske jednadžbe krivulje po kojoj se zrno gibao. Eliminacijom parametra t dobiva se

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

pa se zaista radi o jednadžbi parabole. Iz oblika

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \left(x - \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

razabiremo da je maksimalna visina hica h_m (uz fiksini α) jednaka ordinati tjemena, tj.

$$h_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Lako se vidi da je daljina hica d uz čvrsti α dana sa

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Iz ove formule se vidi da je domet maksimalan za $\sin 2\alpha = 1$, tj. ako je $\alpha = 45^\circ$. Maksimalni domet d_m jednak je $d_m = \frac{v_0^2}{g}$, a visina hica je $\frac{v_0^2}{4g}$. Maksimalna visina hica postiže se za $\alpha = 90^\circ$, tj. kod vertikalnog hica, i iznosi $\frac{v_0^2}{2g}$.

Primjer 22. Odredite onu tangentu parabole $x^2 - 2x + 8y - 7 = 0$ koja je paralelna s pravcem $x - y = 0$.

Rješenje. Svedimo jednadžbu na oblik (10). Lako se nalazi da ona glasi $y - 1 = -\frac{1}{8}(x - 1)^2$. Ta je parabola nastala translacijom parabole $y = -\frac{1}{8}x^2$ za vektor $\vec{i} + \vec{j}$, a ova zrcaljenjem parabole $y^2 = -8x$ na pravcu $y = x$, a ova pak zrcaljenjem parabole $y^2 = 8x$ na osi y . Translacijom za vektor $-\vec{i} - \vec{j}$, kao i zrcaljenjem na pravcu $y = x$, pravac $x - y = 0$ preslikava se u samog sebe. Zrcaljenjem tog pravca na osi y dobijemo pravac $x + y = 0$, pa zadatak najprije riješimo za parabolu $y^2 = 8x$ i pravac $x + y = 0$. Na standardni način nalazimo (pomoću uvjeta dodira) da je $x + y + 2 = 0$ ona tangenta parabole $y^2 = 8x$ koja je paralelna s pravcem $x + y = 0$. Traženo rješenje ćemo dobiti tako da pravac $x + y + 2 = 0$ najprije zrcalimo s obzirom na os y , zatim s obzirom na pravac $y = x$ i onda transliramo za vektor $\vec{i} + \vec{j}$. Zrcaljenjem tog pravca s obzirom na os y dobijemo pravac $-x + y + 2 = 0$, njegovim zrcaljenjem s obzirom na pravac $y = x$ dobijemo pravac $-y + x + 2 = 0$, a translacijom za vektor $\vec{i} + \vec{j}$ dobijemo pravac $-(y - 1) + (x - 1) + 2 = 0$, pa je traženo rješenje pravac $x - y + 2 = 0$. ■

7.6. Vršne (tjemene) jednadžbe krivulja 2. reda

Vidjeli smo da su jednadžbe elipse, hiperbole i parabole algebarske jednadžbe drugog reda, pa zato te krivulje zovemo još i **krivuljama 2. reda**.

Nas će zanimati jednadžbe tih krivulja u jednom specijalnom položaju prema Kartezijevom koordinatnom sustavu, i to u položaju kad im je jedno tjeme u ishodištu, a os y je tjemena tangenta.

Uzmimo elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i translirajmo je za vektor $a\vec{i}$. Tada je lijevo tjeme elipse u ishodištu koordinatnog sustava, a os y je tjemena tangenta (sl. 305). Jednadžba translirane elipse glasi

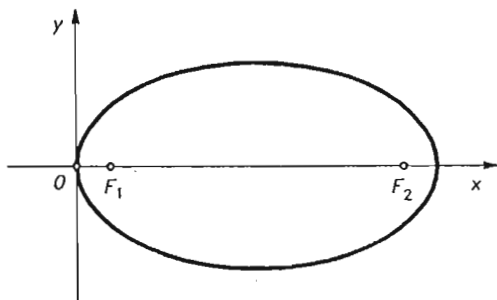
$$b^2(x - a)^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Napišimo ovu jednadžbu ovako

$$y^2 = 2 \cdot \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

Znamo da je poluparametar elipse jednak $p = \frac{b^2}{a}$, pa konačno dobivamo

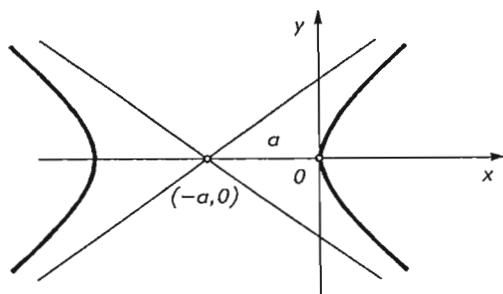
$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2. \quad (11)$$



Sl. 305.

Jednadžbu (11) zovemo **vršnom** ili **tjemenom** jednadžbom elipse.

Nađimo sada i tjemenu jednadžbu hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Zato je translirajmo za vektor $-a\vec{i}$. Tada je desno tjeme hiperbole u ishodištu koordinatnog sustava, a os y je tjemena tangenta (sl. 306). Jednadžba translirane hiperbole



Sl. 306.

glasi

$$b^2(x+a)^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

odnosno

$$y^2 = 2 \cdot \frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2,$$

kako je $p = \frac{b^2}{a}$ poluparametar i hiperbole, to je

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2 \quad (12)$$

vršna ili tjemena jednadžba hiperbole.

Jednadžba parabole

$$y^2 = 2px \quad (13)$$

već je ujedno i njezina vršna jednadžba.

Usporedimo li jednadžbe (11), (12) i (13) opažamo njihovu određenu srodnost. Vršna jednadžba elipse dobije se iz vršne jednadžbe parabole tako da se desnoj strani oduzme član $\frac{p}{a}x^2$, a hiperbole tako da se doda član $\frac{p}{a}x^2$. Odatle i nazivi tih krivulje koje dolaze iz grčkog jezika, a nalazimo ih u Apolonijevu djelu *Konike*. Riječ parabola izvedena je iz grčke riječi *παραβολή* (*parabole*), što znači uspoređujem, riječ elipsa izvedena je iz *ἑλλειψις* (*elleipsis*), što znači nedostatak – manjak, i napokon riječ hiperbola izvedena je iz *ὑπερβολή* (*hiperbole*), što znači prebacivanje – višak.

Primjer 23. Odredite poluosi, fokuse i direktrise krivulje $y^2 = 6x + 8x^2$.

Rješenje. Očito se radi o hiperboli. Usporedba s jednadžbom (12) pokazuje da je $2p = 6$, $\frac{p}{a} = 8$. Kako je $p = \frac{b^2}{a}$, to slijedi $b^2 = 3a$, $b^2 = 8a^2$. Odavde slijedi da su poluosi hiperbole jednake $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Kako je fokalna udaljenost $e = \sqrt{a^2 + b^2}$, tj. $e = \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{9}{8}} = \frac{9}{8}$, to je apscisa lijevog fokusa jednaka $-\frac{9}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{3}{2}$, pa je taj fokus u točki $F_1 = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$. Slično se nalazi da je desni fokus u točki $F_2 = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$. Numerički ekscentricitet te hiperbole jednak je $e = \frac{e}{a} = 3$. Lijeva direktrisa siječe os x u točki $-\frac{a}{e} - a = -\frac{1}{2}$, pa njezina jednadžba glasi $2x + 1 = 0$. Slično se nalazi da desna direktrisa ima jednadžbu $4x + 1 = 0$. ■

7.7. Jednadžba krivulje 2. reda određena fokusom i direktrisom. Zajednička polarna jednadžba krivulja 2. reda

Vidjeli smo da su točke i elipse i hiperbole imale svojstvo da im je omjer udaljenosti od fokusa i od direktrise konstantan i jednak numeričkom ekscentricitetu e tih krivulja. Za elipsu je $0 < e < 1$, a za hiperbolu $e > 1$. Kod parabole taj je omjer jednak 1. To pokazuje da se krivulje 2. reda mogu definirati kao krivulje kod kojih je omjer udaljenosti od jedne čvrste točke (fokusa) i jednog čvrstog pravca (direktrise) konstantan i jednak e . Ako je $0 < e < 1$, onda krivulju zovemo elipsom, ako je $e > 1$ hiperbolom, a ako je $e = 1$ parabolom.

Naš hrvatski matematičar Dubrovčanin Ruđer Bošković⁵ na taj je način definirao krivulje drugog reda i polazeći od te definicije analitički izveo njihova svojstva. Ta se definicija krivulja 2. reda danas zove Pappus-Boškovićeva definicija, jer je Pappus istu stvar napravio sintetičkim sredstvima. Stoga i nije čudno da je i Descartes upravo na Pappusovim zadacima isprobavao dosege svoje metode, tj. analitičke geometrije.

Izvedimo sada opću jednadžbu krivulje 2. reda određenu direktrisom, fokusom i numeričkim ekscentricitetom $e > 0$.

⁵ Ruđer-Josip Bošković (1711 – 1787), hrvatski matematičar, fizičar, astronom i filozof.

Ako označimo sa r duljinu radijvektora \overline{FT} točke $T = (x, y)$, a sa d udaljenost točke T od zadane direktrise, onda, prema Pappus-Boškovićevoj definiciji, vrijedi

$$r = \varepsilon \cdot d. \quad (14)$$

Ako fokus ima koordinate $F = (x_0, y_0)$, a direktrisa jednadžbu $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, onda je

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

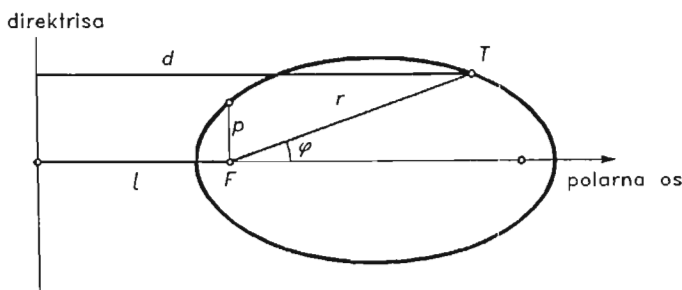
Ako ove vrijednosti uvrstimo u (14), nakon sređivanja dobivamo

$$(A^2 + B^2)[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \varepsilon^2(Ax + By + C)^2 = 0.$$

Zbog $A^2 + B^2 \neq 0$ vidimo da se zaista radi o krivulji 2. reda.

Izvedimo sada i analognu jednadžbu krivulje 2. reda u polarnim koordinatama.

Uzmimo krivulju 2. reda i neka je ishodište polarnoga koordinatnog sustava u njenom fokusu, polarna os neka je okomita na direktrisu i orijentirana od direktrise (sl. 307). Označimo sa l udaljenost fokusa od direktrise, a sa d udaljenost točke



Sl. 307.

$T = (r, \varphi)$ od direktrise. Neka je $r = |FT|$ duljina radijvektora točke T . Na sl. 307. ilustrira se dokaz na slučaju elipse. Na sl. 307. razabiremo da je $d = l + r \cos \varphi$, pa ako to uvrstimo u (14), dobivamo $r = \varepsilon(l + r \cos \varphi)$, a odavde je

$$r = \frac{\varepsilon l}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Preostaje da se odredi l . Za to uočimo da je za $\varphi = \pi/2$ radijvektor te točke $r = p$, tj. on je jednak poluparametru krivulje. Uvrstimo li u prethodnu jednadžbu $\varphi = \pi/2$ i $r = p$, dobit ćemo da je $l = \frac{p}{\varepsilon}$, pa je

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (15)$$

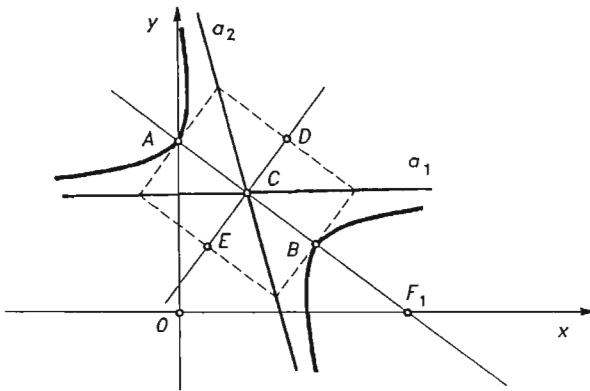
Jednadžba (15) zove se **zajednička jednadžba** krivulja 2. reda u polarnim koordinatama.

Primjer 24. Nađite jednadžbu krivulje 2. reda kojoj je fokus u točki $F_1 = (3, 0)$, pravac $y = x$ direktrisa, a $\epsilon = 2$ numerički ekscentricitet. Skicirajte graf te krivulje.

Rješenje. Neka je $T = (x, y)$ bilo koja točka te krivulje. Udaljenost točke T od fokusa jednaka je $r = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$, a njezina udaljenost od pravca $x - y = 0$ (direktrise) jednaka je $d = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$. Uvrstimo li to u (14), uzevši u obzir da je $\epsilon = 2$, (zbog $\epsilon > 1$ vidimo da se radi o hiperboli), dobivamo njezinu jednadžbu

$$x^2 - 4xy + y^2 + 6x - 9 = 0.$$

Glavna os krivulje nalazi se na pravcu kroz F okomitom na direktrisu $x - y = 0$. Jednadžba glavne osi glasi $y = 3 - x$. Tjemena hiperbole nalaze se u sjecištima tog pravca i krivulje. Uvrstimo li u jednadžbu krivulje $y = 3 - x$, dobit ćemo jednadžbu $6x^2 - 12x = 0$. Odavde je $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, pa slijedi $y_1 = 3$, $y_2 = 1$. Tjemena su dakle u točkama $A = (0, 3)$, $B = (2, 1)$. Centar hiperbole je u polovištu C dužine AB , dakle u točki $C = (1, 2)$. Fokalna udaljenost jednaka je $e = |CF| = 2\sqrt{2}$, a duljina glavne poluosi jednaka je $a = |CB| = \sqrt{2}$. Iz $e^2 = a^2 + b^2$ nalazimo duljinu sporedne poluosi $b = \sqrt{6}$. Sada možemo skicirati graf te hiperbole.



Sl. 308.

Na sl. 308. ucrtana je os, točke A, B i C . Sporedna os prolazi kroz C i okomita je na glavnu os AB . Na sporednu os nanese se od točke C na jednu i drugu stranu dužina $\sqrt{6}$, tako da je $|CD| = |CE| = \sqrt{6}$. Konstruiraju se asimptote a_1 i a_2 i skicira graf hiperbole.

Primjer 25. Pokažite da je $r = \frac{144}{13 - 5 \cos \varphi}$ polarna jednadžba elipse i nađite duljine njezinih poluosi.

Rješenje. Napišimo zadanu jednadžbu u obliku

$$r = \frac{\frac{144}{13}}{1 - \frac{5}{13} \cos \varphi}.$$

Usporedba ove jednadžbe sa (15) daje

$$\epsilon = \frac{5}{13}, \quad p = \frac{144}{13}.$$

Kako je $0 < \epsilon < 1$, to je krivulja elipsa.

Oдавде zbog $p = \frac{b^2}{a}$ i $\epsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ slijedi

$$\frac{b^2}{a} = \frac{144}{13}, \quad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{5}{13}.$$

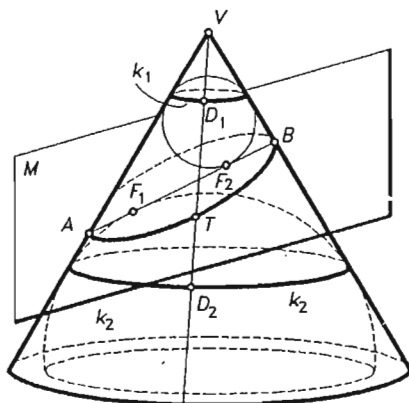
Iz ovog sustava lako slijedi $a = 13$ i $b = 12$. ■

7.8. Krivulje 2. reda kao presjeci stošca ravninom

Pokazat ćemo sada da se krivulje 2. reda mogu dobiti kao presjeci stošca ravninama. Iz tog se razloga te krivulje zovu čunjosječnice ili konike. Razmotrimo najprije slučaj elipse.

PROPOZICIJA 7 (Dandelinov⁶ teorem). *Ako uspravni kružni stožac presječemo ravninom koja siječe sve njegove izvodnice i ne prolazi vrhom stošca, onda je presječna krivulja ili kružnica (ako je ravnina okomita na os stošca) ili elipsa.*

Dokaz. Na slici 309. skiciran je presjek stošca ravninom M koja ne prolazi vrhom, siječe sve izvodnice stošca i kosa je prema njegovoj osi.



Sl. 309.

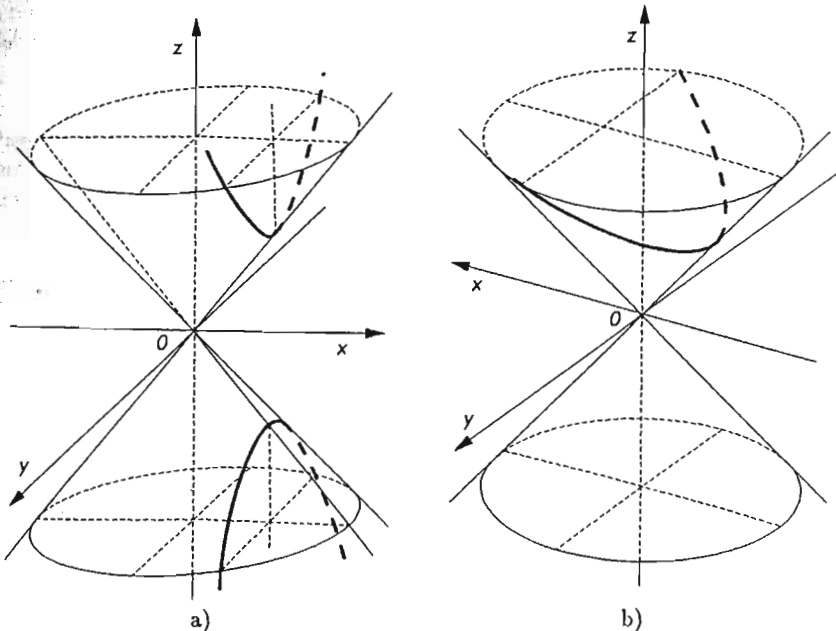
Upišimo u taj stožac kuglu K_1 koja dira ravninu M odozgo i kuglu K_2 koja dira M odozdo. Neka K_1 dira M u točki F_2 , a K_2 u točki F_1 . Pokazat ćemo da je presječna krivulja elipsa i da su točke F_1 i F_2 njezina žarišta. U tu svrhu uzмимо na

⁶G.P. Dandelin (1794 - 1849) belgijski matematičar i inženjer.

presječnoj krivulji bilo koju točku T . Gornja polukugla dira stožac uzduž kružnice k_1 , a donja uzduž kružnice k_2 . Spojimo vrh V stošca sa T . Ta izvodnica siječe k_1 u D_1 , a k_2 u D_2 . Kako su duljine tangenata povučenih na kuglinu plohu iz točke izvan nje jednake duljine, to je $|TF_2| = |TD_1|$ i $|TF_1| = |TD_2|$. Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo $|TF_1| + |TF_2| = |TD_1| + |TD_2|$, dakle $|TF_1| + |TF_2| = |D_1D_2|$. D_1D_2 je izvodnica uspravnoga krunjeg stošca kojemu je donja osnovka krug omeđen kružnicom k_2 , a gornja krug omeđen kružnicom k_1 , pa je stoga $|D_1D_2| = 2a$, gdje je $a > 0$ realna konstanta. Stoga je $|TF_1| + |TF_2| = 2a$, za svaku točku T presječne krivulje, pa je ta krivulja elipsa s fokusima F_1 i F_2 . ■

Napomena 7. Kugle korištene u ovom dokazu uobičajeno je zvati **Dandelinovim kuglama**.

Napomena 8. Lako se vidi: ako se dvostruki uspravni kružni stožac presiječe ravninom koja ne prolazi njegovim vrhom i paralelna je s osi stošca, onda je presjek hiperbola, a ako se presiječe ravninom koja je paralelna s jednom izvodnicom stošca, onda je presjek parabola (sl. 310.a i 310.b). Ako se pak takav stožac presiječe ravninom koja prolazi kroz os stošca, onda je presjek par ukrštenih pravaca, pa stoga i takav par pravaca valja smatrati konikama, tj. krivuljama 2. reda. Očito se posebnim odabirom presječnih ravnina dobivaju još dvostruki pravac i par konjugirano imaginarnih pravaca i točaka, pa i njih valja smatrati krivuljama 2. reda. Više o tome bit će riječi u narednom odjeljku o općoj teoriji krivulja 2. reda.



Sl. 310.

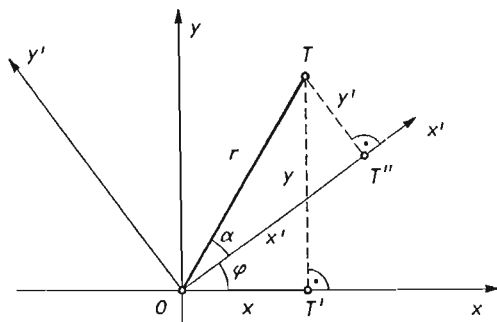
§ 8. Opća teorija krivulja 2. reda

8.1. Transformacija koordinata. Algebarske i transcendentne krivulje

U sustavnom proučavanju krivulja potrebno ih je razvrstati prema njihovim određenim svojstvima, tj. klasificirati. Dakako, ta će se klasifikacija u analitičkoj geometriji provoditi pomoću njihovih jednadžbi i to u pravokutnim Kartezijevim koordinatama.

Međutim, jednadžba neke krivulje ovisit će ne samo o krivulji, već i o njezinu položaju prema koordinatnom sustavu. Prema tome, klasifikaciju možemo provoditi prema onim svojstvima koja ne ovise o izboru koordinatnog sustava.

Stoga pogledajmo koja je veza između koordinata iste točke u dva desna koordinatna sustava $(O; \vec{i}, \vec{j})$ i $(O; \vec{i}', \vec{j}')$ (sl. 311) i neka je crtani sustav zakrenut prema necrtanom u pozitivnom smislu za kut φ . Označimo osi tih sustava kao na sl. 311.



Sl. 311.

Neka je T bilo koja točka ravnine i neka ona u necrtanom sustavu ima koordinate $T = (x, y)$, a u crtanome $T = (x', y')$. Označimo sa r duljinu radijvektora točke T , sa T' ortogonalnu projekciju točke T na os x , a sa T'' njezinu ortogonalnu projekciju na os x' . Neka je α kut koji radijvektor točke T zatvara s orijentiranom osi x' . Na slici razabiremo da je

$$|OT'| = r \cos(\varphi + \alpha), \quad |TT''| = r \sin(\varphi + \alpha).$$

Kako je $x = |OT'|$, $y = |TT''|$, to je

$$x = r \cos(\varphi + \alpha), \quad y = r \sin(\varphi + \alpha),$$

ili

$$x = r \cos \varphi \cos \alpha - r \sin \varphi \sin \alpha, \quad y = r \sin \varphi \cos \alpha + r \cos \varphi \sin \alpha.$$

Iz pravokutnog trokuta $\Delta OT''T$ je

$$|OT''| = r \sin \alpha, \quad |TT''| = r \cos \alpha,$$

što zbog $|OT''| = x'$ i $|TT''| = y'$ daje

$$x' = r \cos \alpha, \quad y' = r \sin \alpha.$$

Uvrstimo li to u gornje jednakosti, dobivamo

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Iz tih jednakosti lako se dobiva da je

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

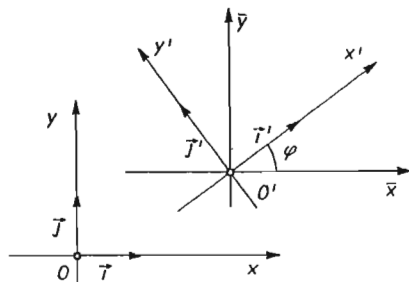
Jednakosti (2) predočuju traženu vezu između koordinata jedne te iste točke u navedena dva koordinatna sustava.

Iz (1) možemo odmah izvesti i jednadžbe rotacije ravnine oko ishodišta. Ako ravninu rotiramo oko ishodišta za kut φ u pozitivnom smislu, onda se tom rotacijom točka koja je u nečtanom sustavu imala koordinate (x', y') preslikava u točku koja u tom istom sustavu ima koordinate (x, y) . Ako u (1) zamijenimo x sa x' i y sa y' , dobit ćemo

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Prema rečenom, ako ravninu rotiramo oko ishodišta za kut φ u pozitivnom smislu, onda se tom rotacijom točka s koordinatama $T(x, y)$ preslikava u točku s koordinatama $T'(x', y')$ koje su određene jednadžbama (3). Stoga jednadžbe (3) zovemo **jednadžbama rotacije ravnine**.

Nadimo sada vezu između koordinata iste točke u dva desna koordinatna sustava Oxy i $O'x'y'$, $O \neq O'$ (sl. 312). Uzmimo opet točku T koja u sustavu Oxy ima koordinate $T = (x, y)$, a u sustavu $O'x'y'$ koordinate $T = (x', y')$. Ako točka O' u



Sl. 312.

necrtanom sustavu ima koordinate $O' = (a, b)$, onda se sustav Oxy može dovesti u položaj $O'x'y'$ tako da se najprije translacija za vektor $a\vec{i} + b\vec{j} = \overrightarrow{OO'}$. Označimo osi sustava (O', \vec{i}', \vec{j}') koji dobivamo translacijom necrtanog sustava sa \bar{x}, \bar{y} (sl. 312) i neka točka T u tom sustavu ima koordinate $T = (\bar{x}, \bar{y})$. Tada vrijedi

$$\bar{x} = x - a, \quad \bar{y} = y - b. \quad (4)$$

Prema (2) tada je

$$\begin{aligned} x' &= \bar{x} \cos \varphi + \bar{y} \sin \varphi, \\ y' &= -\bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Uvrstimo li ovamo (3), dobit ćemo

$$\begin{aligned} x' &= (x - a) \cos \varphi + (y - b) \sin \varphi, \\ y' &= -(x - a) \sin \varphi + (y - b) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Jednadžbe (5) daju vezu između koordinata iste točke u ta dva sustava. Izrazimo li u (5) x i y pomoću x' i y' , dobit ćemo

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + a, \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + b. \end{aligned} \quad (6)$$

Iz (6), slično kao i prije, zaključujemo da je sa

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + a, \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + b, \end{aligned} \quad (7)$$

određena transformacija ravnine koja točki $T(x, y)$ pridružuje točku $T' = (x', y')$ i ta je transformacija kompozicija translacije t za vektor $a\vec{i} + b\vec{j}$ i rotacije r za kut φ , dakle transformacija $f = t \circ r$. To su izometrije koje ne mijenjaju orijentaciju, pa ih stoga zovemo još i **gibanjima** ravnine. Stoga se jednadžbe (6) zovu još i **jednadžbe gibanja**.

Ako je pak sustav $O'x'y'$ lijevi, onda treba najprije zrcaliti sustav Oxy oko osi y , zatim ga translirati za vektor $a\vec{i} + b\vec{j}$ i nakon toga ga rotirati za kut $-\varphi$ da se dobije sustav $Ox'y'$. To znači da jednadžbama transformacije (6) treba zamijeniti x sa $-x$ i φ sa $-\varphi$, pa u tom slučaju dobijemo

$$\begin{aligned} x' &= -x \cos \varphi + y \sin \varphi + a, \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + b. \end{aligned} \quad (7)$$

Jednadžbama (7) određene su one izometrije ravnine koje mijenjaju orijentaciju.

Dakle sa (6) i (7) opisane su *sve* izometrije ravnine.

Bilo kako bilo, vidimo da su transformacije (6) i (7) uvijek linearne, tj. oblika

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{aligned} \quad (8)$$

gdje su a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ realni brojevi. Lako se vidi kako iz (8) slijedi da je obrnuta veza također linearna, tj. oblika

$$\begin{aligned}x &= b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}, \\y &= b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}.\end{aligned}\tag{9}$$

Jednadžbama tipa (8) i (9) vezane su također uvijek i koordinate jedne te iste točke u bilo koja dva Kartezijeva koordinatna sustava u ravnini, pa čak i kad se radi o afinim (kosokutnim) koordinatnim sustavima. Transformacije (8) zovemo **afinim transformacijama** ravnine, a ako je $a_{13} = a_{23} = 0$, onda **linearnim transformacijama**.

Sada smo u stanju da nešto više kažemo o klasifikacijama krivulja u ravnini. Ako je $f(x, y) = 0$ jednadžba bilo koje krivulje u ravnini u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu Oxy , pa ako je $O'x'y'$ bilo koji drugi Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u toj ravnini, onda jednadžba te iste krivulje ima, prema (9), oblik $f(b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}, b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}) = 0$, odnosno $f_1(x', y') = 0$. Vidimo dakle da se jednadžbe jedne te iste krivulje s obzirom na ta dva sustava mogu bitno razlikovati.

Tako dolazimo do ove osnovne podjele krivulja u ravnini. Kažemo da je krivulja **algebarska** ako je u pravokutnom koordinatnom sustavu dana jednadžbom $f(x, y) = 0$, gdje je f polinom u dvije varijable, tj. $f \in \mathbb{R}[x, y]$. Jasno, ako je $f(x, y) = 0$ algebarska krivulja u sustavu Oxy , onda je, prema (8) i $f_1(x, y)$, polinom dviju varijabli, pa je i $f_1(x, y) = 0$ algebarska krivulja. Primjeri algebarskih krivulja jesu pravac, elipsa, hiperbola i parabola.

Za krivulju kažemo da je **transcendentna** ako njezina jednadžba u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu nije algebarska. Primjeri transcendentnih krivulja jesu sinusoida, eksponencijalna krivulja itd. Podjelu krivulja na algebarske i transcendentne uveo je prvi Descartes.

Uočimo da je podjela krivulja na algebarske i transcendentne invarijanta transformacije pravokutnih Kartezijevih koordinata, jer primjenom navedenih transformacija algebarska krivulja uvijek prelazi u algebarsku, a transcendentna u transcendentnu.

Jasno je zašto smo za osnovu klasifikacije uzeli upravo Kartezijev koordinatni sustav. Da smo uzeli polarni koordinatni sustav, onda bismo došli u sljedeću situaciju. U Kartezijevom koordinatnom sustavu pravac ima jednadžbu $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, koja je algebarska, dok taj isti pravac u pridruženom polarnom koordinatnom sustavu (kod kojega se ishodište Kartezijeva sustava podudara s polom polarnog i polarna os s pozitivno orijentiranom osi x) ima jednadžbu $Ar \cos \varphi + Br \sin \varphi + C = 0$, a to je transcendentna jednadžba.

Također klasifikaciju nije moguće dobiti pomoću parametarskih jednadžbi krivulje, jer, na primjer, u pravokutnim Kartezijevim koordinatama jednadžba kružnice glasi $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, a to je algebarska jednadžba, dok parametarske jednadžbe te iste kružnice glase $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, a to su transcendentne jednadžbe. Dakle, na osnovi parametarskih jednadžaba nije moguće ustanoviti je li krivulja algebarska ili transcendentna.

Naglasimo da transcendentne krivulje nije moguće dalje klasificirati zbog obilja i različitosti transcendentnih funkcija.

Kod algebarskih krivulja moguće je, polazeći od njihove jednadžbe

$$f(x, y) = 0, \quad (10)$$

gdje je f polinom u dvjema varijablama, izvesti daljnju klasifikaciju.

Za algebarsku krivulju kažemo da je n -tog reda ako je njezina jednadžba (10) u Kartezijevom koordinatnom sustavu algebarski polinom n -tog reda.

Prema toj definiciji pravac je algebarska krivulja 1. reda, a elipsa, hiperbola i parabola su algebarske krivulje 2. reda. Ta podjela algebarskih krivulja potječe još od Newtona⁷.

Da bismo pokazali kako je takva klasifikacija ispravna, treba pokazati da algebarska krivulja n -tog reda u nekom Kartezijevom koordinatnom sustavu, ostaje algebarska krivulja n -tog reda i u svakom drugom takvom sustavu. Dakle, treba pokazati ako je (10) algebarska jednadžba n -tog reda da je i jednadžba

$$f(b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}, b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}) = 0, \quad (11)$$

također n -tog reda.

U tu svrhu uočimo u (10) bilo koji član $a_{ij}x^i y^j$, $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Kako je $f(x, y) = 0$ polinom n -tog reda to je $i + j \leq n$.

Primjenom (9) taj se član transformira u član $a_{ij}(b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13})^i (b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23})^j$, pa ako sa n' označimo stupanj polinoma na lijevoj strani (11), onda vidimo da odatle slijedi da je $n' \leq n$. Slično se, pomoću (8), zaključuje da je $n \leq n'$, pa iz ovih nejednakosti slijedi $n = n'$.

Dakle, red algebarske jednadžbe ne ovisi o izboru Kartezijevog koordinatnog sustava, pa je naša klasifikacija "dobra".

Algebarske krivulje 2. reda proučavaju se metodama analitičke geometrije. Algebarske krivulje višeg reda proučavaju se sredstvima matematičke analize i algebre, njima se bavi tzv. teorija algebarskih krivulja.

Navedimo sada neke primjere algebarskih krivulja reda viših od dva, kao i primjere transcendentnih krivulja.

Primjer 1. Dioklova⁸ cisoida. Prvo ćemo dati geometrijsku definiciju te krivulje. Neka je \overline{AB} dijametar kružnice k i t tangenta s ishodištem B . Uzmimo pramen pravaca s vrhom u točki A . Po volji odabrani pravac p tog pramena neka siječe k u C i t u D . Skup svih točaka T ravnine za koje vrijedi

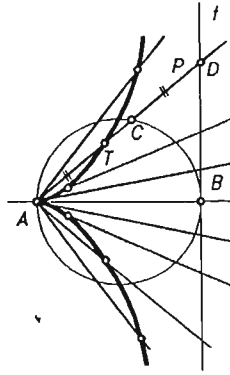
$$|AT| = |CD| \quad (12)$$

zovemo tada **Dioklovom cisoidom** (sl. 313).

Iz definicije je jasno da je krivulja simetrična s obzirom na pravac AB , pa stoga u točki A ima "šiljak" i pravac t je asimptota. Izvedimo i jednadžbu te krivulje u pravokutnim Kartezijevim koordinatama. U tu svrhu odaberimo koordinatni sustav kao na slici 314. Označimo sa $T = (x, y)$ koordinate po volji odabrane točke cisoida, a sa $C = (\xi, \eta)$

⁷ Isaac Newton (1643 - 1727) engleski fizičar, matematičar i astronom.

⁸ Dioklo (2 st.) grčki matematičar, koji je tražeci konstrukciju udvostručenja kocke otkrio cisoidu.



Sl. 313.

koordinate točke u kojoj polpravac AT siječe kružnicu k i neka je a duljina polumjera te kružnice i njezino središte u S . Ortogonalnu projekciju točke T na os x označimo sa F , a ortogonalnu projekciju točke C na t sa E . Kako se C nalazi na kružnici k kojoj je središte u $S = (a, 0)$, to vrijedi

$$(\xi - a)^2 + \eta^2 = a^2. \quad (13)$$

Zbog (12) je $\triangle AFT \cong \triangle CED$, pa je stoga

$$|CE| = |AF|. \quad (14)$$

Dalje, sa slike razabiremo da je $|AG| = |AB| - |CE|$ pa zbog (14) vrijedi $|AG| = |AB| - |AF|$, tj. u koordinatama

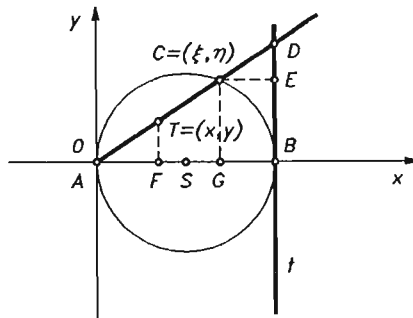
$$\xi = 2a - x. \quad (15)$$

Iz $\triangle AFT \sim \triangle AGC$ slijedi

$$x : y = \xi : \eta. \quad (16)$$

Da se dođe do jednadžbe krivulje treba iz (13), (15) i (16) eliminirati ξ i η . Najprije iz (13) i (16) slijedi

$$\eta = \sqrt{x(2a - x)}.$$



Sl. 314.

Primjer 3. Kardioida. Uzmimo kružnicu k sa središtem S i polumjerom a i na njoj (točku V). Po volji odabrani pravac p pramena s vrhom u V neka siječe k još u točki P . Neka su T_1 i T_2 točke na p odabrane tako da zadovoljavaju $|PT_1| = |PT_2| = 2a$. Skup točaka T_1 i T_2 koje zadovoljavaju taj uvjet kada p prolazi svim pravcima s vrhom u V jest krivulja koju zovemo kardioidom (sl. 316). Konstruiramo li više točaka krivulje, vidimo da ima srcolik oblik kao na sl. 316, pa se stoga i zove kardioida. Da odredimo jednadžbu te krivulje, u pravokutnim Kartezijevim koordinatama nađimo najprije njezinu jednadžbu u pridruženim polarnim koordinatama. U tu svrhu uzmimo da je V ishodište polarnog koordinatnog sustava, a polupravac VS polarna os. Neka je Q drugo sjecište polarne osi sa k . Ako točka T_1 ima polarne koordinate $T_1 = (r, \varphi)$, onda iz pravokutnog trokuta $\triangle OQP$ slijedi

$$r - 2a = 2a \cos \varphi. \quad (19)$$

Slično se nalazi da za koordinate točke $T_2 = (r, \varphi)$ vrijedi

$$r + 2a = 2a \cos \varphi. \quad (19')$$

Dakle, na kardioidi leže sve one točke koordinate koje zadovoljavaju bilo jednadžbu (19) bilo (19'). Lako se međutim vidi da svaka od tih jednadžaba predočuje krivulju u cijelosti (provjerite to!). Ako (19) i (19') svedemo na oblik $r - 2a \cos \varphi = \pm 2a$ i kvadriramo, dobit ćemo

$$(r - 2a \cos \varphi)^2 - 4a^2 = 0. \quad (20)$$

Ako koordinate neke točke $T = (r, \varphi)$ zadovoljavaju jednadžbu (20), onda one zadovoljavaju ili jednadžbu (19) ili (19') i obrnuto. To znači da je (20) jednadžba kardioide u polarnim koordinatama. Označimo li pravokutne Kartezijeve koordinate točke sa $T = (x, y)$, onda je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $x = r \cos \varphi$, pa (24) prelazi u

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Dakle, kardioida je algebarska krivulja 4. reda. ■

Primjer 4. Cassinijevi⁹ ovali. Lemniskata. Cassinijevi ovali definiraju se kao skup točaka u ravnini kod kojih je produkt udaljenosti od dviju čvrstih točaka konstantan. Neka su P_1 i P_2 te čvrste točke i T točka takva da je

$$|P_1T| \cdot |P_2T| = a^2, \quad (21)$$

gdje je a^2 realna konstanta. Da nađemo jednadžbu Cassinijevih ovala, odaberimo Kartezijev koordinatni sustav tako da je P_1P_2 os x , orijentirana od P_1 prema P_2 , polovište O dužine P_1P_2 neka je ishodište. Ako označimo $|P_1P_2| = 2b$, onda je $P_1 = (-b, 0)$, $P_2 = (b, 0)$. Za svaku točku $T = (x, y)$ Cassinijeva ovala vrijedi (21), odnosno u koordinatama

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+b)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-b)^2 + y^2} = a^2, \\ & (x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) - a^4 + b^4 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Dakle, Cassinijevi ovali su algebarske krivulje 4. reda. Govorimo u množini o ovalima zato što ovisno o odnosu konstanti a i b , dobivene krivulje imaju bitno različite oblike.

Razlikujemo pet tipova ovala:

1. $a = 0$, u tom slučaju oval degenerira u dvije izolirane točke $P_1 = (-b, 0)$, $P_2 = (b, 0)$.

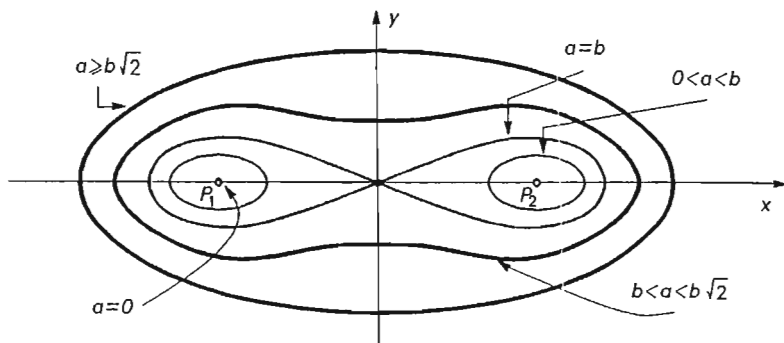
⁹G. D. Cassini (1625-1712), talijanski astronom i kartograf.

2. $0 < a < b$. U ovom se slučaju dobiju dvije disjunktne ovalne krivulje u ravnini.
3. $a = b$. U ovom slučaju (22) prima oblik

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0. \quad (23)$$

Lako se vidi da je to krivulja koja ima oblik osmice i ona se zove lemniskata.

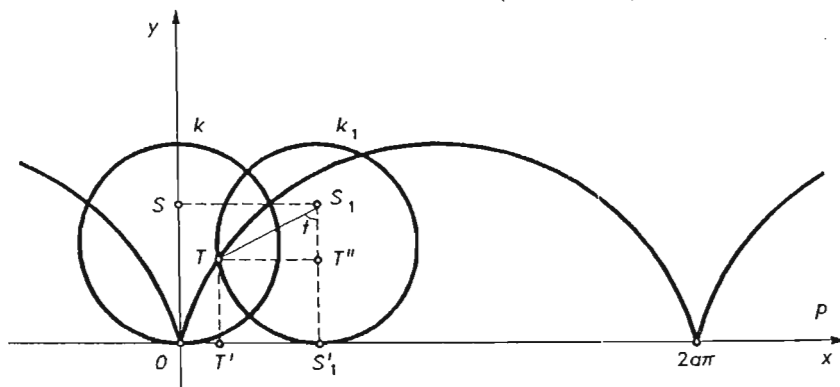
4. $b < a < b\sqrt{2}$. U ovom slučaju krivulja ima oblik piškote.
 5. $a \geq b\sqrt{2}$. U ovom je slučaju krivulja ovalnog oblika i slična je elipsi.
- Svi navedeni tipovi Cassinijevih ovala nacrtani su na sl. 317. ■



Sl. 317.

Primjer 5. Cikloida. Ako se kružnica kotrlja po pravcu bez klizanja, onda svaka točka te kružnice opisuje krivulju koja se zove cikloida.

Izvedimo jednadžbu cikloide u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu. Uzmimo kružnicu polumjera a i neka se ona kotrlja po pravcu p . Neka je p x koordinatnog sustava i neka je diralište O kružnice k i pravca p kada je k u početnom položaju ishodište koordinatnog sustava (sl. 318). Promotrimo krivulju koju pri tome opisuje točka O . Kada se kružnica zakrene za kut t (u radijanima), onda točka O dođe u



Sl. 318.

položaj T . Ako je k_1 položaj u koji je došla kružnica, onda je kut t jednak $t = \sphericalangle(TS_1S'_1)$. Kako se radi o kotrljanju bez klizanja, to je

$$|OS'_1| = \widehat{S'_1T}, \quad (24)$$

gdje je sa $\widehat{S'_1T}$ označena duljina luka kružnice. Na sl. 318. vidimo da je

$$|OT'| = |OS'_1| - |T'S'_1| = |OS'_1| - |TT''|. \quad (25)$$

Zbog (24) je $|OS'_1| = at$. Neka je $T = (x, y)$. Iz pravokutnog trokuta $\Delta TT''S_1$ slijedi $|TT''| = a \sin t$, pa (25) možemo pisati u obliku

$$x = a(t - \sin t).$$

Dalje je $|TT'| = |S'_1T''| = |S_1S'_1| - |S_1T''|$. Kako je $|S_1S'_1| = a$, a iz istog pravokutnog trokuta je i $|S_1T''| = a \cos t$, to prethodnu jednakost možemo pisati u obliku

$$y = a(1 - \cos t).$$

Vidimo, dakle, da je parametarsko predočenje cikloide dano sa

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t). \end{aligned} \quad (26)$$

Jednadžbu cikloide u pravokutnim Kartezijevim koordinatama dobit ćemo ako iz (26) eliminiramo parametar t . Iz druge od jednadžbi (26) slijedi

$$t = \arccos \frac{a - y}{a},$$

pa ako to uvrstimo u prvu jednadžbu, dobivamo

$$x = a \left(\arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{1 - \left(\frac{a - y}{a} \right)^2} \right).$$

Prema tome je cikloida transcendentna krivulja. ■

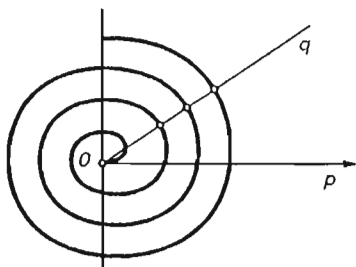
Primjer 6. Arhimedova spirala. Ako u ravnini neki pravac q jednoliko rotira oko svoje čvrste točke O kutnom brzinom ω i pri tome se na q točka T giba jednolikom brzinom v , onda pri tom složenom gibanju točka T opisuje krivulju, koja se zove Arhimedova spirala (sl. 319).

Uzmimo u ravnini polarni koordinatni sustav s polom u O , a za $t = 0$ odaberimo onaj tren kada je T u položaju O . Tada očito vrijedi

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad r = vt, \quad (27)$$

gdje je φ_0 kut koji pravac q zatvara s polarnom osi r u momentu $t = 0$. Jednadžbe (27) predočuju parametarsko predočenje Arhimedove spirale. Eliminacijom parametra t iz (27) slijedi $v\varphi - \omega r - v\varphi_0 = 0$. Uvedemo li oznake $A = v$, $B = -\omega$ i $C = -v\varphi_0$, dobivamo

$$A\varphi + Br + C = 0. \quad (28)$$



Sl. 319.

Jednadžba (28) jednadžba je Arhimedove spirale u polarnim koordinatama. Prelazom na pravokutne Kartezijeve koordinate zbog $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ dobivamo

$$B^2(x^2 + y^2) - \left(C + \arctg \frac{y}{x}\right)^2 = 0,$$

pa je Arhimedova spirala transcendentna krivulja. Na sl. 319. nacrtan je dio Arhimedove spirale, koji odgovara pozitivnim vrijednostima r i φ .

Odaberemo li da se za $t = 0$ položaj pravca q podudara s polarnom osi p , bit će $\varphi_0 = 0$, pa je $C = 0$. Uz oznaku $\frac{v}{\omega} = a$ iz (27) tada slijedi

$$r = a\varphi,$$

i to je najjednostavniji oblik jednadžbe Arhimedove spirale u polarnim koordinatama. ■

8.2. Linearni operatori i transformacije

Neka je M ravnina, $O \in M$ bilo koja točka i $V^2(O)$ dvodimenzionalni vektorski prostor radijvektora s početkom u O .

Preslikavanje $A : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ koje za sve $\vec{x}, \vec{y} \in V^2(O)$ i svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ zadovoljava uvjete

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y}), \quad (29)$$

$$A(\lambda\vec{x}) = \lambda A(\vec{x}), \quad (30)$$

zovemo **linearnim operatorom**.

Napomena 1. Iz (29) i (30) slijedi

$$A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda A(\vec{x}) + \mu A(\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V^2(O), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Primjer 7. Za $\vec{x} \in V^2(O)$ stavimo $\mathcal{H}(\vec{x}) = k \cdot \vec{x}$, $k \in \mathbb{R}$. \mathcal{H}_k je linearni operator, jer je očito $\mathcal{H}_k(\vec{x} + \vec{y}) = k(\vec{x} + \vec{y}) = k\vec{x} + k\vec{y} = \mathcal{H}_k(\vec{x}) + \mathcal{H}_k(\vec{y})$ i $\mathcal{H}_k(\lambda\vec{x}) = k(\lambda\vec{x}) = \lambda(k\vec{x}) = \lambda(\mathcal{H}_k(\vec{x})) = \lambda\mathcal{H}_k(\vec{x})$. Taj se operator zove **operator homotetije**. Za $k = 1$ očito je \mathcal{H}_1 identitet na prostoru $V^2(O)$, dakle identiteta je također linearni operator. Za $k = 0$ dobije se linearni operator koji svakom vektoru pridružuju nulvektor. Takav operator zovemo **nuloperatorom**. Za $k = -1$ se \mathcal{H}_{-1} zove operatorom centralne simetrije. ■

Druge primjere linearnih operatora upoznat ćemo kasnije.
 Iz definicije linearnog operatora slijedi da je

$$A(\vec{0}) = \vec{0}, \quad (31)$$

$$A(\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n) = \lambda_1 A(\vec{x}_1) + \dots + \lambda_n A(\vec{x}_n), \quad (32)$$

$$\lambda_i \in \mathbf{R}, \vec{x}_i \in V_2(O), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Formula (31) slijedi iz (30) za $\lambda = 0$, a (32) iz (29) i (30) lako se dokazuje totalnom indukcijom.

Osnovni teorem o linearnim operatorima kaže da je svaki takav operator određen s dva para pridruženih vektora. Točnije, vrijedi:

PROPOZICIJA 1. *Ako su \vec{a}_1, \vec{a}_2 i \vec{b}_1, \vec{b}_2 dva para vektora prostora $V^2(O)$ i vektori prvog para linearno nezavisni, onda postoji jedinstveni linearni operator $A: V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ takav da je $\vec{b}_i = A(\vec{a}_i)$, $i = 1, 2$.*

Dokaz.

a) *Egzistencija.* Neka je $\vec{x} \in V^2(O)$ bilo koji vektor. Kako su \vec{a}_1 i \vec{a}_2 linearno nezavisni vektori, to postoje jedinstveni $x_1, y_1 \in \mathbf{R}$, takvi da je $\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + y_1 \vec{a}_2$. Stavimo $A(\vec{x}) = x_1 \vec{b}_1 + y_1 \vec{b}_2$. Tvrđimo da je ovim definiran linearni operator koji zadovoljava uvjete propozicije. Zaista, za vektore $\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + y_1 \vec{a}_2$, $\vec{y} = x_2 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2$ vrijedi $A(\vec{x} + \vec{y}) = A((x_1 + x_2)\vec{a}_1 + (y_1 + y_2)\vec{a}_2) = (x_1 + x_2)\vec{b}_1 + (y_1 + y_2)\vec{b}_2 = (x_1 \vec{b}_1 + y_1 \vec{b}_2) + (x_2 \vec{b}_1 + y_2 \vec{b}_2) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$, pa (29) vrijedi. Slično se lako vidi da je $A(\lambda \vec{x}) = \lambda A(\vec{x})$, pa je A zaista linearni operator. Treba vidjeti da je $A(\vec{a}_i) = \vec{b}_i$, $i = 1, 2$. Zaista, iz $\vec{a}_1 = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2$, slijedi $A(\vec{a}_1) = 1 \cdot \vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2$, tj. $A(\vec{a}_1) = \vec{b}_1$. Slično je $A(\vec{a}_2) = \vec{b}_2$.

b) *Jedinstvenost.* Pretpostavimo suprotno da postoji još i linearni operator B koji zadovoljava uvjetima propozicije. Prema napomeni 1. vrijedi

$$B(\vec{x}) = B(x_1 \vec{a}_1 + y_1 \vec{a}_2) = x_1 B(\vec{a}_1) + y_1 B(\vec{a}_2).$$

Kako je $B(\vec{a}_i) = \vec{b}_i$, to je $B(\vec{x}) = x_1 \vec{b}_1 + y_1 \vec{b}_2$, odavde, zbog $A(\vec{x}) = x_1 \vec{b}_1 + y_1 \vec{b}_2$, slijedi $A(\vec{x}) = B(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in V_2(O)$, pa se operatori A i B podudaraju. ■

Linearni operatori su u uskoj vezi s linearnim transformacijama ravnine. Neka je

$$\vec{x}' = A(\vec{x}) \quad (33)$$

linearni operator, a (\vec{i}, \vec{j}) baza vektorskog prostora $V^2(O)$. Prema Propoziciji 1. operator A određen je vektorima $A(\vec{i})$ i $A(\vec{j})$. Stavimo $A(\vec{i}) = a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j}$, $A(\vec{j}) = a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j}$. Ako je $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{x}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, onda iz (33) i ovih jednakosti zbog linearnosti od A dobivamo

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= x'\vec{i} + y'\vec{j} = A(x\vec{i} + y\vec{j}) = xA(\vec{i}) + yA(\vec{j}) \\ &= x(a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j}) + y(a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j}) \\ &= (a_{11}x + a_{12}y)\vec{i} + (a_{21}x + a_{22}y)\vec{j}. \end{aligned}$$

Kako su \vec{i} i \vec{j} linearno nezavisni vektori, to odavde slijedi

$$x' = a_{11}x + a_{12}y, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y. \quad (34)$$

Jednakosti (34) svakoj točki $(x, y) \in M$ pridružuju točku $(x', y') \in M$, dakle, određuju jednu točkovnu transformaciju ravnine. U t. 8.1. takve su transformacije nazvane linearnim transformacijama ravnine. Za linearne transformacije (34) kažemo da su pridružene linearnom operatoru \mathcal{A} i obrnuto.

Matricu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (35)$$

zovemo **matricom linearne transformacije** (34), u koordinatnom sustavu $(O; \vec{i}, \vec{j})$, odnosno **linearnog operatora** \mathcal{A} u bazi (\vec{i}, \vec{j}) .

Uočite da su elementi prvog stupca u matrici (35) redom koordinate vektora $\mathcal{A}(\vec{i})$ u bazi (\vec{i}, \vec{j}) , a drugog od $\mathcal{A}(\vec{j})$.

Primjer 8. (Operator rotacije). Točkovno je rotacija ravnine za kut φ oko ishodišta koordinata dana jednakostima (3), tj. $x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$, $y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$. Toj transformaciji pridruženi linearni operator $\mathcal{R}_\varphi : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ zovemo operatorom rotacije.

Prema (35) matrica tog operatora u bazi (\vec{i}, \vec{j}) pravokutnog Kartezijevog koordinatnog sustava $(O; \vec{i}, \vec{j})$ jednaka je

$$\mathcal{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Primjer 9. Matrica linearnog operatora u ortonormiranoj bazi (\vec{i}, \vec{j}) oblika je

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Koja transformacija ravnine odgovara tom operatoru?

Rješenje. Na nivou koordinata ta se transformacija može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + \sin \varphi, \\ y' &= x \sin \varphi - y \cos \varphi. \end{aligned}$$

Lako se vidi da je ta transformacija izometrija. Fiksne točke te transformacije dobivaju se iz sustava

$$\begin{aligned} x(\cos \varphi - 1) + y \sin \varphi &= 0, \\ x \sin \varphi - y(\cos \varphi + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Kako je determinanta tog sustava 0, to sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Lako se vidi da te fiksne točke leže na pravcu $y = x \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, pa se radi o zrcaljenju kojemu je taj pravac os. Stoga taj operator zovemo operatorom zrcaljenja. Uočite da je determinanta operatora rotacije 1, a zrcaljenja na pravcu -1 , a to je algebarska posljedica činjenice da rotacija ne mijenja orijentaciju, a zrcaljenje je mijenja. \blacksquare

Za matricu A kažemo da je **regularna** ako je $\det A \neq 0$, a **singularna** ako je $\det A = 0$.

Za matricu A , odnosno za linearni operator \mathcal{A} kažemo da ima rang 2 ako su vektori $\mathcal{A}(\vec{i})$ i $\mathcal{A}(\vec{j})$ linearno nezavisni. Ako su ti vektori linearno zavisni i oba nisu nulvektori, onda kažemo da je rang jednak 1, a ako su pak i $\mathcal{A}(\vec{i})$ i $\mathcal{A}(\vec{j})$ nulvektori, onda kažemo da je rang jednak 0.

Rang linearnog operatora \mathcal{A} , odnosno matrice A označavamo s rang \mathcal{A} , odnosno rang A .

Linearne operatore ranga 2 zovemo **regularnim operatorima**. Prema tome, operatori rotacije i zrcaljenja su regularni operatori.

PROPOZICIJA 2. Rang linearnog operatora ne ovisi o izboru baze.

Dokaz. Neka u bazi (\vec{i}, \vec{j}) linearni operator \mathcal{A} ima matricu (35) i neka je (\vec{i}', \vec{j}') neka druga baza vektorskog prostora $V^2(O)$. Tada postoji rastav

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= b_{11}\vec{i} + b_{12}\vec{j}, \\ \vec{j}' &= b_{21}\vec{i} + b_{22}\vec{j},\end{aligned}\tag{36}$$

$b_{ij} \in \mathbf{R}$, $i, j = 1, 2$ i

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0.\tag{37}$$

Iz (36) slijedi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\vec{i}') &= b_{11}\mathcal{A}(\vec{i}) + b_{12}\mathcal{A}(\vec{j}), \\ \mathcal{A}(\vec{j}') &= b_{21}\mathcal{A}(\vec{i}) + b_{22}\mathcal{A}(\vec{j}).\end{aligned}\tag{38}$$

Sada razlikujemo tri slučaja.

1° rang $\mathcal{A} = 0$. U ovom je slučaju $\mathcal{A}(\vec{i}) = \mathcal{A}(\vec{j}) = \vec{0}$, pa iz (38) slijedi $\mathcal{A}(\vec{i}') = \mathcal{A}(\vec{j}') = \vec{0}$, pa je rang operatora \mathcal{A} u bazi (\vec{i}', \vec{j}') jednak 0.

2° rang $\mathcal{A} = 1$. U ovom je slučaju bar jedan od vektora $\mathcal{A}(\vec{i})$, $\mathcal{A}(\vec{j})$ različit od nulvektora i neka je $\mathcal{A}(\vec{j}) \neq \vec{0}$ i $\mathcal{A}(\vec{i}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{j})$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Sada iz (38) slijedi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\vec{i}') &= (\lambda b_{11} + b_{12})\mathcal{A}(\vec{j}), \\ \mathcal{A}(\vec{j}') &= (\lambda b_{21} + b_{22})\mathcal{A}(\vec{j}).\end{aligned}$$

Zbog (37) vektori $\mathcal{A}(\vec{i}')$ i $\mathcal{A}(\vec{j}')$ nisu istodobno nulvektori i linearno su zavisni, pa je stoga rang operatora \mathcal{A} i u bazi (\vec{i}', \vec{j}') jednak 1.

3° rang $\mathcal{A} = 2$. Iz (38) zbog (37) tada slijedi da su $\mathcal{A}(\vec{i}')$ i $\mathcal{A}(\vec{j}')$ linearno nezavisni vektori, pa je rang $\mathcal{A} = 2$ i u bazi (\vec{i}', \vec{j}') . ■

Napomena 2. Uočite da matricni zapis linearnog operatora ovisi o izboru baze, ali rang ne ovisi.

8.3. Svojtveni vektori i svojstvene vrijednosti linearnog operatora

Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ zovemo **svojtvenim vektorom** linearnog operatora $\mathcal{A} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ ako je $\mathcal{A}(\vec{a})$ kolinearan s vektorom \vec{a} , tj. ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\mathcal{A}(\vec{a}) = \lambda\vec{a}$. Za realni broj λ kažemo da je **svojtvena vrijednost** pridružena vektoru \vec{a} .

Lako se vidi ako je \vec{a} svojtveni vektor operatora \mathcal{A} , onda je takav i vektor $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Pri tom je svojstvena vrijednost pridružena vektoru \vec{a} jednaka svojstvenoj vrijednosti koja je pridružena vektoru \vec{b} . Zaista, imamo redom $\mathcal{A}(\vec{b}) = \mathcal{A}(\alpha\vec{a}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{a}) = \alpha\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\vec{a}) = \lambda\vec{b}$ i tvrdnja je dokazana.

Dakle, ako je \vec{a} svojtveni vektor operatora \mathcal{A} , onda je i svaki vektor (različit od $\vec{0}$) jednodimenzionalnog potprostora razapetog vektorom \vec{a} svojtveni vektor od \mathcal{A} i pri tome je svakom od takvih vektora pridružena ista svojstvena vrijednost.

Pokažimo sada kako se nalaze svojtveni vektori i svojstvene vrijednosti linearnog operatora \mathcal{A} . Neka u bazi (\vec{i}, \vec{j}) linearni operator \mathcal{A} ima matični zapis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

i neka je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ svojtveni vektor od \mathcal{A} . Tada je $\mathcal{A}(\vec{x}) = x_1\mathcal{A}(\vec{i}) + x_2\mathcal{A}(\vec{j}) = x_1(a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j}) + x_2(a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\vec{i} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\vec{j}$, $\mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ povlači da je

$$\lambda x_1\vec{i} + \lambda x_2\vec{j} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\vec{i} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\vec{j},$$

a odatve, zbog linearne nezavisnosti vektora \vec{i} i \vec{j} , slijedi

$$\lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$

$$\lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

odnosno

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Dakle, svojstvene vrijednosti su rješenje sustava (39). Sustav (39) ima netrivialno rješenje ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{40a}$$

tj.

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{40b}$$

Jednadžba (40) zove se **karakteristična jednadžba** linearnog operatora, odnosno matrice linearnog operatora.

Dakle ako \mathcal{A} ima svojtveni vektor, onda je njemu pridružena svojstvena vrijednost korijen karakteristične jednadžbe i obrnuto.

PROPOZICIJA 3. Ako je λ_0 realan korijen karakteristične jednadžbe linearnog operatora, onda taj operator ima bar jedan svojstveni vektor kojemu je pridružena svojstvena vrijednost λ_0 .

Dokaz. Prema pretpostavci λ_0 je realan korijen karakteristične jednadžbe (40a), tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

pa stoga sustav (39)

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_0)x_1 + a_{12}x_2 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_0)x_2 &= 0, \end{aligned}$$

ima bar jedno netrivialno rješenje (x_1, x_2) , pa je zato $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ svojstveni vektor kojemu je pridružena svojstvena vrijednost λ_0 . ■

Pogledajmo sada kako svojstveni vektori ovise o naravi korijena karakteristične jednadžbe.

1°. Ako karakteristična jednadžba nema realnih korijena, onda linearni operator nema svojstvenih vektora.

2°. Ako karakteristična jednadžba ima dva različita realna korijena, onda linearni operator ima dva linearno nezavisna svojstvena vektora. Dokažimo to!

Prema Propoziciji 3. korijenima $\lambda_1 \neq \lambda_2$ odgovaraju svojstveni vektori \vec{a} i \vec{b} . Treba pokazati da oni nisu kolinearni. Pretpostavimo obrnuto da je $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Kako je $\mathcal{A}(\vec{b}) = \lambda_2\vec{b}$, to je $\mathcal{A}(\alpha\vec{a}) = \lambda_2(\alpha\vec{a})$, ili $\mathcal{A}(\vec{a}) = \lambda_2\vec{a}$, pa $\mathcal{A}(\vec{a}) = \lambda_1\vec{a}$ povlači $\lambda_1 = \lambda_2$ obrnuto pretpostavci. Preostaje da se dokaže da je svaki svojstveni vektor \vec{c} operatora \mathcal{A} kolinearan ili s vektorom \vec{a} ili s vektorom \vec{b} . Kako je \vec{c} svojstveni vektor od \mathcal{A} , to je $\mathcal{A}(\vec{c}) = \lambda\vec{c}$. Stavimo $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Tada je $\mathcal{A}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \lambda(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})$, pa odavde slijedi $\alpha\mathcal{A}(\vec{a}) + \beta\mathcal{A}(\vec{b}) = \lambda\alpha\vec{a} + \lambda\beta\vec{b}$, odnosno $\alpha\lambda_1\vec{a} + \beta\lambda_2\vec{b} = \lambda\alpha\vec{a} + \lambda\beta\vec{b}$, dakle je $\alpha(\lambda_1 - \lambda)\vec{a} + \beta(\lambda_2 - \lambda)\vec{b} = \vec{0}$. Kako su \vec{a} i \vec{b} linearno nezavisni, to je $\alpha(\lambda_1 - \lambda) = 0$, $\beta(\lambda_2 - \lambda) = 0$. Kako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to je bar jedan od izraza u zagradama različit od nule. Dakle, ili je $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ ili $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$. U svakom od tih slučajeva \vec{c} je kolinearan s jednim od vektora \vec{a} ili \vec{b} .

3°. Ako karakteristična jednadžba ima dvostruki realan korijen, onda je ili svaki ne-nulvektor svojstveni i svakom od njih je pridružena ista svojstvena vrijednost λ_0 ili su pak svi svojstveni vektori kolinearni. Dokažimo to!

Prema Propoziciji 3. linearni operator \mathcal{A} ima bar jedan svojstveni vektor \vec{a} . Ako su svi svojstveni vektori kolinearni s vektorom \vec{a} , onda je tvrdnja dokazana. Pretpostavimo da je \vec{b} svojstveni vektor koji nije kolinearan s \vec{a} i neka je λ_1 svojstvena vrijednost pridružena vektoru \vec{b} . Tada je $\lambda_1 = \lambda_0$. Ako je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ bilo koji vektor, onda vrijedi $\mathcal{A}(\vec{c}) = \mathcal{A}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{a}) + \beta\mathcal{A}(\vec{b}) = \alpha\lambda_0\vec{a} + \beta\lambda_0\vec{b} = \lambda_0(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \lambda_0\vec{c}$, pa je \vec{c} svojstveni vektor i tvrdnja je dokazana.

Primjer 10. Odredite svojstvene vektore i pripadne svojstvene vrijednosti operatora homotetije.

Rješenje. Homotetija s centrom u ishodištu i koeficijentom k dana je sa $x' = kx$, $y' = ky$, a matrica te transformacije je oblika

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba glasi

$$\begin{vmatrix} k - \lambda & 0 \\ 0 & k - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

a njezini korijeni su $\lambda_1 = \lambda_2 = k$. Dakle, svaki vektor (različit od nulvektora) svojstveni je vektor operatora homotetije, a njima pridružena svojstvena vrijednost jednaka je koeficijentu homotetije. ■

Primjer 11. Odredite svojstvene vektore i pripadne svojstvene vrijednosti operatora rotacije.

Rješenje. U primjeru 8. vidjeli smo da je matrica operatora rotacije za kut φ oko ishodišta dana sa

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno $(\cos \varphi - \lambda)^2 + \sin^2 \varphi = 0$. Kako ova jednadžba nema realnih korijena u λ , to operator rotacije nema svojstvenih vektora. ■

Primjer 12. Odredite svojstvene vektore i pripadne svojstvene vrijednosti operatora zrcaljenja.

Rješenje. U Primjeru 9. vidjeli smo da je matrica tog operatora oblika

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Lako se vidi da su njezini korijeni $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Za $\lambda_1 = 1$ koordinate (x_1, x_2) svojstvenog vektora tog operatora prema (39) rješenja su sustava

$$\begin{aligned} x_1(\cos \varphi - 1) + x_2 \sin \varphi &= 0, \\ x_1 \sin \varphi - x_2(\cos \varphi - 1) &= 0, \end{aligned}$$

a to je isti sustav koji smo izveli u spomenutom primjeru. Dakle, jedan svojstveni vektor je vektor kolinearan s osi zrcaljenja i njemu je pridružena svojstvena vrijednost $\lambda_1 = 1$.

Za $\lambda_2 = -1$ slično se dobiva

$$\begin{aligned} x_1(1 + \cos \varphi) + x_2 \sin \varphi &= 0, \\ x_1 \sin \varphi + x_2(1 - \cos \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Lako se vidi da je ovim sustavom određeni vektor okomit na os zrcaljenja. Dakle, drugi je svojstveni vektor okomit na os zrcaljenja i njemu pridružena svojstvena vrijednost je $\lambda_2 = -1$. Dakle, svojstveni vektori zrcaljenja su okomiti. ■

Napomena 3. Na osnovi svojstvenih vektora može se izvršiti klasifikacija linearnih operatora, a time i pripadnih linearnih transformacija. Ovdje ta pitanja nećemo detaljnije raspravljati.

Napomena 4. Kako su svojstveni vektori linearnog operatora definirani bezkoordinatno, to oni ne ovise o izboru baza, tj. o matricnom zapisu tog operatora. Provjerite to izravnim računom. Isto vrijedi za svojstvene vrijednosti.

8.4. Dijagonalizacija. Simetrični operatori

Iz definicije matricnog zapisa linearnog operatora jasno je da on ovisi o bazi.

Nas će zanimati pitanje postoji li takva baza prostora $V^2(O)$ u kojoj je matricni zapis zadanog linearnog operatora $\mathcal{A} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ dijagonalna matrica. U tom slučaju kažemo da taj operator **dopušta dijagonalizaciju** ili da se da **dijagonalizirati**. Pitamo se uz koje je to uvjete moguće. Odgovor je dan sljedećom propozicijom.

PROPOZICIJA 4. *Linearni operator $\mathcal{A} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ dopušta dijagonalizaciju ako i samo ako postoji u $V^2(O)$ baza koja se sastoji od svojstvenih vektora tog operatora.*

Dokaz. Neka je (\vec{i}, \vec{j}) baza od $V^2(O)$ i \vec{e}_1, \vec{e}_2 svojstveni vektori operatora \mathcal{A} i λ_1, λ_2 redom tim vektorima pridružene svojstvene vrijednosti. Tada je $\mathcal{A}(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$, $i = 1, 2$, pa u toj bazi operator \mathcal{A} ima matricni zapis

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

pa se on da dijagonalizirati. Obrnuto, ako se \mathcal{A} da dijagonalizirati u bazi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, onda je matrica tog operatora oblika

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix},$$

pa je $\mathcal{A}(\vec{e}_i) = \alpha_i \vec{e}_i$, dakle vektori \vec{e}_1, \vec{e}_2 svojstveni su vektori tog operatora. ■

Napomena 5. Odavde slijedi ako linearni operator dopušta dijagonalizaciju, onda je njegov matricni zapis, u bazi koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora, dijagonalna matrica kojoj su elementi glavne dijagonale svojstvene vrijednosti pridružene vektorima te baze.

Primjer 13. U bazi (\vec{i}, \vec{j}) zadan je linearni operator matricnim zapisom $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$. Dijagonalizirajte ga.

Rješenje. Pripadna karakteristična jednadžba glasi $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, tj. $(1-\lambda)^2 = 16$. Njezini su korijeni $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 5$. Svojstveni vektori su $\vec{r} - 2\vec{j}$ i $2\vec{r} + \vec{j}$, i $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ je zapis tog operatora u toj bazi. ■

Nas će posebno zanimati simetrični linearni operatori i njihovi svojstveni vektori.

Za linearni operator $\mathcal{A} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ kažemo da je simetričan ako je $\vec{x} \cdot \mathcal{A}(\vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{y}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V^2(O)$.

Vrlo je važna sljedeća propozicija.

PROPOZICIJA 5. Ako je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matični zapis linearnog operatora \mathcal{A} u ortonormiranoj bazi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, onda je operator \mathcal{A} simetričan ako i samo ako je njegova matrica simetrična, tj. ako je $a_{12} = a_{21}$.

Dokaz. Neka su $\vec{x}, \vec{y} \in V^2(O)$ bilo koji vektori, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$. Tada je

$$\vec{x} \cdot \mathcal{A}(\vec{y}) = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) \cdot (y_1\mathcal{A}(\vec{e}_1) + y_2\mathcal{A}(\vec{e}_2)),$$

tj.

$$\vec{x} \cdot \mathcal{A}(\vec{y}) = x_1y_1\vec{e}_1 \cdot \mathcal{A}(\vec{e}_1) + x_1y_2\vec{e}_1 \cdot \mathcal{A}(\vec{e}_2) + x_2y_1\vec{e}_2 \cdot \mathcal{A}(\vec{e}_1) + x_2y_2\vec{e}_2 \cdot \mathcal{A}(\vec{e}_2). \quad (41)$$

Na isti je način

$$\vec{y} \cdot \mathcal{A}(\vec{x}) = x_1y_1\mathcal{A}(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + x_1y_2\mathcal{A}(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2 + x_2y_1\mathcal{A}(\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_1 + x_2y_2\mathcal{A}(\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2. \quad (42)$$

Ako je \mathcal{A} simetričan, onda je $\vec{e}_1 \cdot \mathcal{A}(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \cdot \mathcal{A}(\vec{e}_1)$, a kako je $\vec{e}_1 \cdot \mathcal{A}(\vec{e}_2) = a_{12}$ i $\vec{e}_2 \cdot \mathcal{A}(\vec{e}_1) = a_{21}$, to je $a_{12} = a_{21}$.

Obrnuto, $a_{12} = a_{21}$ povlači $\vec{e}_1 \cdot \mathcal{A}(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \cdot \mathcal{A}(\vec{e}_1)$, pa iz (41) i (42) slijedi $\vec{x} \cdot \mathcal{A}(\vec{y}) = \vec{y} \cdot \mathcal{A}(\vec{x})$, pa je \mathcal{A} simetričan operator. ■

Za nas će biti važna sljedeća propozicija.

PROPOZICIJA 6. Ako su svojstvene vrijednosti simetričnoga linearnog operatora realne i različite, onda su svojstveni vektori tog operatora okomiti.

Dokaz. Neka su $\vec{x}, \vec{y} \in V^2(O)$ svojstveni vektori simetričnoga linearnog operatora \mathcal{A} i $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tim vektorima pridružene svojstvene vrijednosti. Tada je $\mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda_1\vec{x}$, $\mathcal{A}(\vec{y}) = \lambda_2\vec{y}$, pa uvjet simetričnosti $\vec{x} \cdot \mathcal{A}(\vec{y}) = \vec{y} \cdot \mathcal{A}(\vec{x})$ daje $\lambda_1(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \lambda_2(\vec{x} \cdot \vec{y})$, a odavde, zbog $\lambda_1 \neq \lambda_2$, slijedi $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. ■

8.5. Krivulje 2. reda

Neka je $(O; \vec{i}, \vec{j})$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini i $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje definirano polinomom

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a,$$

gdje su $a_{ij}, a_i, a \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$, te bar jedan od koeficijenata a_{ij} je različit od nule.

Skup

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

zovemo **krivuljom drugog reda**. Jednadžbu $f(x, y) = 0$ zovemo **jednadžbom krivulje S** .

Naš je glavni cilj da identificiramo skup S , tj. da odgovorimo na pitanje što sve može biti S . Posebne primjere krivulja 2. reda upoznali smo prije, i to su

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, ab \neq 0 \right\},$$

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, ab \neq 0 \right\},$$

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 2px, p \neq 0\},$$

elipsa, hiperbola i parabola. Pokazat će se (ne računajući degenerirane slučajeve) da je S uvijek jedna od tih krivulja.

Do konačnog se rezultata dolazi svođenjem jednadžbe krivulje na kanonski oblik. Pođimo od jednadžbe krivulje 2. reda

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \quad (43)$$

u Kartezijevom koordinatnom sustavu $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Krivulji (43) pridružit ćemo simetričan linearni operator u bazi (\vec{i}, \vec{j}) , koji je dan matricom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Svojtvene vektore tog operatora zovemo **glavnim vektorima** krivulje, a smjerove određene glavnim vektorima zovemo **glavnim smjerovima** krivulje.

Dakle, ako linearni operator pridružen krivulji ima dvije različite realne svojstvene vrijednosti, onda su, prema Propoziciji 6, glavni smjerovi krivulje okomiti, a ako su svojstvene vrijednosti jednake, onda su svi smjerovi glavni.

Primjer 14. Odredite glavne smjerove elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.

Rješenje. Matrica linearnog operatora elipse ima oblik $\begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$, a pripadna karakteristična jednadžba glasi $(b^2 - \lambda)(a^2 - \lambda) = 0$, pa su $\lambda_1 = a^2$, $\lambda_2 = b^2$ svojstvene vrijednosti tog operatora. Na standardni način nalazimo da su svojstveni vektori upravo \vec{i} i \vec{j} , tj. jedinični vektori osi x i y . Dakle, glavni smjerovi elipse su smjerovi njezinih glavnih osi. Posebno za $a = b$ imamo kružnicu. U tom je slučaju $\lambda_1 = \lambda_2$, pa je za kružnicu svaki smjer glavni.

Nađite glavne smjerove parabole $y^2 - 2px = 0$. ■

PROPOZICIJA 7. Ako je u Kartezijevom pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; \vec{i}, \vec{j})$ krivulja dana svojom jednadžbom (43) i λ_1, λ_2 svojstveni vektori simetričnog linearnog operatora pridruženog toj krivulji, onda postoji pravokutni Kartezijev koordinatni sustav $(O; \vec{i}', \vec{j}')$ takav da krivulja (43) u njemu ima jednadžbu

$$\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b = 0. \quad (45)$$

Dokaz. Kako je operator pridružen krivulji (43) simetričan, to su, prema Propoziciji 6, njegovi jedinični svojstveni vektori \vec{i}' i \vec{j}' okomiti. Ako je pak $\lambda_1 = \lambda_2$, onda za \vec{i}' možemo uzeti bilo koji jedinični vektor, a za \vec{j}' njemu okomit vektor, takav da je $(O; \vec{i}', \vec{j}')$ desni koordinatni sustav. Tada u bazi (\vec{i}', \vec{j}') matricni zapis tog operatora glasi $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ (propozicija 4).

Neka se \vec{i}' dobije iz \vec{i} rotacijom za kut φ u pozitivnom smislu. Kako je \vec{j} okomit na \vec{i} , a \vec{j}' okomit na \vec{i}' , to se \vec{j}' dobiva iz \vec{j} ili rotacijom za kut φ ili kompozicijom takve rotacije i zrcaljenja s obzirom na ishodište O . Stavimo u potonjem slučaju $\vec{j}' = -\vec{j}$. Tada je i \vec{j}' svojstveni vektor od A i njemu je pridružena također svojstvena vrijednost λ_2 . Zaista, imamo redom $A(\vec{j}') = A(-\vec{j}) = -A(\vec{j}) = -\lambda_2\vec{j} = \lambda_2\vec{j}'$ i tvrdnja je dokazana. Dakle, uvijek možemo smatrati da je sustav $(O; \vec{i}', \vec{j}')$ dobiven iz sustava $(O; \vec{i}, \vec{j})$ rotacijom za kut φ , tj. da je

$$\begin{aligned} \vec{i}' &= \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}, \\ \vec{j}' &= -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}. \end{aligned} \quad (46)$$

Prema (1) koordinate u ta dva sustava vezane su jednakostima

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \end{aligned}$$

pa ako te veze uvrstimo u (43), nalazimo da zaista u sustavu $(O; \vec{i}', \vec{j}')$ krivulja ima jednadžbu oblika (45). ■

Za jednadžbu (45) kaže se da je **jednadžba krivulje (43) svedena na glavne osi**.

Za daljnju diskusiju važna je determinanta matrice (44). Mi ćemo kasnije pokazati da $\det A$ ne ovisi o izboru koordinatnog sustava. U bazi (\vec{i}', \vec{j}') matrica ima oblik

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

pa je $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, gdje su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti operatora A .

Sada razlikujemo dva slučaja:

1. $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$

U ovom slučaju (45) možemo napisati u obliku

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + c = 0,$$

gdje je

$$c = b - \frac{b_1^2}{\lambda_1^2} - \frac{b_2^2}{\lambda_2^2}.$$

Uzmimo translaciju

$$x'' = x' + \frac{b_1}{\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}.$$

Ona točku O preslikava u točku $O' = \left(-\frac{b_1}{\lambda_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2}\right)$. U sustavu $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$ skup S ima jednadžbu oblika

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0, \quad (47)$$

gdje su sa x'' i y'' označene koordinate u tom sustavu.

Razlikujemo dva podslučaja:

1.a $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. U ovom je slučaju $\text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2$. Za $c \neq 0$ je $\text{sign } c = -\text{sign } \lambda_1 = -\text{sign } \lambda_2$, pa iz (47) slijedi

$$\frac{x''^2}{\frac{c}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{\frac{c}{\lambda_2}} = 1,$$

pa je krivulja elipsa ili kružnica. Ako je $c = 0$, onda iz (47) razabiremo da je S skup koji se sastoji od jedne jedine točke $\left(-\frac{b_1}{\lambda_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2}\right)$. Ako je pak $c \neq 0$ i $\text{sign } c = \text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2$, onda je S prazan skup.

1.b $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Za $c \neq 0$ (47) očito je hiperbola, a za $c = 0$ krivulja se raspada na par pravaca jer se (47) može napisati u obliku produkta linearnih polinoma.

Dakle, u slučaju 1. S je uvijek centralno simetričan skup i točka $\left(-\frac{b_1}{\lambda_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2}\right)$ centar je simetrije.

2. $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

Uzmimo, na primjer, da je $\lambda_2 \neq 0$. Tada je (45) oblika

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0.$$

Za $b_1 \neq 0$ odavde slijedi

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_1 \left(x' + \frac{b}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}\right)^2 = 0.$$

Uzmimo translaciju

$$x'' = x' + \frac{b}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2b_1 \lambda_2}, \quad y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}.$$

Ona točku O preslikava u točku $O' = \left(-\frac{b}{2b_1} + \frac{b_2^2}{2b_1 \lambda_2}, -\frac{b_2}{\lambda_2}\right)$. U sustavu $(O'; \vec{i}'', \vec{j}'')$ krivulja ima jednadžbu

$$\lambda_2 y''^2 + 2b_1 x'' = 0, \quad (48)$$

pa se radi o paraboli.

Za $b_1 = 0$ iz (47) slijedi $\lambda_2 y'^2 + 2b_2 y' + b = 0$, tj.

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + b - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0.$$

Translacija $x'' = x'$, $y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}$ točku O preslikava u točku $O' = \left(0, -\frac{b_2}{\lambda_2}\right)$. U sustavu $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$ krivulja ima jednadžbu

$$\lambda_2 y''^2 + c = 0, \quad c = b - \frac{b_2^2}{\lambda_2}.$$

Ako je $c\lambda_2 < 0$, onda se krivulja raspada na par različitih paralelnih pravaca. Ako je pak $c\lambda_2 > 0$, onda je skup S prazan. Ako je $c = 0$, onda je krivulja dvostruki pravac.

Dokazana je dakle

PROPOZICIJA 8. Neka je $S \subset M$ skup definiran jednadžbom (43) u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu i neka je A matrica linearnog operatora pridruženog jednadžbi (43). Tada, ako je:

1. $\det A > 0$, onda je S elipsa, kružnica ili skup koji sadrži samo jednu točku ili prazan skup.
2. $\det A < 0$, onda je S ili hiperbola ili unija dvaju ukrštenih pravaca.
3. $\det A = 0$, onda je S ili parabola ili unija dvaju paralelnih pravaca ili jedan pravac ili prazan skup. ■

8.6. Invarijante krivulje 2. reda

Neka je u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu $(O; \vec{i}, \vec{j})$ krivulja 2. reda S dana jednadžbom (43), gdje je bar jedan od koeficijenata $a_{ij} \neq 0$. Krivulji 2. reda pridružili smo jedan simetričan linearni operator \mathcal{A} matricom $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Trag te matrice $\text{tr } A$ je suma dijagonalnih članova, tj. $\text{tr } A = a_{11} + a_{22}$. Pokazat ćemo da su

$$\text{tr } A, \quad \det A \quad i \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}$$

invarijante od S s obzirom na grupu svih izometrija ravnine, tj. da te veličine ne ovise o izboru koordinatnog sustava. Invarijanta Δ zove se **determinanta** krivulje 2. reda.

Pokažimo najprije da $\text{tr } A$ i $\det A$ ne ovise o rotacijama. U tu svrhu uzmimo drugi sustav $(O; \vec{i}', \vec{j}')$ koji je dobiven rotacijom sustava $(O; \vec{i}, \vec{j})$ oko točke O u pozitivnom smislu za kut φ . Tada su vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}', \vec{j}'$ vezani jednakostima (46). Po definiciji matrice linearnog operatora vrijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{i}) &= a_{11}\vec{i} + a_{12}\vec{j}, \\ \mathcal{A}(\vec{j}) &= a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j}. \end{aligned} \quad (49)$$

Iz (46) slijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{i}') &= \cos \varphi \mathcal{A}(\vec{i}) + \sin \varphi \mathcal{A}(\vec{j}), \\ \mathcal{A}(\vec{j}') &= -\sin \varphi \mathcal{A}(\vec{i}) + \cos \varphi \mathcal{A}(\vec{j}), \end{aligned}$$

odnosno, zbog (49),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{i}) &= (a_{11} \cos \varphi + a_{12} \sin \varphi) \vec{j} + (a_{12} \cos \varphi + a_{22} \sin \varphi) \vec{j}, \\ \mathcal{A}(\vec{j}) &= (-a_{11} \sin \varphi + a_{12} \cos \varphi) \vec{i} + (-a_{12} \sin \varphi + a_{22} \cos \varphi) \vec{j}. \end{aligned}$$

Dalje iz (46) nalazimo da je

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \vec{i}' \cos \varphi - \vec{j}' \sin \varphi, \\ \vec{j} &= \vec{i}' \sin \varphi + \vec{j}' \cos \varphi, \end{aligned}$$

pa konačno imamo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{i}') &= (a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{13} \sin^2 \varphi) \vec{i}' \\ &\quad + ((a_{22} - a_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)) \vec{j}', \\ \mathcal{A}(\vec{j}') &= ((a_{22} - a_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)) \vec{i}' \\ &\quad + (a_{11} \sin^2 \varphi - 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \cos^2 \varphi) \vec{j}', \end{aligned}$$

pa je matrica A' linearnog operatora u bazi (\vec{i}', \vec{j}') oblika

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi & (a_{22} - a_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ (a_{22} - a_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) & a_{11} \sin^2 \varphi - 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \cos^2 \varphi \end{bmatrix}.$$

Dakle, A' je opet simetrična matrica. Lakim računom se verificira da je $\text{tr } A = \text{tr } A'$ i $\det A = \det A'$. Provjerite to! Slično se vidi da je tvrdnja istinita i za zrcaljenje. Preostaje da se pokaže da su $\text{tr } A$ i $\det A$ invarijante s obzirom na translaciju. Uzmimo translaciju koja ishodište O koordinatnog sustava preslikava u točku $O' = (\alpha, \beta)$. Tada su koordinate u sustavima $(O; \vec{i}, \vec{j})$ i $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$ vezane sa $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$. U sustavu $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$ krivulja 2. reda (43) ima jednadžbu

$$\begin{aligned} a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1)x' + 2(a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_2)y' + \\ (a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_1\alpha + 2a_2\beta + a) = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

U jednadžbi (50) koeficijenti uz kvadratne članove su isti i u (43), pa su stoga $\text{tr } A$ i $\det A$ invarijante translacija.

Kako je svaka izometrija ravnine kompozicija rotacije i translacije ili zrcaljenja i translacije, to su $\text{tr } A$ i $\det A$ invarijante svih izometrija ravnine, tj. ne ovise o izboru koordinatnog sustava.

Označimo li sa $f(x, y)$ polinom na lijevoj strani jednadžbe (43), vidimo da je slobodni član u (50) upravo jednak $f(\alpha, \beta)$, pa uz oznaku

$$\begin{aligned} 2(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta), \\ 2(a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_2) &= \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (51)$$

(50) možemo napisati u obliku

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) \cdot x' + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) \cdot y' + f(\alpha, \beta) = 0. \quad (52)$$

Onima koji znaju analizu nije potrebno da pamte formule (51), jer su $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ parcijalne derivacije po x i y polinoma f . Pokažimo sada da je Δ invarijanta s obzirom na translacije. Iz (50) razabiremo da je invarijanta Δ u sustavu $(O'; \vec{i}, \vec{j})$ oblika

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) \\ a_{12} & a_{22} & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) & f(\alpha, \beta) \end{vmatrix}.$$

Ako ovamo uvrstimo (51) i $f(\alpha, \beta)$ i od trećeg retka oduzmemo prvi pomnožen sa α i drugi pomnožen sa β , dobit ćemo

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_2 \\ a_1 & a_2 & a_1\alpha + a_2\beta + a \end{vmatrix}.$$

Ako od trećeg stupca oduzmemo prvi pomnožen sa α i drugi pomnožen sa β , slijedi

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} = \Delta$$

i tvrdnja je dokazana. Dalje se, slično kao i prije, pokazuje da je Δ invarijanta rotacija i zrcaljenja, pa Δ ne ovisi o izboru koordinatnog sustava.

U dosadašnjim razmatranjima vidjeli smo da predznak od $\det A$ određuje tip krivulje (Propozicija 8), pa krivulje za koje je $\det A > 0$ zovemo krivuljama **eliptičkog tipa**. Ako je $\det A < 0$, onda krivulju zovemo **hiperboličkog tipa**, a krivulje za koje je $\det A = 0$ zovemo krivuljama **paraboličkog tipa**. Prema Propoziciji 8. krivulje eliptičkog tipa jesu elipsa, kružnica, točka i prazan skup. Krivulje hiperboličkog tipa jesu hiperbola, par ukrštenih pravaca, a paraboličkog parabola, par paralelnih pravaca i prazan skup.

Pokažimo sada kako se na osnovi invarijanata može prepoznati točno o kojoj se krivulji radi.

Ako je $\det A \neq 0$, onda smo vidjeli da postoji koordinatni sustav u kojemu krivulja ima jednadžbu oblika (47), tj.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0 \quad (53)$$

gdje su λ_1, λ_2 svojstvene vrijednosti krivulji pridruženog operatora A . Jednadžba (53) zove se **kanonski oblik** jednadžbe krivulje. U ovom je slučaju invarijanta Δ

oblika

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 c,$$

dakle je $c \cdot \det A = \Delta$, pa (53) možemo pisati u obliku

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\det A} = 0. \quad (54)$$

Ako je $\det A > 0$ i $\Delta \neq 0$ i $\lambda_1 \cdot \frac{\Delta}{\det A} < 0$, onda je krivulja elipsa (kružnica). Zbog $\det A > 0$ su λ_1 i $\text{tr } A$ istog predznaka, pa je $\Delta \cdot \text{tr } A < 0$. Dakle, za $\det A > 0$, $\Delta \neq 0$ i $\Delta \cdot \text{tr } A < 0$ krivulja je elipsa. Krivulja je prazan skup ako je $\Delta \cdot \text{tr } A > 0$, a ako je pak $\text{tr } A > 0$ i $\Delta = 0$, onda krivulja degenerira u točku.

Razmotrimo slučaj $\det A < 0$. Ako je još i $\Delta \neq 0$, krivulja je hiperbola, a unija ukrštenih pravaca za $\Delta = 0$.

Ako je pak $\det A = 0$, krivulja je paraboličkog tipa. Prema (48) postoji koordinatni sustav u kojemu ona ima jednadžbu oblika

$$\lambda_2 y^2 + 2b_1 x = 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = 0, b_1 \neq 0.$$

Taj se oblik zove kanonski oblik jednadžbe parabole. U ovom je slučaju

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b_1^2 \lambda_2.$$

Dakle je $\Delta \neq 0$, pa je krivulja parabola. Očito, za $\Delta = 0$ krivulja je unija paralelnih pravaca, pravac ili prazan skup.

Pregledno, sve te rezultate možemo sažeti u sljedećoj tablici.

$\det A > 0$	$\Delta \neq 0$	$\Delta \cdot \text{tr } A < 0$ elipsa, $\Delta \cdot \text{tr } A > 0$ prazan skup
	$\Delta = 0$	jednočlan skup (točka)
$\det A < 0$	$\Delta \neq 0$	hiperbola
	$\Delta = 0$	par ukrštenih pravaca
$\det A = 0$	$\Delta \neq 0$	parabola
	$\Delta = 0$	par paralelnih pravaca, pravac, prazan skup.

Iz tablice vidimo koje je geometrijsko značenje invarijante Δ . Ako je $\Delta \neq 0$, krivulja je nedegenerirana, tj. elipsa (kružnica), hiperbola ili parabola. Ako je $\Delta = 0$, onda je krivulja degenerirana, tj. točka, unija ukrštenih pravaca, unija paralelnih pravaca, pravac ili prazan skup.

8.7. Skiciranje krivulja 2. reda

Na osnovi činjenica iz 8.5. i 8.6. možemo brzo skicirati krivulju 2. reda zadanu svojom jednačbom (43).

Pretpostavimo da je $\Delta \neq 0$, tj. da je krivulja nedegenerirana. Slijed je ovakav:

I. Najprije se odrede glavne osi. Za to treba odrediti svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 linearnog operatora A pridruženog krivulji. Svojstvene vektore $\vec{i}' = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{j}' = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ dobivamo pomoću rješenja sustava jednačaba

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}y_1 &= 0 & i & & (a_{11} - \lambda_2)x_2 + a_{12}y_2 &= 0 \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda_1)y_1 &= 0 & & & a_{12}x_2 + (a_{22} - \lambda_2)y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Kako je determinanta svakog od tih sustava jednaka nuli, to je prvi sustav ekvivalentan s jednačbom $(a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}y_1 = 0$, a drugi s $(a_{11} - \lambda_2)x_2 + a_{12}y_2 = 0$. Odavde slijedi da koordinate vektora \vec{i}' i \vec{j}' zadovoljavaju jednakosti

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{\lambda_2 - a_{22}}{a_{12}}.$$

Drugim riječima, koeficijenti smjerova k_1 i k_2 naših koordinatnih osi sustava $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$ dani su sa

$$k_i = \frac{\lambda_i - a_{11}}{a_{12}}, \quad i = 1, 2. \quad (55)$$

II.a Odredi se centar simetrije krivulje 2. reda ako on postoji. Iz (52) razabiremo da je krivulja centralno simetrična ako je $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0$. Drugim riječima, centar simetrije je, prema (51), rješenje sustava jednačbi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

To je za $\det A \neq 0$ Cramerov sustav i ima jedinstveno rješenje. U sustavu $(O' = (\alpha, \beta); \vec{i}', \vec{j}')$ krivulja 2. reda ima jednačbu oblika (53), pa se na osnovi toga lako nacrtava.

II.b To je slučaj kada krivulja nema centra, a to je onda kada je $\det A = 0$. Kako je po pretpostavci $\Delta \neq 0$, radi se o paraboli. U ovom je slučaju jedna od svojstvenih vrijednosti jednaka nuli. Neka je, na primjer, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Tada su, prema (55), koeficijenti smjerova glavnih osi dani sa

$$k_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}, \quad k_2 = -\frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}. \quad (57)$$

Odredimo sada i tjeme parabole. Os ordinata novog sustava, dakle ima koeficijent smjera k_2 i ta je os ujedno tjemena tangenta. Iz razmatranja u prethodnoj točki

prema (51) slijedi, ako je (α, β) tjeme, onda tjemena tangenta mora pripadati pravcu paralela određenom pravcima $\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, tj. k_2 mora zadovoljavati jednadžbu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) + k_2 \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0.$$

Drugim riječima, koordinate tjemena se dobiju kao rješenja sustava koji se sastoji iz jednadžbe (1) i jednadžbe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

ili opširnije

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + k_2(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0, \quad (58)$$

gdje je k_2 dan sa (57). Očito je tada $k_1 = -\frac{a_{11}}{a_{22}}$ koeficijent smjera osi simetrije parabole. Uzastopnim izvođenjem koraka I i II.b lako se nalazi kanonski oblik parabole i ona skicira.

Pokažimo na primjerima kako se to radi.

Primjer 15. Skicirajte krivulju $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 24x + 24y = 0$.

Rješenje. Matrica linearnog operatora krivulje je

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det A = 36 > 0$$

i krivulja je eliptičkog tipa. Invarijanta Δ jednaka je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -2 & -12 \\ -2 & 5 & 12 \\ -12 & 12 & 0 \end{vmatrix} = -1296 \neq 0,$$

dakle, krivulja je nedegenerirana, dakle elipsa.

Svojsvene vrijednosti linearnog operatora krivulje rješenja su jednadžbe

$$\begin{vmatrix} 8 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Oдавde je $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$.

Prema (55) glavni smjerovi imaju koeficijente

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{9 - 8}{-2} = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{4 - 8}{-2} = 2.$$

Dakle, koeficijent smjera nove osi x' je $-1/2$, a osi y' je 2.

Prema (56) centar simetrije dobiva se kao rješenje sustava

$$\begin{aligned} 8x - 2y - 12 &= 0, \\ -2x + 5y + 12 &= 0. \end{aligned}$$

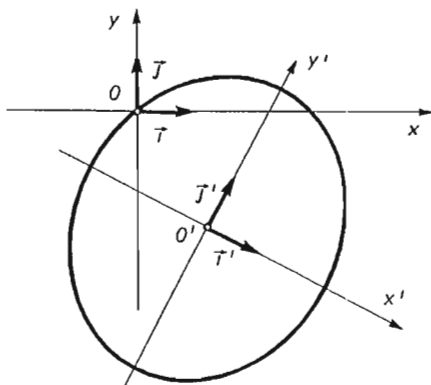
Odavde je $x = 1$, $y = -2$, pa je centar simetrije u točki $O' = (1, -2)$. Prema (54) kanonska jednačba krivulje u sustavu $O'x'y'$ glasi

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\det A} = 0,$$

tj.

$$9x'^2 + 4y'^2 = 36.$$

Sada u sustavu Oxy , prema izračunatim podacima, nacrtamo sustav $O'x'y'$ i u njemu elipsu $9x'^2 + 4y'^2 = 36$ (sl. 320). ■



Sl. 320.

Primjer 16. Skicirajte krivulju 2. reda zadanu jednačbom $17x^2 - 24xy + 7y^2 - 96x + 56y + 87 = 0$.

Rješenje. Najprije je $A = \begin{bmatrix} 17 & -12 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$, $\det A = -25$, pa je krivulja hiperboličkog tipa. Dalje je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & -12 & -48 \\ -12 & 7 & 28 \\ -48 & 28 & 87 \end{vmatrix} = 25^2 \neq 0,$$

pa se radi o hiperboli. Svojevrsne vrijednosti linearnog operatora krivulje rješenja su jednačbe

$$\begin{vmatrix} 17 - \lambda & -12 \\ -12 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Odavde je $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = -1$.

Koeficijenti smjera glavnih osi jednaki su

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = -\frac{2}{3}, \quad k_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{3}{2}.$$

Dakle, nova os x' ima koeficijent smjera $-\frac{2}{3}$, a os y' koeficijent smjera $\frac{3}{2}$. Prema (56) centar simetrije dobiva se iz sustava jednačaba

$$17x - 12y - 48 = 0, \quad -12x + 7y + 28 = 0.$$

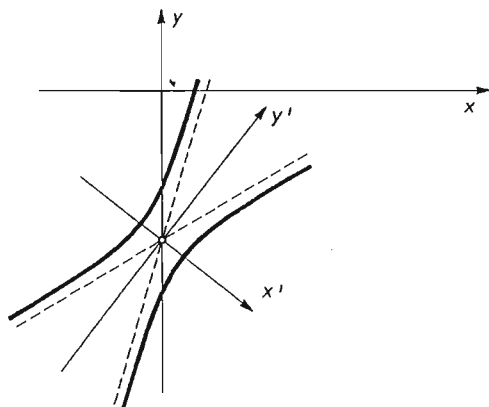
Ođavde je $x = 0$, $y = -4$. Dakle, $O' = (0, -4)$ novo je središte. Kanonski oblik u sustavu $O'x'y'$ glasi

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\det A} = 0,$$

tj.

$$25x'^2 - y'^2 = 25.$$

Krivulja je skicirana na sl. 321. ■



Sl. 321.

Primjer 17. Skicirajte krivulju 2. reda zadanu jednadžbom $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0$.
Rješenje. Najprije je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det A = 0$$

i krivulja je paraboličkog tipa. Kako je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

krivulja je parabola. Svojevredne vrijednosti operatora krivulje rješenja su jednadžbe

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ođavde je $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Glavne osi, prema (57), imaju koeficijente smjera

$$k_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -1, \quad k_2 = -\frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} = 1.$$

Dakle, nova os x' ima koeficijent smjera -1 , a os y' koeficijent smjera 1 . Prema (58) koordinate tjemena zadovoljavaju jednadžbu

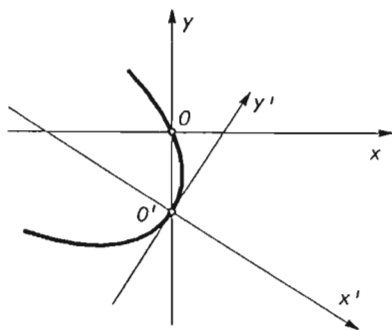
$$\left(x + y + \frac{3}{2}\right) + \left(x + y + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

tj. $y = -x - 1$. Dakle, koordinate tjemena rješenja su sustava

$$\begin{aligned}x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y &= 0, \\y &= -x - 1.\end{aligned}$$

Lako se vidi da je $x = 0$, $y = -1$. Prema tome, tjeme je u točki $O' = (0, -1)$, Kanonska jednadžba parabole u sustavu $O'x'y'$ oblika je $\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' = 0$, gdje je $b_1 = \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{\text{tr}A}}$.

Dakle, kanonski oblik je $y'^2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x'$. Kako parabola prolazi ishodištem, to njen graf izgleda kao na sl. 322. ■



Sl. 322.

Pokažimo kako se skicira degenerirana krivulja 2. reda.

Primjer 18. Skicirajte graf krivulje $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$.

Rješenje. Imamo redom: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det A = 0$, pa je krivulja paraboličkog tipa. Kako je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

to je ona ili pravac ili unija paralelnih pravaca ili prazan skup. Pokušajmo faktorizirati jednadžbu krivulje. Shvatimo je kao kvadratnu jednadžbu za nepoznanicu y :

$$y^2 - 2(2x + 1)y + (4x^2 + 4x - 3) = 0.$$

Oдавде je $y = 2x + 1 \pm \sqrt{(2x + 1)^2 - (4x^2 + 4x - 3)}$, odnosno $y = 2x + 1 \pm 2$. Dakle, jednadžba krivulje može se napisati u obliku

$$(2x - y + 3)(2x - y - 1) = 0,$$

pa je graf unija dvaju paralelnih pravaca. ■

Primjer 19. Identificirajte krivulju zadanu jednažbom $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$.

Rješenje. Imamo redom

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det A = 8 > 0, \quad \text{tr } A = 6,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0.$$

Kako je krivulja eliptičkog tipa i $\Delta \cdot \text{tr } A = 30 > 0$, to iz tablice u t. 8.6. vidimo da je krivulja prazan skup. ■

§ 9. Analitička geometrija prostora

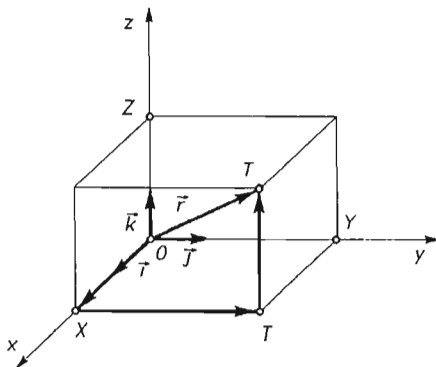
9.1. Kartezijev koordinatni sustav u prostoru

Ponovimo sada sustavno već prije rečeno o prostornom koordinatnom sustavu.

Od koordinatnih sustava kojima se služimo u analitičkoj geometriji prostora najčešće se primjenjuje **pravokutni Kartezijev koordinatni sustav**, koji je analogon takvog sustava u ravnini. Koordinatne osi tog sustava su tri međusobno okomita orijentirana pravca Ox , Oy , Oz što prolaze jednom točkom O , koju zovemo **ishodištem** koordinatnog sustava. Pravce Ox , Oy , Oz zovemo **koordinatnim osima**, pri čemu se pravac Ox zove x -os ili os **apscisa**, pravac Oy y -os ili os **ordinata** i pravac Oz z -os ili os **aplikata**. S obzirom na međusobnu orijentaciju koordinatnih osi, razlikujemo desni sustav i lijevi sustav. Sustav je **desni (lijevi)** ako koordinatne osi Ox , Oy i Oz imaju redom smjerove kao ispruženi palac, ispruženi kažiprst i savinuti srednji prst desne (lijeve) ruke. U svojim ćemo se razmatranjima koristiti desnim sustavom. Međutim sve će izvedene formule vrijediti u oba sustava.

Na svakoj koordinatnoj osi uvedimo koordinatni sustav na pravcu, tj. odaberimo na pozitivnim dijelovima osi Ox , Oy , Oz redom točke E_1 , E_2 , E_3 , tako da je $|OE_1| = |OE_2| = |OE_3| = 1$. Jedinичne vektore $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$ zovemo **jedinичnim vektorima (ortovima)** u smjeru koordinatnih osi.

Za tako uvedeni koordinatni sustav upotrebljavamo oznaku $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ravninu određenu s osima x i y zovemo **xy -ravninom**. Analogno se definiraju yz -ravnina i xz -ravnina. Te ravnine jednim imenom zovemo **koordinatnim ravninama**. Tako uvedeni koordinatni sustav omogućuje nam da svakoj točki T prostora pridružimo uređenu trojku realnih brojeva na sljedeći način. Točkom T položimo ravnine paralelne s koordinatnim ravninama yz , xz i xy . One sijeku koordinatne osi x , y , z redom u točkama X , Y i Z . Očito postoje realni brojevi x , y , z , takvi da je $\overrightarrow{OX} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OY} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OZ} = z\vec{k}$. Realne brojeve x , y , z zovemo **koordinatama**



Sl. 323.

točke T . Realni broj x zovemo **apscisom** točke T , y zovemo **ordinatom**, a z **aplikatom** točke T . Tako je svakoj točki prostora T pridružena uređena trojka (x, y, z) realnih brojeva i obrnuto. Prema tome, imamo bijekciju između skupa točaka prostora i skupa \mathbf{R}^3 svih uređenih trojki realnih brojeva. Da točka T ima spomenute koordinate, označavamo sa $T = (x, y, z)$. Ovdje nas znak jednakosti podsjeća na tu bijekciju i kazuje nam da ta dva skupa možemo identificirati.

Kao i u ravnini, vektor \vec{OT} zovemo **radijvektorom** točke T i označavamo sa \vec{r} . Sa sl. 323. vidimo da je $\vec{OT} = \vec{OX} + \vec{XT} + \vec{T'T}$. Kako je $\vec{XT} = \vec{OY}$ i $\vec{T'T} = \vec{OZ}$, to je $\vec{OT} = \vec{OX} + \vec{OY} + \vec{OZ}$, tj.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1)$$

9.2. Koordinate vektora

Neka je \vec{a} bilo koji vektor prostora $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Odaberimo onaj reprezentant vektora \vec{a} kojemu je početak u ishodištu. Tada je taj reprezentant radijvektor neke točke prostora, pa prema (1) postoje realni brojevi a_x, a_y, a_z , takvi da je

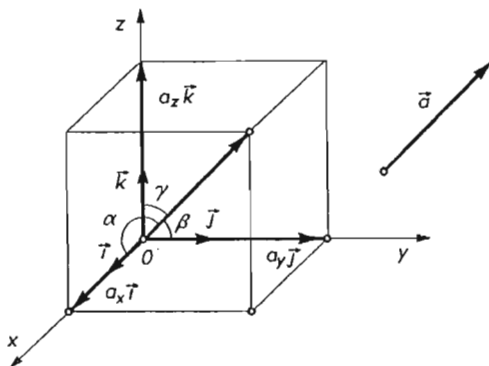
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \quad (1)$$

Brojeve a_x, a_y, a_z zovemo **koordinatama** vektora \vec{a} , a vektore $a_x\vec{i}, a_y\vec{j}, a_z\vec{k}$ njegovim **komponentama**. Da su a_x, a_y, a_z koordinate vektora \vec{a} , simbolički označavamo sa $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ (sl. 324).

Vidimo da je $|\vec{a}|$ dijagonala na sl. 324. nacrtanog paralelepipeda, pa je

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2)$$

Označimo redom sa α, β, γ kutove koje vektor \vec{a} zatvara s vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tada



Sl. 324.

je, prema (2), očito

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \quad (3)$$

Brojeve $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ zovemo **kosinusima smjera** vektora \vec{a} .

Neka je \vec{a} bilo koji vektor i \vec{a}_0 jedinični vektor u smjeru vektora \vec{a} . Tada je $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, pa iz (1) i (2) slijedi

$$\vec{a}_0 = \frac{a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad (4)$$

pa iz (3) slijedi $\vec{a}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$. Stoga su kosinusi smjerova nekog vektora koordinate jediničnog vektora u smjeru tog vektora.

Uočimo da kosinusi smjera nisu nezavisni, jer iz (3) slijedi

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (5)$$

Kao i u ravnini vrijedi: ako su $A_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$ dvije točke, onda je $\overrightarrow{A_1 A_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$.

Primjer 1. Vektor \vec{a} zatvara s koordinatnim osima x i y kutove $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 120^\circ$. Odredite \vec{a} ako je $|\vec{a}| = 2$ i ako je kut koji taj vektor zatvara s osi z tup.

Rješenje. Iz (5) je $\cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, pa je $\vec{a}_0 = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$. Kako je $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$, to je $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} - \sqrt{2}\vec{k}$. ■

Na isti način kao i u § 1 pokazuje se ako su

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \quad \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

tri vektora, onda vrijedi

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}, \quad (6)$$

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha a_x \vec{i} + \alpha a_y \vec{j} + \alpha a_z \vec{k}, \quad \alpha \in \mathbf{R}. \quad (7)$$

Skalarni je produkt vektora dan sa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (8)$$

vektorski sa

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (9)$$

a mješoviti sa

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Za koordinatne vektore $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vrijedi $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1; \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$.

O geometrijskom značenju tih produkata i njihovim svojstvima bilo je prije riječi u pogl. V, § 5.6.

Pokažimo sada na nekoliko primjera kako se rabe te formule.

Primjer 2. Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Napišite vektor $\vec{d} = 11\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora \vec{a}, \vec{b} i \vec{c} .

Rješenje. Kako je mješoviti produkt tih vektora

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$

to su \vec{a}, \vec{b} i \vec{c} linearno nezavisni vektori, pa postoji rastav $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Uvrstimo li koordinate vektora, dobit ćemo

$$11\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k} = (3\alpha - \beta + 2\gamma)\vec{i} + (-2\alpha + \beta + \gamma)\vec{j} + (\alpha - 2\beta - 3\gamma)\vec{k},$$

a odatle je

$$\begin{aligned} 3\alpha - \beta + 2\gamma &= 11, \\ -2\alpha + \beta + \gamma &= -6, \\ \alpha - 2\beta - 3\gamma &= 5. \end{aligned}$$

Rješenje tog sustava je $\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = 1$, pa je $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$. ■

Primjer 3. Zadani su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Riješite sustav

$$\vec{x} \cdot \vec{a} = -5, \quad \vec{x} \cdot \vec{b} = -11, \quad \vec{x} \cdot \vec{c} = 20.$$

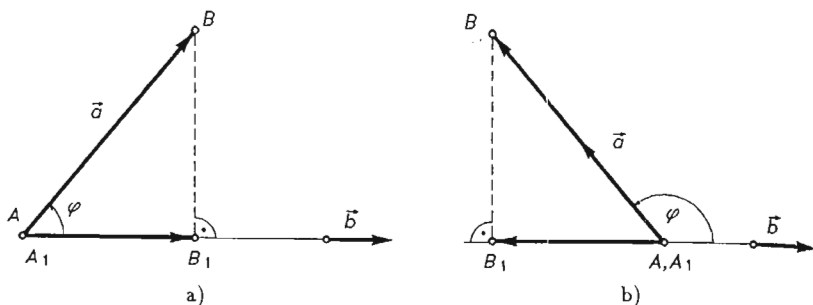
Rješenje. Stavimo li $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, tada zadani sustav prema (7) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -5, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -11, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 20. \end{aligned}$$

Rješenje tog sustava je $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -2$. Stoga je $\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$. ■

Primjer 4. Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ dva vektora. Označimo sa A_1 i B_1 ortogonalne projekcije točaka A i B na pravac CD . Vektor $\overrightarrow{A_1B_1}$ zovemo ortogonalnom projekcijom vektora \vec{a} na orijentirani pravac određen vektorom \vec{b} , odnosno na os određenu vektorom \vec{b} . Odredite projekciju vektora $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ na os određenu vektorom $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Rješenje. Uzmimo reprezentante vektora kao na sl. 325.a, b. Ako je kut φ između vektora \vec{a} i \vec{b} siljast (sl. 325.a), onda iz $\triangle A_1B_1B$ slijedi $|\overrightarrow{A_1B_1}| = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$, a ako je tup, onda je $|\overrightarrow{A_1B_1}| = -|\vec{a}| \cos \varphi$. Po definiciji skalarnog produkta je $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, pa u



Sl. 325.

oba slučaja dobivamo da je $|\overrightarrow{A_1B_1}| = |\vec{a}| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, pa konačno $pr_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b}_0$. U zadanom konkretnom slučaju dobivamo

$$pr_{\vec{b}} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}. \blacksquare$$

Primjer 5. Zadane su točke $A = (2, 1, -1)$, $B = (3, 0, 1)$, $C = (2, -1, 3)$. Odredite točku D na osi y , tako da obujam tetraedra $ABCD$ bude po apsolutnoj vrijednosti jednak 5.

Rješenje. Stavimo $D = (0, y, 0)$. Tada je

$$\overrightarrow{DA} = 2\vec{i} + (1 - y)\vec{j} - \vec{k}, \quad \overrightarrow{DB} = 3\vec{i} - y\vec{j} + \vec{k}, \quad \overrightarrow{DC} = 2\vec{i} - (1 + y)\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Prema uvjetima zadatka je

$$\pm 5 = \frac{1}{6}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 - y & -1 \\ 3 & -y & 1 \\ 2 & -1 - y & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(2y - 1).$$

Oдавде je $y_1 = 8$, $y_2 = -7$. Dakle, postoje dva rješenja $D_1 = (0, 8, 0)$ i $D_2 = (0, -7, 0)$. \blacksquare

Primjer 6. Dokažite da za svaka tri vektora \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} vrijedi $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$.

Rješenje. Odaberimo Kartezijev koordinatni sustav, tako da je $\vec{a} = a_x\vec{i}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$, $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$. Prema (9) je

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_y \vec{k}, \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -a_x b_y c_y \vec{i} + a_x b_y c_x \vec{j}.$$

S druge strane, iz (8) slijedi

$$\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = -a_x b_y c_y \vec{i} + a_x b_y c_x \vec{j}.$$

Iz ovih jednakosti slijedi tvrdnja. \blacksquare

Primjer 7. Dokažite ovaj Jacobijev identitet (usp. V, 5.6):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}.$$

Rješenje. Prema prethodnom primjeru i zbog antikomutativnosti vektorskog produkta imamo redom

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= -(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} - (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} - (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \\ &= -\vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{a}) + \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) + \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \vec{0}. \blacksquare \end{aligned}$$

9.3. Osnovne metričke relacije analitičke geometrije prostora

Udaljenost dviju točaka. Formula za udaljenost dviju točaka u prostoru izvodi se analogno kao i u ravnini. Neka su $T_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$ dvije točke i \vec{r}_1, \vec{r}_2 njihovi radijvektori. Tada je $\overline{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$. Odavde slijedi da je udaljenost tih točaka jednaka

$$d(T_1, T_2) = |\overline{T_1T_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

Dijeljenje dužine u zadanom omjeru. Djelšni omjer λ uvodi se kao i u slučaju točaka ravnine (prvi dio, str. 285) i sasvim na isti način izvodi se ako su \vec{r}_1 i \vec{r}_2 radijvektori točaka T_1 i T_2 , onda je radijvektor \vec{r} točke $T = (x, y, z)$, koja orijentiranu dužinu T_1T_2 dijeli u zadanom omjeru λ , jednak

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 - \lambda\vec{r}_2}{1 - \lambda}. \quad (2)$$

Koordinatni zapis od (2) glasi

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}. \quad (3)$$

Posebno T je polovište dužine $\overline{T_1T_2}$ ako je $\lambda = -1$. Iz (2) tada za radijvektor polovišta slijedi $\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$, odnosno koordinatno $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$.

Analogno kao i u ravnini određuje se radijvektor \vec{r} težišta trokuta $\Delta T_1T_2T_3$, kojemu su zadani radijvektori vrhova \vec{r}_i , $i = 1, 2, 3$. Lako se vidi da je

$$\vec{r} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3),$$

odnosno koordinatno

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \quad z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Primjer 8. Dokažite da se dužine koje spajaju polovišta suprotnih bridova tetraedra sijeku u jednoj točki i ta je točka njihovo zajedničko polovište.

Rješenje. Neka je $A_1A_2A_3A_4$ tetraedar i \vec{r}_i radijvektor vrha A_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Neka je dalje \vec{r}_i radijvektor polovišta P_i , brida $\overline{A_iA_j}$. Tada su P_{12} i P_{34} polovišta suprotnih bridova. Tada je $\vec{r}_{12} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$, $\vec{r}_{34} = \frac{1}{2}(\vec{r}_3 + \vec{r}_4)$. Neka je \vec{r} radijvektor polovišta P dužine $\overline{P_{12}P_{34}}$. Očito je $\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{r}_{12} + \vec{r}_{34})$, odnosno $\vec{r} = \frac{1}{4}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4)$. Provedemo li analogna razmatranja za dužine $\overline{P_{14}P_{23}}$ i $\overline{P_{13}P_{24}}$, dobit ćemo za radijvektor njihovih polovišta opet isti izraz, a to znači da se sve te dužine sijeku u istoj točki, koja je njihovo zajedničko polovište. (Usp. stereometrijsko rješenje, pogl. V, §5, Primjer 6)

Primjer 9. Težišnicom tetraedra zovemo dužinu koja spaja njegov vrh sa težištem suprotne strane. Dokažite da se težišnice tetraedra sijeku u jednoj točki i da ta točka dijeli svaku težišnicu u omjeru 3 : 1, računajući od vrha. To se sjecište zove **težište tetraedra**.

Rješenje. Uzmimo tetraedar $A_1A_2A_3A_4$ i neka su \vec{r}_i radijvektori njegovih vrhova A_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Označimo sa T_1 težište strane, tj. trokuta $\Delta A_2A_3A_4$, i promotrimo težišnicu $\overline{A_1T_1}$. Radijvektor točke T_1 tada je dan sa $\vec{r}_{T_1} = \frac{1}{3}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4)$. Označimo sa T onu točku te težišnice koja je dijeli u omjeru 3 : 1, računajući od vrha. Tada je vrijednost djelišnog omjera u kojemu ona dijeli težišnicu jednaka $\lambda = -3$. Prema (2) radijvektor \vec{r} točke T jednak je $\vec{r} = \frac{1}{4} \left[\vec{r}_1 - (-3) \cdot \frac{1}{3}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4) \right]$, tj. $\vec{r} = \frac{1}{4}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4)$. Provedemo li analogan račun za druge težišnice za radijvektore točaka koje ih dijele u istom omjeru, dobit ćemo isti izraz, što dokazuje tvrdnju. (Usp. stereometrijsko rješenje, pogl. V, §5, Primjer 6.) Uočite da se točka P u rješenju Primjera 8. podudara s težištem T tetraedra. ■

Površina trokuta. Trokutu u prostoru nije moguće pridružiti orijentaciju kao što je to u slučaju ravnine. Stoga ćemo trokutu kao mjerni broj površine pridružiti uvijek pozitivan realan broj. Neka je $\Delta A_1A_2A_3$ trokut i \vec{r}_i , $i = 1, 2, 3$ radijvektori njegovih vrhova.

Uzevši u obzir geometrijsko značenje modula vektorskog produkta, površinom trokuta zvat ćemo realan broj P definiran formulom

$$P = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}|. \quad (4)$$

Pomoću radijvektora (4) se može napisati u obliku

$$P = \frac{1}{2} |(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)|. \quad (5)$$

Primjer 10. Vrhovi su trokuta u točkama $A = (1, -1, 2)$, $B = (5, -6, 2)$, $C = (1, 3, -1)$. Odredite duljinu visine trokuta spuštene iz vrha B na stranicu AC .

Rješenje. Najprije je $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$, pa je

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}.$$

Prema (1) je $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 25$, pa je prema (4) površina trokuta jednaka $P = \frac{25}{2}$. Dalje je, prema (1), $d(A, C) = 5$. Kako je $P = \frac{1}{2} \cdot d(A, C) \cdot v$, gdje je v tražena visina, to je $\frac{25}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot v$. Odavde je $v = 5$. ■

Primjer 11. Trokut je zadan koordinatama svojih vrhova $A_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Izvedite formulu za njegovu površinu.

Rješenje. Prema (5) je

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2},$$

gdje kvadrat pod korijenom znači skalarni kvadrat (sjetite se da je $|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$). Dalje je

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}$$

i konačno

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}. \blacksquare$$

9.4. Orijentacija prostora. Volumen tetraedra

Pojam orijentacije prostora uvodi se analogno kao i orijentacija ravnine. Neka je $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uređena trojka linearno nezavisnih vektora sa zajedničkim početkom O . Uređeni par $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ zovemo **afinim koordinatnim sustavom** ili kraće **sustavom**. U skup \mathcal{S} svih sustava uvodi se relacija \sim ovako. Neka su $S = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ i $S' = (O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ dva sustava. Kako su vektori \vec{e}_i i \vec{e}'_i linearno nezavisni, to postoje rastavi $\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \vec{e}_j$, $i = 1, 2, 3$. Zbog linearne nezavisnosti tih vektora je

$\det(a_{ij}) \neq 0$. Kažemo da je $S \sim S'$ ako i samo ako je $\det(a_{ij}) > 0$. Kao i u slučaju ravnine pokazuje se (provjerite) da je \sim jedna relacija ekvivalencije na skupu \mathcal{S} svih sustava. Dalje, skup $\mathcal{S}' \sim$ ima samo dvije klase i svaku od tih klasa zovemo **orijentacijom prostora**. Uređeni par koji se sastoji od prostora i jedne od tih klasa zovemo **orijentiranim prostorom**.

U 9.1. uveli smo pojam desnog Kartezijeva sustava, pa ćemo stoga svaki sustav koji je ekvivalentan sa sustavom $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ zvati **desnim koordinatnim sustavom**. Dogovorom uzimamo da je prostor orijentiran tom klasom.

Primjer 12. Pokažite, ako su \vec{a} i \vec{b} linearno nezavisni vektori, da je sustav $(O; \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ uvijek desni sustav.

Rješenje. Neka je $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Tada je, prema (9),

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Prema definiciji desnog sustava treba vidjeti da je

$$D = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \end{vmatrix} > 0.$$

Razvijemo li tu determinantu po elementima trećeg retka, dobit ćemo

$$D = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2 > 0.$$

Uočite da ne može biti $D = 0$, jer bi iz prethodnog izraza slijedilo da su vektori \vec{a} i \vec{b} linearno zavisni, a oni to nisu. ■

U orijentiranom prostoru moguće je i orijentirati svaki tetraedar. Ako je, naime, $A_1A_2A_3A_4$ (poredak vrhova je bitan) neki tetraedar, tada kažemo da je on pozitivno orijentiran ako je sustav $(A_1; \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4})$ pozitivno orijentiran. Da je poredak vrhova bitan, pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 13. Pokažite, ako je tetraedar $A_1A_2A_3A_4$ pozitivno orijentiran, da je tada tetraedar $A_1A_2A_4A_3$ negativno orijentiran.

Rješenje. Neka su $A_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ vrhovi tetraedra. Ako je $A_1A_2A_3A_4$ pozitivno orijentiran, to znači da je

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} > 0.$$

Za tetraedar $A_1A_2A_4A_3$ je

$$\det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_4 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Iz ovih jednakosti slijedi da je $\det(b_{ij}) = -\det(a_{ij}) < 0$ i tvrdnja je dokazana. ■

Iz ovih razmatranja odmah slijedi: ako je tetraedar $A_1A_2A_3A_4$ pozitivno orijentiran, onda je tetraedar $A_iA_jA_kA_l$ pozitivno ili negativno orijentiran, već prema tome je li permutacija (i, j, k, l) parna ili neparna. Dalje, tetraedar $A_1A_2A_3A_4$ je **pozitivno orijentiran** ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} < 0. \quad \blacksquare$$

Pojam orijentacije omogućuje nam da svakom tetraedru pridružimo njegov **orijentirani volumen**, kraće volumen.

Neka su $A_i = (x_i, y_i, z_i)$ vrhovi orijentiranog tetraedra $A_1A_2A_3A_4$ i \vec{r}_i radijvektori vrhova. Vektori $\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \vec{r}_4 - \vec{r}_1$ tada razapinju paralelepiped. Kako je volumen tetraedra jednak jednoj šestini volumena tog paralelepipeda, to je volumen V orijentiranog tetraedra jednak

$$V = \frac{1}{6} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \vec{r}_4 - \vec{r}_1) \quad (1)$$

ili koordinatno

$$V = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Očito, ako je tetraedar pozitivno orijentiran, onda je $V > 0$, a negativno orijentiran ako je $V < 0$.

Dalje iz (2) slijedi da su točke $A_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ **komplanarne** ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Primjer 14. Neka je $A_1A_2A_3A_4$ tetraedar, T_i težišta strana suprotnih vrhu A_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Odredite $V(T_1T_2T_3T_4) : V(A_1A_2A_3A_4)$. Jesu li ta dva tetraedra iste orijentacije?

Rješenje. Ako sa \vec{r}_i označimo radijvektore vrhova A_i , a sa \vec{r}_{T_i} radijvektore vrhova T_i , $i = 1, 2, 3, 4$, onda prema (1) vrijedi

$$V(T_1T_2T_3T_4) = \frac{1}{6} (\vec{r}_{T_2} - \vec{r}_{T_1}, \vec{r}_{T_3} - \vec{r}_{T_1}, \vec{r}_{T_4} - \vec{r}_{T_1}).$$

Kako je

$$\begin{aligned} \vec{r}_{T_1} &= \frac{1}{3} (\vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4), & \vec{r}_{T_2} &= \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4), \\ \vec{r}_{T_3} &= \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_4), & \vec{r}_{T_4} &= \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3), \end{aligned}$$

to je

$$V(T_1T_2T_3T_4) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \frac{1}{3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3), \frac{1}{3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_4) \right),$$

odnosno

$$V(T_1T_2T_3T_4) = -\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{6} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \vec{r}_4 - \vec{r}_1).$$

Odavde, zbog (1), slijedi

$$V(T_1T_2T_3T_4) = -\frac{1}{27} V(A_1A_2A_3A_4).$$

Dakle, $V(T_1T_2T_3T_4) : V(A_1A_2A_3A_4) = -1 : 27$.

Znači, ta su dva tetraedra suprotno orijentirana. ■

9.5. Transformacija koordinata. Eulerovi kutovi

U analitičkoj geometriji česta je potreba da se umjesto jednog koordinatnog sustava odabere neki drugi i tako jednadžba neke geometrijske tvorevine znatno pojednostavi, što onda olakšava proučavanje te tvorevine. Takvu tipičnu situaciju imali smo kod opće teorije krivulja 2. reda. Osnovni problem kod transformacije koordinata sastoji se od toga da se nađe veza između koordinata jedne te iste točke u dva različita koordinatna sustava koji su u nekom zadanom međusobnom položaju. Takve veze zovemo **jednadžbama transformacije**. U našim ćemo se razmatranjima ograničiti na pravokutne Kartezijeve koordinatne sustave. Neka su, dakle, $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ dva Kartezijeva koordinatna sustava. Međusobni položaj tih dvaju sustava možemo fiksirati vektorom $\overrightarrow{OO'} = \vec{t}$, koji spaja ishodišta

tih dvaju sustava i kutovima α_{pq} koji zatvara p -ti vektor prvog sustava sa q -tim vektorom drugog sustava, $p, q = 1, 2, 3$. Označimo:

$$\cos \alpha_{pq} = a_{pq}, \quad p, q = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{t} = a_{14}\vec{i} + a_{24}\vec{j} + a_{34}\vec{k}. \quad (2)$$

Neka je T bilo koja točka prostora i neka je \vec{r} njezin radijvektor s obzirom na prvi sustav, a \vec{r}' radijvektor s obzirom na drugi sustav (sl. 326). Koordinate točke T u prvom sustavu neka su (x, y, z) , a u drugome (x', y', z') . Iz (1) slijede, po definiciji skalarnog produkta vektora, ove jednakosti

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i}' &= a_{11}, & \vec{i} \cdot \vec{j}' &= a_{12}, & \vec{i} \cdot \vec{k}' &= a_{13}, \\ \vec{j} \cdot \vec{i}' &= a_{21}, & \vec{j} \cdot \vec{j}' &= a_{22}, & \vec{j} \cdot \vec{k}' &= a_{23}, \\ \vec{k} \cdot \vec{i}' &= a_{31}, & \vec{k} \cdot \vec{j}' &= a_{32}, & \vec{k} \cdot \vec{k}' &= a_{33}. \end{aligned} \quad (3)$$

Radijvektori \vec{r} i \vec{r}' su očito vezani za

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{t}, \quad (4)$$

odnosno

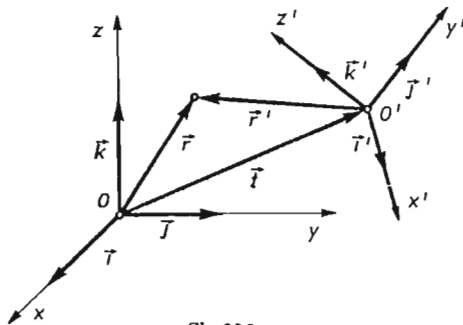
$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' + a_{14}\vec{i} + a_{24}\vec{j} + a_{34}\vec{k}.$$

Množimo li ovu jednadžbu skalarno redom sa \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , uzevši u obzir (3), dobit ćemo

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14}, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24}, \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34}. \end{aligned} \quad (5)$$

Jednadžbe (5) su tražene jednadžbe transformacije koordinata i one izražavaju koordinate točke u prvom sustavu pomoću koordinata te iste točke u drugom sustavu. Vidimo dakle da su te transformacije linearne. Slično, iz (5) nalazimo da je

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(x - a_{14}) + a_{21}(y - a_{24}) + a_{31}(z - a_{34}), \\ y' &= a_{12}(x - a_{14}) + a_{22}(y - a_{24}) + a_{32}(z - a_{34}), \\ z' &= a_{13}(x - a_{14}) + a_{23}(y - a_{24}) + a_{33}(z - a_{34}). \end{aligned} \quad (6)$$



Sl. 326.

Jednadžbe (6) izražavaju koordinate točke u drugom sustavu pomoću koordinata te iste točke u prvom sustavu.

Koeficijenti a_{pq} u jednažbama transformacija nisu međusobno neovisni. Da to dokažemo, uzmimo da sustavi imaju isto ishodište; tada je $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$. Kraj vektora \vec{i} u prvom sustavu ima koordinate $(1, 0, 0)$, pa iz (6) slijedi da su a_{11}, a_{12}, a_{13} koordinate vektora \vec{i} u drugom sustavu. Na isti se način vidi da su a_{11}, a_{21}, a_{31} koordinate vektora \vec{i}' u prvom sustavu. Analogno vrijedi i za ostatak koeficijenata a_{pq} . Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{i} &= a_{11}\vec{i}' + a_{12}\vec{j}' + a_{13}\vec{k}', & \vec{i}' &= a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j} + a_{31}\vec{k}, \\ \vec{j} &= a_{21}\vec{i}' + a_{22}\vec{j}' + a_{23}\vec{k}', & \vec{j}' &= a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j} + a_{23}\vec{k}, \\ \vec{k} &= a_{31}\vec{i}' + a_{32}\vec{j}' + a_{33}\vec{k}', & \vec{k}' &= a_{31}\vec{i} + a_{32}\vec{j} + a_{33}\vec{k}. \end{aligned}$$

Kako su vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ jedinični vektori, to iz prethodnih jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned} a_{p1}^2 + a_{p2}^2 + a_{p3}^2 &= 1, & p &= 1, 2, 3, \\ a_{1q}^2 + a_{2q}^2 + a_{3q}^2 &= 1, & q &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Kako se radi o ortogonalnim sustavima, to je

$$\begin{aligned} a_{p1}a_{q1} + a_{p2}a_{q2} + a_{p3}a_{q3} &= 0, & p &\neq q, \\ a_{1p}a_{1q} + a_{2p}a_{2q} + a_{3p}a_{3q} &= 0, & p &\neq q. \end{aligned} \quad (8)$$

Oni koji znaju linearnu algebru odmah će uočiti da iz (7) i (8) slijedi da je matrica transformacije koordinata

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ortogonalna. To je i razlog što se ta matrica zove **ortogonalna**; ona, naime, povezuje koordinate točke u dva ortogonalna sustava. Koristeći svojstva ortogonalnih matrica, lako se iz (5) izvodi (6). Više o tome vidjeti u K. Horvatić, *Linearna algebra*, Zagreb, 1993.

Jednadžbama (5) i (6) možemo pridati i drugo tumačenje. Naime, pomoću tih jednadžbi svakoj točki prostora (x, y, z) možemo pridružiti točku (x', y', z') tog istog prostora, i obrnuto. Na taj način te jednadžbe određuju jedno preslikavanje prostora na taj isti prostor. Pokazat ćemo sada da je to preslikavanje **izometrija** prostora. Neka su $T_i = (x_i, y_i, z_i)$ $i = 1, 2$ bilo koje dvije točke i $T'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$ njihove slike. Koordinate tih točaka tada zadovoljavaju (5), tj. slijedi

$$\begin{aligned} x_i &= a_{11}x'_i + a_{12}y'_i + a_{13}z'_i + a_{14}, \\ y_i &= a_{21}x'_i + a_{22}y'_i + a_{23}z'_i + a_{24}, \\ z_i &= a_{31}x'_i + a_{32}y'_i + a_{33}z'_i + a_{34}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Sada redom imamo

$$\begin{aligned}
 (d(T_1, T_2))^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \\
 &= (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2)(x'_2 - x'_1)^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2) \cdot \\
 &\quad \cdot (y'_2 - y'_1)^2 + (a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2)(z'_2 - z'_1)^2 + \\
 &\quad + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32})(x'_2 - x'_1)(y'_2 - y'_1) + \\
 &\quad + 2(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33})(y'_2 - y'_1)(z'_2 - z'_1) + \\
 &\quad + 2(a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33})(x'_2 - x'_1)(z'_2 - z'_1).
 \end{aligned}$$

Oдавде, zbog (7) i (8), slijedi

$$(d(T_1, T_2))^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = (d(T'_1, T'_2))^2,$$

pa je $d(T_1, T_2) = d(T'_1, T'_2)$. Dakle, to je preslikavanje izometrija.

Preslikavanje $x = x' + a_{14}$, $y = y' + a_{24}$, $z = z' + a_{34}$ je translacija prostora, pa iz (5) i do sada dokazanog slijedi da je svaka izometrija prostora kompozicija translacije i ortogonalne transformacije. Ovim je i analitički dokazan osnovni teorem o izometrijama geometrije prostora.

Promotrimo na primjerima neke posebne slučajeve.

Primjer 15. Poseban slučaj kada je matrica A jedinična, tj. kada je $a_{pq} = 1$, za $p = q$ i $a_{pq} = 0$, za $p \neq q$. U tom je slučaju

$$\begin{aligned}
 x &= x' + a_{14}, & x' &= x - a_{14}, \\
 y &= y' + a_{24}, & y' &= y - a_{24}, \\
 z &= z' + a_{34}, & z' &= z - a_{34},
 \end{aligned}$$

pa se u ovom slučaju radi o translaciji prostora. ■

Primjer 16. Ako je $\vec{t} = \vec{0}$, onda je $a_{14} = a_{24} = a_{34}$, pa iz (5) i (6) slijedi

$$\begin{aligned}
 x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', & x' &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\
 y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', & y' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\
 z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z', & z' &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z.
 \end{aligned}$$

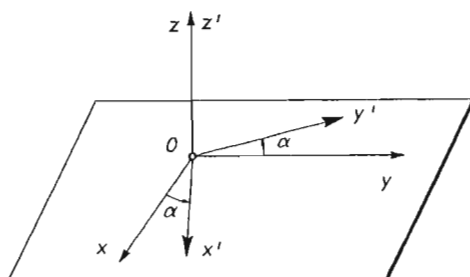
U ovom slučaju radi se o ortogonalnim transformacijama prostora. Iz ovih se jednadžbi vidi da je ishodište fiksna točka tih transformacija i takve transformacije zovemo rotacijama prostora oko točke O . ■

Primjer 17. $\vec{t} = \vec{0}$, $\alpha_{33} = 0$. U ovom je slučaju $\alpha_{13} = \alpha_{31} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{\pi}{2}$ (sl. 327). Stavimo li $\alpha_{11} = \alpha$, bit će $\alpha_{12} = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $\alpha_{21} = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\alpha_{22} = \alpha$ (sl. 327). Kako je $a_{pq} = \cos \alpha_{pq}$, to je $a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0$, $a_{11} = \cos \alpha$, $a_{12} = -\sin \alpha$, $a_{21} = \sin \alpha$, $a_{22} = \cos \alpha$, pa iz (5) i (6) slijedi

$$\begin{aligned}
 x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\
 y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \\
 z &= z',
 \end{aligned}$$

i

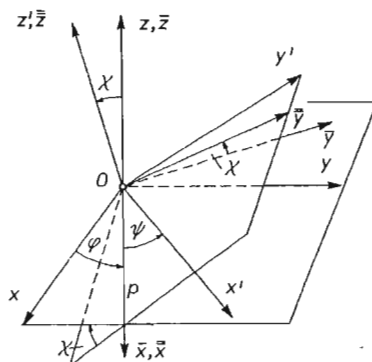
$$\begin{aligned}
 x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\
 y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\
 z' &= z.
 \end{aligned}$$



Sl. 327.

Iz ovih jednakosti razabiremo da se radi o rotaciji prostora oko osi z . Specijalno za $z = z' = 0$ vidimo da se radi o rotacijama u ravni. Izvedite jednažbe rotacije oko osi x i osi y . ■

Imaju li dva pravokutna Kartezijeva koordinatna sustava zajedničko ishodište (Primjer 16), onda je međusobni položaj tih sustava određen sa devet kutova α_{pq} , $p, q = 1, 2, 3$. Iz (7) i (8) razabiremo da ti kutovi nisu međusobno neovisni. Međutim, uvijek možemo po volji odabrati tri od njih, a ostalih šest je tada određeno tim jednažbama. U mehanici je potrebno da se u jednažbama transformacija pojavljuju samo međusobno neovisni koeficijenti (parametri). Pokazat ćemo sada da se međusobni položaj dvaju sustava s istim ishodištem određuje samo pomoću triju kutova φ , χ , ψ koji su nezavisni. Te kutove zovemo **Eulerovim kutovima**, a prikazani su na sl. 328. Uzmimo dva koordinatna sustava $Oxyz$, $Ox'y'z'$. Ravnine Oxy i $Ox'y'$ imaju točku O zajedničku, pa se sijeku u nekom pravcu p . Prvim Eulerovim kutom φ zovemo kut kojega pravac p zatvara s pozitivnim smjerom osi x . Rotirajmo sada sustav $Oxyz$ oko osi z za kut φ . Tako dobijemo novi sustav $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ kod kojega se os \bar{x} podudara s pravcem p . Kako pravac p , tj. \bar{x} leži i u ravni xy i u ravni $x'y'$, to je i os z' okomita na \bar{x} . Stoga je moguće rotirati sustav $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ oko osi \bar{x} za neki kut χ dok os z ne padne na os z' . Kut χ zovemo



Sl. 328.

drugim Eulerovim kutom. Pri toj rotaciji sustav $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ prelazi u sustav $O\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$. Kako se osi z' i \bar{z} podudaraju, to je dovoljno zarotirati sustav $O\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$ oko osi z' za kut ψ takav da \bar{x}' padne na os x' . Kut ψ se zove treći Eulerov kut. Očito, u tom slučaju i os \bar{y}' padne na os y' , pa s te tri rotacije sustav $Oxyz$ prelazi u sustav $Ox'y'z'$.

Sada je lako naći vezu između koordinata u tim dvama sustavima. Prema jednadžbama iz primjera 17. nalazimo redom:

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi, \\y &= \bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi, \\z &= \bar{z},\end{aligned}$$

a dalje je

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{x}', \\ \bar{y} &= \bar{y}' \cos \chi - \bar{z}' \sin \chi, \\ \bar{z} &= \bar{y}' \sin \chi + \bar{z}' \cos \chi,\end{aligned}$$

i konačno

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= x' \cos \psi - y' \sin \psi, \\ \bar{y}' &= x' \sin \psi + y' \cos \psi, \\ \bar{z}' &= z.\end{aligned}$$

Iz ovih se jednakosti, nakon duljeg računa (provedite ga sami), dobivaju ove Eulerove jednadžbe:

$$\begin{aligned}x &= x'(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \chi \sin \psi) - \\ &\quad - y'(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \chi \cos \psi) + z' \sin \varphi \sin \chi, \\ y &= x'(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \chi \sin \psi) - \\ &\quad - y'(\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \chi \cos \psi) - z' \cos \varphi \sin \chi, \\ z &= x' \sin \chi \sin \psi + y' \sin \chi \cos \psi + z' \cos \chi.\end{aligned}$$

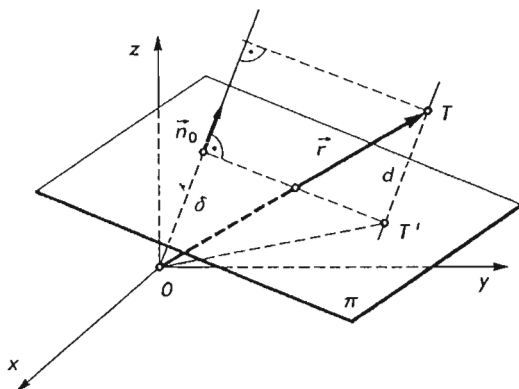
Te su jednadžbe složenije od jednadžbi (5), ali je njihovo značenje to što se u njima pojavljuju samo tri nezavisna parametra $\varphi, \chi, \psi \in [0, 2\pi)$ i da u formulama nema dvoznačnosti oblika \pm .

Korisna je vježba da iz tih jednadžbi izrazite x', y', z' pomoću x, y, z .

9.6. Jednadžba ravnine u prostoru

a) **Udaljenost točke od ravnine.** Neka je π bilo koja ravnina prostora. Njezin položaj prema koordinatnom sustavu odredit ćemo jediničnim vektorom normale \vec{n}_0 usmjerenim od ishodišta prema toj ravnini i udaljenošću δ ravnine od ishodišta. Neka je T bilo koja točka prostora i $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ radijvektor te točke. Prema

dogovoru, smatrat ćemo da je udaljenost d točke T od ravnine π pozitivna ako su točke T i O s različitih strana ravnine π , a negativna ako su te točke s iste strane ravnine π . Ako π prolazi ishodištem, onda predznak od d nije definiran. Bez obzira na to s koje se strane ravnine nalazi točka T , na sl. 329. razabiremo da je $d + \delta$



Sl. 329.

projekcija radijvektora \vec{r} na smjer normale. Prema primjeru 4. vrijedi $\vec{r} \cdot \vec{n}_0 = d + \delta$, tj.

$$d = \vec{r} \cdot \vec{n}_0 - \delta. \quad (1)$$

Jednakosti (1) možemo dati i drugi oblik. Ako su, naime, α , β i γ kutovi koje vektor \vec{n}_0 zatvara s orijentiranim osima x , y , z (tj. s vektorima \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}), onda je $\vec{n}_0 = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$, pa iz (1) slijedi

$$d = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta. \quad (2)$$

Primjer 18. Normala na ravninu π zatvara jednake šiljaste kutove s pozitivnim smjerom osiju x i z i s negativnim smjerom osi y . Udaljenost ravnine π od ishodišta jednaka je $\delta = 2\sqrt{3}$. Odredite udaljenost točke $T = (8, 5, -4)$ od ravnine π .

Rješenje. Prema (5) je $3 \cos^2 \alpha = 1$, a prema uvjetu zadatka $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Prema (2) je $d = \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$. Dakle, $d = \sqrt{3}$.

b) **Normalni oblik jednadžbe ravnine.** Neka je ravnina π opet određena kao i prije sa \vec{n}_0 i δ . Prema (1) točka T leži u ravnini π ako i samo ako je $d = 0$, tj.

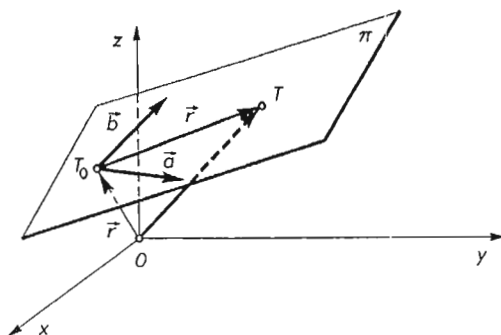
$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - \delta = 0. \quad (3)$$

Kako radijvektor \vec{r} svake točke te ravnine zadovoljava (3) i obrnuto, ako radijvektor neke točke prostora zadovoljava (3), onda točka T leži u π , slijedi da jednadžba (3) jest jednadžba ravnine π . Kako se u njoj pojavljuje vektor normale \vec{n}_0 , to se (3) zove

normalni ili Hesseov oblik jednadžbe ravnine. Jednadžba (3) u skalarnom obliku glasi

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta = 0. \quad (4)$$

c) **Parametarske jednadžbe ravnine.** Neka je sad položaj ravnine π u prostoru zadan jednom svojom točkom $T_0(\vec{r}_0)$, $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ i neka je ona paralelna sa dva nekolinearna vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. U tom slučaju kažemo da je ona razapeta tim vektorima (sl. 330). Ako je $T(\vec{r})$,



Sl. 330.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ bilo koja točka ravnine π , onda postoje jedinstveni $u, v \in \mathbf{R}$, takvi da je $\overrightarrow{T_0T} = u\vec{a} + v\vec{b}$, tj. $\vec{r} - \vec{r}_0 = u\vec{a} + v\vec{b}$. Odavde je

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}. \quad (5)$$

Kako je jednadžbom (5) za svaki izbor parametara u i v određen radijvektor \vec{r} neke točke ravnine π i kako za svaku točku ravnine π postoje parametri u i v , takvi da je \vec{r} radijvektor te točke, to u smislu analitičke geometrije (5) jest jednadžba ravnine. Jednadžbu (5) zovemo **vektorskim parametarskim oblikom jednadžbe ravnine**. Jednadžba (5) ekvivalentna je sa

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ua_x + vb_x, \\ y &= y_0 + ua_y + vb_y, \\ z &= z_0 + ua_z + vb_z. \end{aligned} \quad (6)$$

Jednadžbe (6) zovemo **parametarskim jednadžbama ravnine**.

Želimo li naći vezu između koordinata (x, y, z) točaka ravnine (6) treba iz tih jednadžaba eliminirati parametre u i v . Ta se eliminacija lako dobije uoči li se da su vektori $\vec{r} - \vec{r}_0$, \vec{a} i \vec{b} komplanarni, tj.

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

Ova jednakost u koordinatnom obliku glasi

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

i to je onda koordinatni oblik jednadžbe ravnine određene točkom i dvama nekolinearnim vektorima.

d) **Jednadžba ravnine određene s tri nekolinearne točke.** Neka su $T_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ tri točke koje ne leže na jednom pravcu. Ta ista ravnina određena je onda točkom T_1 i vektorima $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$. Kako je $\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$, $\overrightarrow{T_1T_3} = (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j} + (z_3 - z_1)\vec{k}$, onda iz (7) slijedi da jednadžba te ravnine glasi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Obrubljivanjem ove determinante dobije se konačno

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Jednadžba (8) je jednadžba ravnine određene s tri nekolinearne točke.

e) **Opća jednadžba ravnine.** Iz dosadašnjih primjera vidimo da ravnina u prostoru, kako god bila zadana, uvijek ima jednadžbu oblika

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \quad (9)$$

Iako se vidi i obrnuto, tj. jednadžba (9) uvijek određuje neku ravninu u prostoru. Stoga jednadžbu (9) zovemo **općom jednadžbom ravnine u prostoru.**

Primjer 19. Kako glasi normalan oblik jednadžbe ravnine (9).

Rješenje. Jednadžbe (4) i (9) bit će analitička predočenja iste ravnine ako i samo ako se one razlikuju samo za konstantni faktor, tj. ako postoji $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je

$$\lambda A = \cos \alpha, \quad \lambda B = \cos \beta, \quad \lambda C = \cos \gamma, \quad \lambda D = -\delta.$$

Kako je uvijek $\delta > 0$, to iz zadnje jednakosti zaključujemo da je $\text{sign } \lambda = -\text{sign } D$. Kvadriranjem i zbrajanjem prvih triju jednakosti, uzevši u obzir (5) iz 9.2. zaključujemo da je

$$\lambda = \frac{1}{-\text{sign } D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Prema tome, normalan oblik jednadžbe ravnine (9) glasi $\lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0$, tj.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{-\text{sign } D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \quad (10)$$

Iz (10) neposredno slijedi da je udaljenost d točke $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od ravnine (9) zbog (2) jednaka

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{-\text{sign } D\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (11)$$

Dakle, udaljenost točke od ravnine dobije se tako da se naprosto u normalan oblik jednadžbe ravnine uvrste koordinate te točke. ■

Primjer 20. Dokažite da je vektor $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ okomit na ravninu (9).

Rješenje. Neka su $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$ bilo koje dvije točke ravnine (9). Tada je vektor $\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ paralelan s tom ravninom. Kako točke T_i pripadaju ravnini, to je $Ax_i + By_i + Cz_i + D = 0$, $i = 1, 2$. Odavde je $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$, tj. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{T_1T_2} = 0$, pa je vektor \vec{n} zaista vektor normale (ne nužno jedinični) te ravnine. ■

Primjer 21. Neka su m, n, p segmenti koje ravnina odsijeca na koordinatnim osima. Nađite jednadžbu te ravnine.

Rješenje. Tražena ravnina određena je točkama $(m, 0, 0)$, $(0, n, 0)$ i $(0, 0, p)$. Prema (8), njezina jednadžba glasi

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno $npz + mpy + mnz - mnp = 0$, a odavde je

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1. \quad (12)$$

Ta se jednadžba zove segmentni oblik jednadžbe ravnine. ■

f) Položaj dviju ravnina u prostoru. Dvije ravnine u prostoru mogu biti paralelne i mogu se sjeći. Kako iz njihovih jednadžaba u općem obliku možemo prepoznati jesu li paralelne ili se sijeku? Neka su $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2$ dvije ravnine. Prema Primjeru 20. vektori $\vec{n}_i = A_i\vec{i} + B_i\vec{j} + C_i\vec{k}$ su vektori normala tih ravnina. Ravnine su očito paralelne ako su ti vektori kolinearni, tj. ako postoji $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2. \quad (13)$$

Te su jednakosti nužan i dovoljan uvjet da ravnine budu paralelne. Ako je još i $D_1 = \lambda D_2$, onda se te ravnine podudaraju.

Uvjet (13) može se napisati u ekvivalentnom obliku

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2, \quad (14)$$

ili

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2. \quad (15)$$

Ako taj uvjet nije zadovoljen, ravnine se sijeku.

Primjer 22. Kako glasi jednadžba ravnine koja prolazi točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i paralelna je s ravninom $Ax + By + Cz + D = 0$?

Rješenje. Jednadžba tražene ravnine glasi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Naime, ta ravnina očito prolazi točkom T_0 i paralelna je sa zadanom ravninom prema uvjetu paralelnosti (13) ($\lambda = 1$). ■

Dalje, dvije su ravnine okomite ako su njihovi vektori normala $\vec{n}_i = A_i\vec{i} + B_i\vec{j} + C_i\vec{k}$ okomiti, tj. ako je $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Dakle uvjet okomitosti dviju ravnina glasi

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (16)$$

Primjer 23. Izvedite formulu za kut dviju ravnina i iz nje izvedite uvjet okomitosti (16).

Rješenje. Kut dviju ravnina je šiljast kut φ između njihovih vektora normala, tj.

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|},$$

odnosno

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Odavde za uvjet okomitosti slijedi upravo (16). ■

Primjer 24. Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i okomita je na ravnine $A_i x + B_i y + C_i z = 0$, $i = 1, 2$.

Rješenje. Vektor normale \vec{n} tražene ravnine očito je jednak

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Kako ravnina prolazi točkom T_0 , to prema primjeru 22. njezina jednadžba glasi

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0,$$

odnosno

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0. \quad \blacksquare$$

Primjer 25. Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$ i okomita je na ravninu $Ax + By + Cz + D = 0$.

Rješenje. Tražena ravnina ima vektor normale koji je okomit i na $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ i na $\vec{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$. Dakle, vektor normale kolinearan je s vektorom

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ B & C \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ C & A \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ A & B \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Prema Primjeru 22. njezina jednadžba glasi

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ B & C \end{vmatrix} (x - x_1) + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ C & A \end{vmatrix} (y - y_1) + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ A & B \end{vmatrix} (z - z_1) = 0,$$

odnosno

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \quad \blacksquare$$

g) Svezak i svežanj ravnina. Sveskom ravnina zovemo skup svih ravnina prostora koje prolaze istim pravcem, koji zovemo **os sveska**. Svaki svezak određen je sa dvije ravnine α_1 i α_2 . Neka su $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2$ dvije različite ravnine sveska. Tvrdimo da je u tom slučaju svezak određen jednadžbom

$$\lambda_1(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda_2(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0. \quad (17)$$

To znači svakom izboru realnih parametara λ_1 , λ_2 , koji istodobno ne iščezavaju odgovara jedna ravnina sveska i za svaku ravninu sveska postoje parametri λ_1 i λ_2 , takvi tako da je (17) jednadžba upravo te ravnine. To se dokazuje na isti način kao i u slučaju pramena pravaca u ravnini. Dokaz prepuštamo čitatelju.

Skup svih ravnina prostora koje prolaze jednom točkom zovemo **svežnjem ravnina**, a tu točku zovemo **vrhom svežnja**. Ako je \vec{r}_1 radijvektor vrha V svežnja, onda je svežanj predočen jednadžbom

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0, \quad (18)$$

gdje je $\vec{n} \neq \vec{0}$ bilo koji vektor, koji je onda vektor normale ravnine svežnja. Za dva nekolinearna vektora \vec{n}_1 i \vec{n}_2 (18) predočuje dvije različite ravnine svežnja.

Svežanj ravnina možemo analitički predočiti i tako da ga zadamo sa tri ravnine $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ koje pripadaju svežnju. Lako se vidi da tada svežanj dopušta analitičko predočenje oblika

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i (A_i x + B_i y + C_i z + D_i) = 0. \quad (19)$$

Primjer 26. Pokažite ako tri ravnine $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ pripadaju istom svesku, onda vrijedi

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rješenje. Neka su \vec{n}_i , $i = 1, 2, 3$ vektori normale tih ravnina. Ako te ravnine pripadaju istom svesku, onda vrijedi $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = 0$. Oдавде slijedi tvrdnja. Uočite da je navedeni uvjet samo nužan uvjet, ali ne i dovoljan da tri ravnine pripadaju istom svesku. ■

Primjer 27. Svezak ravnina određen je ravninama $x + y + z = 0$, $2x - y + 3z + 4 = 0$. Odredite onu ravninu tog sveska koja prolazi točkom $T = (1, -3, 5)$.

Rješenje. Prema (17), jednadžba sveska glasi

$$\lambda_1(x + y + z) + \lambda_2(x - y + 3z + 4) = 0,$$

odnosno

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2)x + (\lambda_1 - \lambda_2)y + (\lambda_1 + 3\lambda_2)z + 4\lambda_2 = 0.$$

Ta će ravnina prolaziti točkom T ako vrijedi

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3(\lambda_1 - \lambda_2) + 5(\lambda_1 + 3\lambda_2) + 4\lambda_2 = 0,$$

tj. $\lambda_1 + 8\lambda_2 = 0$. Odaberimo $\lambda_2 = 1$, tada je $\lambda_1 = -8$, pa jednadžba tražene ravnine glasi $6x + 9y + 5z - 4 = 0$.Uočite da, kao i u slučaju pravca u ravnini, λ_1 i λ_2 možemo odabrati do na konstantni faktor. ■**Primjer 28.** Nađite jednadžbu ravnine koja prolazi sjecištem ravnina $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ i paralelna je s ravninom $x + 5y - 3z - 11 = 0$.**Rješenje.** Primijetimo da te tri ravnine zaista pripadaju istom svežnju jer je

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Jednadžba svežnja glasi

$$\lambda_1(x - 2y + z - 7) + \lambda_2(2x + y - z + 2) + \lambda_3(x - 3y + 2z - 11) = 0,$$

odnosno

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)x + (-2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3)y + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)z - 7\lambda_1 + 2\lambda_2 - 11\lambda_3 = 0.$$

Prema uvjetu zadatka mora biti

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 1, \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 &= 5, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 &= -3. \end{aligned}$$

Rješenje tog sustava je $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, pa jednadžba tražene ravnine glasi $x + 5y - 3z + 15 = 0$. Riješite zadatak bez jednadžbe svežnja. ■

9.7. Jednadžba pravca u prostoru

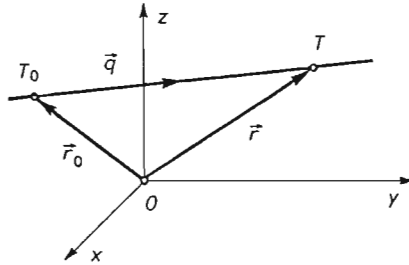
Ima različitih analitičkih predložnja pravca u prostoru, a sva ovise o elementima kojima je pravac zadan. Razmotrit ćemo neka od njih.

a) **Parametarska jednadžba pravca u vektorskom obliku.** Neka je pravac p zadan jednom svojom točkom $T_0(\vec{r}_0)$ i vektorom smjera \vec{q} (\vec{q} nije nužno jedinični vektor). Tada za svaku točku $T(\vec{r})$ tog pravca vrijedi $\vec{OT} = \vec{OT}_0 + \vec{T_0T}$ (sl. 331).

Kako uvijek postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{T_0T} = t\vec{q}$, to je

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{q}. \quad (1)$$

Kako za svaku točku $T \in p$ postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je radijvektor te točke dan sa (1) i za svaki $t \in \mathbb{R}$ jednadžba (1) određuje radijvektor neke točke pravca, to je (1)



Sl. 331.

analitičko predočjenje pravca određenog točkom i vektorom smjera. Jednadžba (1) zove se **parametarska jednadžba pravca u vektorskom obliku**.

Ako je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, $\vec{q} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, onda je jednadžba (1) ekvivalentna sa tri skalarne jednadžbe

$$\begin{aligned}x &= x_0 + at, \\y &= y_0 + bt, \\z &= z_0 + ct.\end{aligned}\quad (2)$$

Jednadžbe (2) zovemo **parametarskim jednadžbama pravca**.

b) **Kanonske jednadžbe pravca**. Iz (2) eliminacijom parametra t nalazimo

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.\quad (3)$$

Jednadžbe (3) zovemo **kanonskim** ili **normalnim** jednadžbama pravca.

Primjer 29. Napišite kanonske i parametarske jednadžbe pravca koji prolazi točkama $T_1 = (1, 2, 3)$ i $T_2 = (-2, 3, -1)$.

Rješenje. Očito je $\vec{q} = \overrightarrow{T_1T_2} = -3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ vektor smjera tog pravca. Kako pravac prolazi točkom T_1 , kanonske jednadžbe pravca, prema (3), jesu

$$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 3}{-4},$$

ili

$$\frac{x - 1}{-3} = y - 2 = \frac{z - 3}{-4}.$$

Stavimo $\frac{x - 1}{-3} = y - 2 = \frac{z - 3}{-4} = t$. Odavde slijedi da parametarske jednadžbe pravca glase

$$x = 1 - 3t, \quad y = 2 + t, \quad z = 3 - 4t.$$

Općenito za $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$ dobiva se

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

i to su kanonske jednadžbe pravca kroz dvije točke. Parametarske jednadžbe glase

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \quad \blacksquare$$

Primjer 30. Kako glase kanonske jednadžbe pravca koji je zadan kao presjek ravnina $x - 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + 2y - 5z - 4 = 0$?

Rješenje. Vektori normala tih ravnina jesu $\vec{n}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{n}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$. Vektor smjera presječne tih ravnina je kolinearan s vektorom $\vec{q} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, tj. $\vec{q} = 4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k}$. Kako modul vektora smjera nije bitan, za vektor smjera uzet ćemo vektor $\vec{q}_1 = 2\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$. Odredimo još jednu točku kojom prolazi pravac. U tu svrhu uzimamo točku za koju je $x_0 = 0$, iz čega iz jednadžbi ravnina slijedi $x_0 = 2$, $y_0 = -1$, pa pravac prolazi točkom $T_0 = (2, -1, 0)$. Prema (3) kanonske jednadžbe pravca glase

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{7} = \frac{z}{4}. \blacksquare$$

c) Međusobni položaj dvaju pravaca u prostoru. Znamo da dva pravca u prostoru mogu biti mimoilazni, mogu se sjeći i mogu biti paralelni. Ako su

$$\frac{x - x_i}{a_i} = \frac{y - y_i}{b_i} = \frac{z - z_i}{c_i}, \quad i = 1, 2$$

dva pravca, onda su oni paralelni ako su im vektori smjera paralelni, tj. ako vrijedi

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2. \quad (4)$$

Ako taj uvjet nije zadovoljen, pravci su mimoilazni ili se sijeku.

Nađimo sada i uvjet da dva pravca leže u istoj ravnini. Ako su paralelni, onda oni sigurno leže u istoj ravnini, pa stoga razmotrimo slučaj kada oni nisu paralelni. Ako su pravci zadani sa $\vec{r} = \vec{r}_i + t\vec{q}_i$, $i = 1, 2$, onda će oni očito ležati u istoj ravnini ako su vektori $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, \vec{q}_1 i \vec{q}_2 komplanarni, tj. ako je

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0 \quad (5)$$

ili u koordinatama

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & a_1 & a_2 \\ y_2 - y_1 & b_1 & b_2 \\ z_2 - z_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Ako pravci nisu paralelni, onda su jednadžbe (5), odnosno (6) uvjet da se oni sijeku.

Primjer 31. Ispitajte jesu li pravci $x = 2t + 5$, $y = -t + 2$, $z = t - 7$ i $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ paralelni.

Rješenje. Vektor smjera prvog pravca jednak je $\vec{q}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, a drugoga (v. primjer 30) $\vec{q}_2 = -8\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$. Budući da vrijedi $2 : -1 : 1 = -8 : 4 : -4$, slijedi da su pravci paralelni. ■

Primjer 32. Ispitajte sijeku li se pravci $x = 3 + 2t$, $y = 1 - t$, $z = 7 + 4t$ i $x = -5 + 3t$, $y = -2 + 2t$, $z = -11 + 7t$ i ako se sijeku, odredite koordinate njihova sjecišta, kao i jednadžbu ravnine u kojoj leže.

Rješenje. Prvi pravac prolazi točkom $T_1 = (3, 1, 7)$ i ima vektor smjera $\vec{q}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, a drugi točkom $T_2 = (-5, -2, -11)$ i ima vektor smjera $\vec{q}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$. Kako je $2 : (-1) : 4 \neq 3 : 2 : 7$, to pravci nisu paralelni. Kako je

$$\begin{vmatrix} (-5 - 3) & 2 & 3 \\ (-2 - 1) & -1 & 2 \\ (-11 - 7) & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

to se, prema (6), pravci sijeku. Da se odredi sjecište, napišimo parametarske jednadžbe drugog pravca, tako da umjesto parametra t pišemo τ . Sjecište tada mora zadovoljavati sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 3 + 2t &= -5 + 3\tau, \\ 1 - t &= -2 + 2\tau, \\ 7 + 4t &= -11 + 7\tau. \end{aligned}$$

Iz prvih dviju jednadžbi sustava dobivamo $t = -1$, $\tau = 2$, za te vrijednosti parametara vidimo da oba pravca prolaze istom točkom $S = (1, 2, 3)$. Da se nađe jednadžba ravnine određene tim pravcima, nađimo vektor normale \vec{n} te ravnine. Očito je $\vec{n} = \vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = = -15\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$, pa jednadžba ravnine glasi $-15(x-1) - 2(y-2) + 7(z-3) = 0$ i konačno $15x + 2y - 7z + 2 = 0$. ■

Primjer 33. Kako glase kanonske jednadžbe pravca koji prolazi točkom $T = (-4, -5, 3)$ i siječe pravce

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}, \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}?$$

Rješenje. Točkom T i prvim pravcem p položimo ravninu α , a tom istom točkom i drugim pravcem ravninu β . Presječna ravnina α i β je traženi pravac.

Prvi pravac leži u ravninama $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2}$ i $\frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$, tj. $2x + 3y + 11 = 0$ i $y - 2z + 7 = 0$. Odredimo onu ravninu sveska $2x + 3y + 11 + \lambda(y - 2z + 7) = 0$.

Ovdje smo u jednadžbi sveska, umjesto λ_1 i λ_2 , stavili $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, to smijemo jer točka T ne leži u prvoj ravnini, pa je $\lambda_2 \neq 0$. Odredimo λ tako da točka T leži u ravnini sveska. Uvrštavanjem koordinata točke T u jednadžbu sveska nalazimo da je $\lambda = -3$, pa jednadžba ravnine α glasi $x + 3z - 5 = 0$. Na isti se način nalazi da jednadžba ravnine β glasi $7x - 13y - 5z - 22 = 0$. Presječna ravnina α i β ima vektor smjera kolinearan s vektorom $(\vec{i} + 3\vec{k}) \times (7\vec{i} - 13\vec{j} - 5\vec{k}) = 39\vec{i} + 26\vec{j} - 13\vec{k}$, pa jednadžbe traženog pravca glase

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}. \quad \blacksquare$$

Nađimo sad i uvjet okomitosti dvaju pravaca. Za to odredimo kut dvaju pravaca. Neka su pravci zadani sa $\vec{r} = \vec{r}_i + t\vec{q}_i$, $i = 1, 2$. Kako je kut dvaju pravaca po definiciji uvijek šiljast ili pravi, to je očito da vrijedi

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2|}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|}. \quad (7)$$

Ako je $\vec{q}_i = a_i\vec{i} + b_i\vec{j} + c_i\vec{k}$, $i = 1, 2$, onda iz (7) slijedi

$$\cos \varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \quad (8)$$

Iz (8) slijedi da su pravci okomiti onda i samo onda ako je

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0. \quad (9)$$

Primjer 34. Dokažite da su pravci $x = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$; $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$ okomiti.

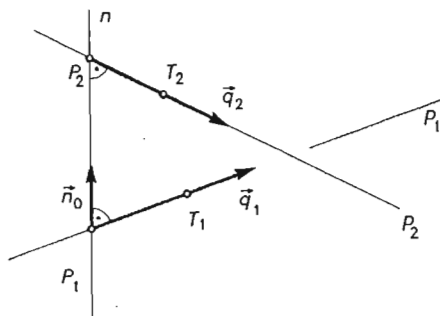
Rješenje. Koordinate vektora smjera prvog pravca jesu $a_1 = 1$, $b_1 = -2$, $c_1 = 3$. Vektor smjera drugog pravca jednak je

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 14\vec{j} + 7\vec{k},$$

pa za vektor smjera tog pravca možemo uzeti vektor $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, tj. $a_2 = 1$, $b_2 = 2$, $c_2 = 1$, pa je $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$, a prema (9) pravci su okomiti. ■

Primjer 35. Nađite najkraću udaljenost pravaca $p_i \dots \vec{r}_i + t\vec{q}_i$, $i = 1, 2$.

Rješenje. Neka je n zajednička normala tih pravaca i neka ona siječe prvi pravac u točki P_1 , a drugi u točki P_2 . Pravac p_1 određen je točkom T_1 i vektorom smjera \vec{q}_1 , a drugi



Sl. 332.

točkom T_2 i vektorom \vec{q}_2 . Na sl. 332. razabiremo da je najkraća udaljenost d tih pravaca jednaka modulu projekcije vektora $\overrightarrow{T_1T_2}$ na os određenu jediničnim vektorom smjera \vec{n}_0 zajedničke normale n tih pravaca. Očito je

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{q}_1 \times \vec{q}_2}{|\vec{q}_1 \times \vec{q}_2|},$$

pa je tražena najkraća udaljenost jednaka

$$d = |\overrightarrow{T_1T_2} \cdot \vec{n}_0| = \left| (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{\vec{q}_1 \times \vec{q}_2}{|\vec{q}_1 \times \vec{q}_2|} \right|,$$

i konačno

$$d = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{q}_1, \vec{q}_2)|}{\sqrt{(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)^2}}.$$

Ako je $\vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$, $\vec{q}_i = a_i\vec{i} + b_i\vec{j} + c_i\vec{k}$, $i = 1, 2$, onda je

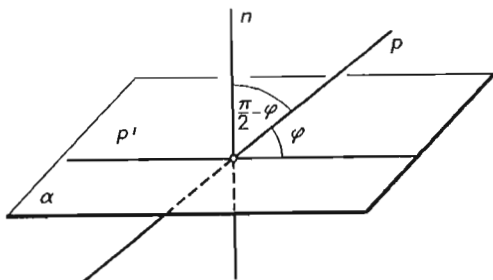
$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & a_1 & a_2 \\ y_2 - y_1 & b_1 & b_2 \\ z_2 - z_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2}},$$

gdje je nazivnik transformiran prema Lagrangeovu identitetu. ■

9.8. Međusobni položaji točaka, pravaca i ravnina

Međusobni položaj dvaju pravaca i dviju ravnina već smo razmatrali. Pravac i ravnina mogu se sjeći, mogu biti paralelni, pravac može ležati u ravnini i posebno pravac može biti okomit na ravninu. Nađimo analitičke uvjete za sve te slučajeve. Do traženih uvjeta doći ćemo ako nađemo formulu za kut pravca i ravnine.

Neka je pravac zadan sa $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{q}$, a ravnina svojom općom jednačbom $Ax + By + Cz + D = 0$. Kut između pravca i ravnine jednak je komplementu kuta kojega normala \vec{n} na ravninu zatvara s pravcem \vec{p} (sl. 333). Kako za taj kut φ uvijek vrijedi $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, to je



Sl. 333.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{|\vec{q} \cdot \vec{n}|}{|\vec{q}| \cdot |\vec{n}|},$$

ili

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{q} \cdot \vec{n}|}{|\vec{q}| \cdot |\vec{n}|}. \quad (1)$$

Kako je $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ i $\vec{q} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, to se (1) može napisati u obliku

$$\sin \varphi = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2)$$

Iz (2) slijedi da je pravac paralelan s ravninom ($\varphi = 0$) ako i samo ako vrijedi

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = 0, \quad \text{tj.} \quad aA + bB + cC = 0, \quad (3)$$

a okomit na ravninu ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) ako vrijedi

$$\vec{n} = \lambda\vec{q}, \quad \text{tj.} \quad a : b : c = A : B : C. \quad (4)$$

Iz (3) slijedi da pravac probada ravninu ako vrijedi

$$aA + bB + cC \neq 0. \quad (5)$$

Pokažimo na primjerima kako se koristimo tim uvjetima.

Primjer 36. Nađite udaljenost točke $T = (2, -1, 3)$ od pravca $\frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$.

Rješenje. Položimo točkom T ravninu α okomitu na zadani pravac i odredimo probodište S pravca s tom ravninom. Tada je $d(T, S)$ tražena udaljenost. Kako je ravnina α okomita na pravac, to je, prema (4), vektor $\vec{n} = \vec{q} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$ vektor normale ravnine α . Kako α prolazi točkom T , to njezina jednadžba glasi $3(x-2) + 5(y+1) + 2(z-3) = 0$, tj. $3x + 5y + 2z - 7 = 0$. Da nađemo probodište pravca i ravnine α , napišimo jednadžbu pravca u parametarskom obliku $x = 3t, y = 5t - 7, z = 2t + 2$. Odredimo t tako da toj vrijednosti parametra pridružena točka leži u α . Dakle, mora vrijediti $3 \cdot 3t + 5 \cdot (5t - 7) + 2 \cdot (2t + 2) - 7 = 0$. Odavde je $t = 1$, pa probodište S ima koordinate $S = (3, -2, 4)$. Prema tome, tražena je udaljenost d jednaka $d = \sqrt{(3-2)^2 + (-2+1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{3}$. ■

Primjer 37. Kako glasi jednadžba ravnine koja prolazi točkom $T = (1, 2, -3)$ i paralelna je s pravcima

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$

Rješenje. Ravnina koja prolazi točkom T ima opću jednadžbu oblika $A(x-1) + B(y-2) + C(z+3) = 0$. Kako je ravnina paralelna sa zadanim pravcima, to prema (3) mora vrijediti

$$2A - 3B + 3C = 0,$$

$$3A - 2B - C = 0.$$

Odaberemo li $C = 1$, iz ovog sustava slijedi $A = \frac{9}{5}, B = \frac{11}{5}$.

Dakle, za vektor normale ravnine možemo uzeti vektor s koordinatama $A = 9, B = 11, C = 5$, pa jednadžba tražene ravnine glasi $9(x-1) + 11(y-2) + 5(z+3) = 0$, tj. $9x + 11y + 5z - 16 = 0$. ■

Primjer 38. Nađite jednadžbu zajedničke normale pravaca $p_1, \dots, p_n, \vec{r} = \vec{r}_i + t\vec{q}_i, i = 1, 2$.

Rješenje. Vektor smjera zajedničke normale pravaca p_1 i p_2 jednak je $\vec{n} = \vec{q}_1 \times \vec{q}_2$. Neka je α ravnina određena pravcima n i p_1 i β ravnina određena pravcima n i p_2 (sl. 334). Ravnine α i β imaju jednadžbe

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{q}_1, \vec{q}_1 \times \vec{q}_2) = 0,$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{q}_2, \vec{q}_1 \times \vec{q}_2) = 0.$$

Označimo sa \vec{p} radijvektor probodišta P pravca p_1 i ravnine β . Za to uvrstimo $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{q}$ u jednadžbu ravnine β . Dobije se

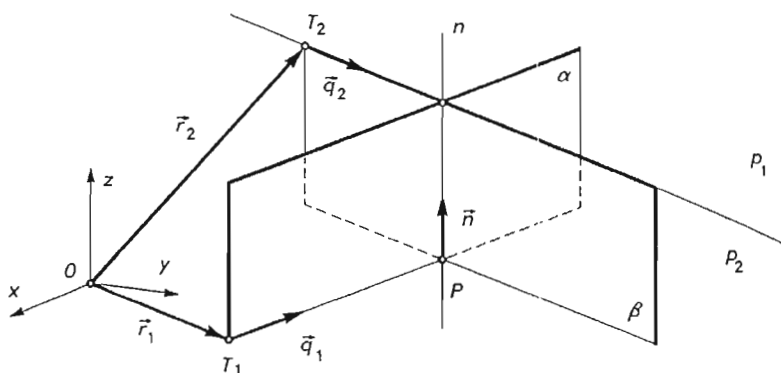
$$(\vec{r}_1 + t\vec{q}_1 - \vec{r}_2, \vec{q}_2, \vec{q}_1 \times \vec{q}_2) = 0.$$

Iz ove jednadžbe za vrijednost parametra t_0 , koja pripada točki P , slijedi

$$t_0 = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_1 \times \vec{q}_2)}{(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_1 \times \vec{q}_2)},$$

tj.

$$t_0 = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_1 \times \vec{q}_2)}{(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)^2}.$$



Sl. 334.

Stoga je radijvektor \vec{p} točke P jednak

$$\vec{p} = \vec{r}_1 + \vec{q}_1 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_1 \times \vec{q}_2)}{(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)^2}.$$

Uvrstimo li \vec{p} u jednadžbu $\vec{r} = \vec{p} + t(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)$ zajedničke normale, konačno dobivamo jednadžbu zajedničke normale

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{q}_1 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_1 \times \vec{q}_2)}{(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)^2} + t(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2). \blacksquare$$

9.9. Plohe 2. reda

Plohom 2. reda zovemo skup svih točaka prostora koordinate kojih zadovoljavaju algebarsku jednadžbu 2. reda

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0, \quad (1)$$

u kojoj su svi koeficijenti realni brojevi, a bar jedan od koeficijenata a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ različit od nule. Sada ćemo redom navesti sve tipove ploha drugog reda.

a) Sfera. Najjednostavnija od svih ploha 2. reda je sfera. Neka je središte sfere u točki $S = (\alpha, \beta, \gamma)$, r njezin polumjer, $T = (x, y, z)$ bilo koja točka sfere. Kako je udaljenost svake točke sfere od njezinog središta jednaka r , to vrijedi

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2. \quad (2)$$

Dalje, i svaka točka koordinate koje zadovoljavaju jednadžbu (2) leži na toj sferi. Stoga je u smislu analitičke geometrije (2) jednadžba sfere. Jednadžba (2) je posebni slučaj jednadžbe (1), pa je sfera ploha 2. reda.

Primjer 39. Odredite središte i polumjer sfere

$$144(x^2 + y^2 + z^2) - 144x + 96y + 216z - 11 = 0.$$

Rješenje. Svedimo ovu jednadžbu na oblik (2). Imamo redom

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + \frac{2}{3}y + \frac{3}{2}z - \frac{11}{144} = 0,$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{9}{16} - \frac{11}{144} = 0$$

i konačno

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{4}\right)^2 = 1.$$

Središte sfere je u točki $S = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}\right)$, a polumjer je $r = 1$. ■

Primjer 40. Kako glasi jednadžba sfere na kojoj leže točke $A = (3, 1, -3)$, $B = (-2, 4, 1)$, $C = (-5, 0, 0)$ i kojoj središte leži u ravnini $2x + y - z + 3 = 0$?

Rješenje. Središte sfere očito leži na pravcu u kojem se sijeku simetralne ravnine α i β dužina \overline{AB} i \overline{BC} . Ravnina α prolazi polovištem $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -1\right)$ dužine \overline{AB} , a vektor $\overline{AB} = -5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ je njezin vektor normale. Stoga je $-5\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\left(y - \frac{5}{2}\right) + 4(z + 1) = 0$, tj. $5x - 3y - 4z + 1 = 0$ jednadžba ravnine α . Na isti se način nalazi da jednadžba ravnine β glasi $3x + 4y + z + 2 = 0$. Prema uvjetu zadatka koordinate središta rješenja su sustava jednadžbi koji se sastoji od jednadžbi ravnina α i β i jednadžbe $2x + y - z + 3 = 0$. Rješenje tog sustava je $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$. Dakle, središte sfere je u točki $S = (1, -2, 3)$. Polumjer sfere jednak je $r = d(S, A) = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-1)^2 + (3+3)^2} = 7$, pa jednadžba sfere glasi

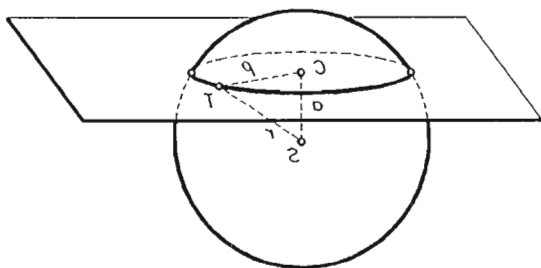
$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 49. \quad \blacksquare$$

Primjer 41. Odredite središte i polumjer kružnice u kojoj sferu $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$ siječe ravnina $2x - 2y - z + 9 = 0$.

Rješenje. Središte sfere je u točki $S = (3, -2, 1)$, a njezin je polumjer $r = 10$. Odredimo najprije udaljenost d središta sfere od zadane ravnine. Normalni oblik jednadžbe ravnine glasi

$$\frac{2x - 2y - z + 9}{-3} = 0,$$

pa je $d = \left| \frac{6 + 4 - 1 + 9}{-3} \right| = 6$. Središte kružnice C je ortogonalna projekcija točke S na zadanu ravninu α (sl. 335). Ako je T bilo koja točka presječne kružnice i ρ njezin



Sl. 335.

polumjer, onda iz pravokutnog trokuta $\triangle SCT$ nalazimo da je $g^2 = r^2 - d^2 = 100 - 36$. Dakle $g = 8$. Jednadžbe pravca kroz C okomito na α glase

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-1},$$

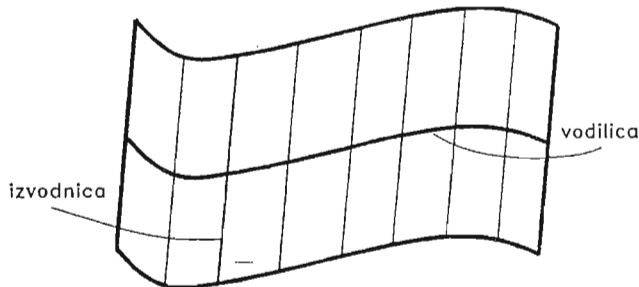
ili $x = 2t + 3$, $y = -2t - 2$, $z = -t + 1$. Ako to uvrstimo u jednadžbu ravnine α , nalazimo da je $t = -2$, pa je $C = (-1, 2, 3)$ središte tražene kružnice. ■

Primjer 42. Kako glase jednadžbe onih tangencijalnih ravnina sfere $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ koje su paralelne s ravninom $4x + 3z - 1993 = 0$?

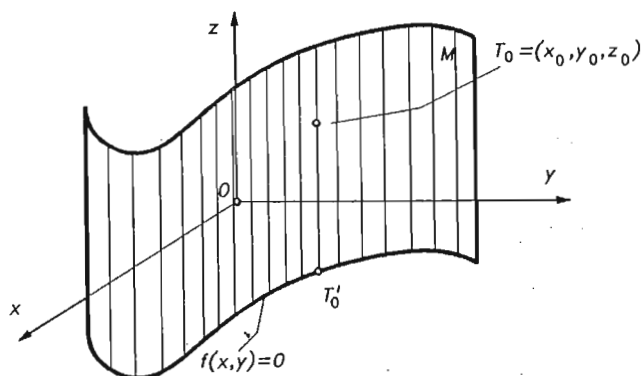
Rješenje. Pravac koji prolazi središtem sfere i okomit je na zadanu ravninu probada sferu u diralištima D_1 i D_2 traženih tangencijalnih ravnina. Kako taj pravac prolazi točkom $S = (3, -2, 1)$ i vektor normale $4\vec{i} + 3\vec{k}$ zadane ravnine mu je vektor smjera, to njegove kanonske jednadžbe glase $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{3}$. (Neka vas ova 0 u nazivniku ne plaši, ona je simbolična i samo je naznaka činjenice da je druga koordinata vektora smjera pravca jednaka 0, tj. da je taj pravac paralelan s xz -ravninom.) Parametarske jednadžbe tog pravca glase $x = 4t + 3$, $y = -2$, $z = 3t + 1$. Probodište pravca i sfere određuje se na isti način kao i probodište pravca i ravnine. Uvrstimo li to u jednadžbu sfere, dobivamo $(4t + 3 - 3)^2 + (-2 + 2)^2 + (3t + 1 - 1)^2 = 25$. Odavde je $t_{1,2} = \pm 1$. Uvrštavanjem u parametarske jednadžbe pravca nalazimo da su probodišta u točkama $D_1 = (7, -2, 4)$ i $D_2 = (-1, -2, -2)$. Tangencijalna ravnina sfere s diralištem u D_1 je ona ravnina koja prolazi tom točkom, koja je okomita na pravac SD_1 . Kako je vektor normale te ravnine $4\vec{i} + 3\vec{k}$, to njezina jednadžba glasi $4(x-7) + 3(z-4) = 0$, tj. $4x + 3z - 40 = 0$. Na isti se način nalazi da jednadžba tangencijalne ravnine s diralištem u D_2 glasi $4x + 3z + 10 = 0$. ■

b) **Cilindrične plohe 2. reda.** Ako svakom točkom krivulje (ravninske ili prostorne) povučemo pravac paralelan s nekim pravcem prostora, dobit ćemo skup točaka u prostoru koji zovemo **cilindričnom (valjkastom) plohom**. Ti se pravci zovu **izvodnice cilindrične plohe**, a krivulja njezinom **direktrinom (vodilicom)** (sl. 336). Očito, svaka krivulja koja leži na cilindričnoj plohi i siječe sve njezine izvodnice može poslužiti kao direktrisa te plohe. Dakle, pravčasta ploha može imati više direktrisa. Nas će zanimati posebni slučaj kada je direktrisa ravninska krivulja, i to krivulja 2. reda. U tom se slučaju ploha zove cilindrična ploha 2. reda.

Neka je $f(x, y) = 0$, $z = 0$ jednadžba bilo koje krivulje koja leži u xy -ravnini i M cilindrična ploha kojoj je ta krivulja direktrisa, a izvodnice paralelne s osi



Sl. 336.



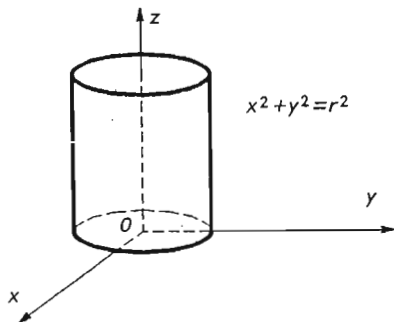
Sl. 337.

(sl. 337). Ako je $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ bilo koja točka cilindrične plohe, onda ona sigurno leži na nekoj od izvodnica, pa koordinate njezine ortogonalne projekcije $T'_0 = (x_0, y_0, 0)$ na xy -ravninu zadovoljavaju jednadžbu direktrise $f(x, y) = 0$, tj. vrijedi $f(x_0, y_0) = 0$. Kako u toj jednadžbi nema aplikate z , to i za koordinate točke T vrijedi $f(x_0, y_0) = 0$. Dakle, svaka točka T cilindrične plohe zadovoljava jednadžbu $f(x, y) = 0$, pa je ta jednadžba **jednadžba te cilindrične plohe**.

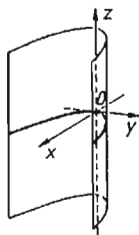
Analogno jednadžba cilindrične plohe kojoj je direktrisa krivulja $g(y, z) = 0$ u yz -ravnini, a izvodnice paralelne sa osi x ima jednadžbu $g(y, z) = 0$ itd.

Neka je sada izvodnica kružnica $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$ u xy -ravnini, a izvodnice paralelne s osi z , onda se ploha zove **kružni cilindar**. Prema rečenome jednadžba kružnog cilindra glasi $x^2 + y^2 = r^2$ (sl. 338).

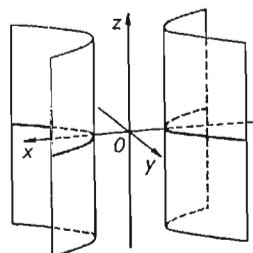
Ako je pak direktrisa elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, a izvodnice paralelne s osi z , onda se ploha zove **eliptički cilindar**. Jednadžba eliptičnog cilindra glasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Sl. 338.



Sl. 339.



Sl. 340.

Ako je direktrisa parabola $y^2 = 2px$, $z = 0$, a izvodnice paralelne s osi z , onda se ploha zove **parabolički cilindar** (sl. 339). Jednadžba tog cilindra glasi $y^2 = 2px$.

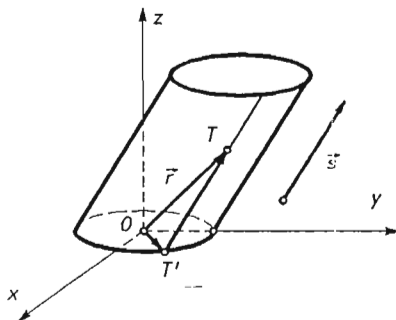
Ako je direktrisa hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, a izvodnice paralelne s osi z , onda se ploha zove **hiperbolički cilindar**. Jednadžba hiperboličnog cilindra glasi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (sl. 340).

Na crtežima 336-340. prikazani su samo dijelovi tih ploha. Cilindrične plohe su neomeđene. Uočimo da su sve izvedene jednadžbe algebarske jednadžbe 2. reda, pa su stoga cilindri 2. reda ujedno i plohe 2. reda.

Ako svakom točkom neke plohe prolazi pravac koji čitav leži na toj plohi, onda takvu ploha zovemo **pravčastom plohom**. Cilindri 2. reda su dakle pravčaste plohe. Mi ćemo kasnije vidjeti da postoje još dva tipa ploha 2. reda koje su pravčaste plohe.

Primjer 43. Kako glasi jednadžba cilindrične plohe kojoj je direktrisa elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, a izvodnice su joj paralelne s vektorom $\vec{s} = \vec{r} + \vec{j} + \vec{k}$ (kosi eliptički cilindar)?

Rješenje. Uzmimo na toj plohi bilo koju točku $T = (x, y, z)$ i neka je \vec{r} radijvektor te točke. Povucimo točkom T izvodnicu plohe i neka ona siječe direktrisu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,



Sl. 341.

$x = 0$ u točki T' . Na sl. 341. vidimo da je tada $\vec{r} = \vec{OT}' + \vec{T}'T$. Postoji realan parametar u , takav da je $\vec{OT}' = \vec{ia} \cos u + \vec{jb} \sin u$ (v. parametarske jednadžbe elipse, §5.7). Dalje, postoji realna vrijednost parametra v takva da je $\vec{T}'T = v \cdot \vec{s}$, tj. $\vec{T}'T = v(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. Stoga je radijvektor točke T dan sa

$$\vec{r} = \vec{ia} \cos u + \vec{jb} \sin u + v(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}),$$

tj.

$$\vec{r} = (v + a \cos u)\vec{i} + (v + b \sin u)\vec{j} + v\vec{k}.$$

Ova je jednadžba ekvivalentna sa tri skalarne jednadžbe $x = v + a \cos u$, $y = v + b \sin u$, $z = v$. Kako svakom paru (u, v) , $u \in [0, 2\pi)$, $v \in \mathbb{R}$ te jednadžbe pridružuju jednu točku plohe s koordinatama (x, y, z) i obrnuto, za svaku točku plohe postoji uređen par (u, v) takav da ta točka leži na plohi, to te tri jednadžbe zovemo parametarskim jednadžbama plohe. Iz ovih jednadžaba eliminacijom parametara u i v nalazimo da je

$$\left(\frac{x-z}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-z}{b}\right)^2 = 1,$$

i to je jednadžba naše plohe. Vidimo, dakle, da je kosi eliptički cilindar ploha 2. reda. ■

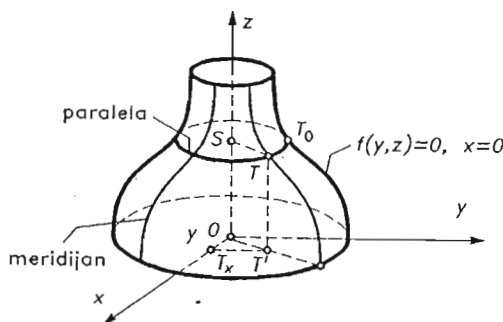
Ako neka ravnina sadrži samo izvodnicu cilindrične plohe, onda kažemo da ta ravnina dira tu plohu uzduž izvodnice. Takvu ravninu zovemo **tangencijalnom ravninom** cilindrične plohe.

Primjer 44. Direktrisa cilindrične plohe je parabola $y^2 = 4x$, $z = 0$, a smjer izvodnica je određen vektorom $\vec{s} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Kako glasi jednadžba one tangencijalne ravnine te plohe koja sadrži izvodnicu koja prolazi točkom $D = (1, 2, 0)$ te plohe?

Rješenje. Tražena tangencijalna ravnina siječe xy -ravninu u onoj tangenti krivulje $y^2 = 4x$, $z = 0$ kojoj je diralšte u točki $(1, 2)$ xy -ravnine. Jednadžba te tangente glasi $y = x + 1$, a vektor $\vec{q} = \vec{i} + \vec{j}$ je vektor smjera tangente. Vektor smjera izvodnice je $\vec{s} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, pa je vektor normale tražene tangencijalne ravnine jednak $\frac{1}{2}\vec{n} = \vec{q} \times \vec{s} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Kako tangencijalna ravnina prolazi točkom $D = (1, 2, 0)$, to njezina jednadžba glasi $1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - 2) - 1 \cdot (z - 0) = 0$, tj. $x - y - z + 1 = 0$.

Nađite za vježbu i jednadžbu zadanog kosog paraboličnog cilindra. Na način opisan u prethodnom primjeru dobiva se $2x - z = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$, pa se zaista radi o cilindru 2. reda. ■

c) Rotacione plohe 2. reda. Ako ravninska krivulja u prostoru rotira oko nekog pravca p koji leži u ravnini krivulje i ne siječe je, onda nastaje ploha koja se zove **rotaciona ploha**. Pravac p se zove **os rotacione plohe**, a krivulja se zove **generatrisa (izvodilja) te plohe**. Svaki položaj krivulje pri toj rotaciji zove se **meridijan** plohe, a presjeci plohe ravninom okomitom na os zovu se **paralele** rotacione plohe. Dakle svakom točkom rotacione plohe prolazi točno jedan meridijan i točno jedna paralela. Nađimo jednadžbu rotacione plohe kojoj je zadana generatrisa $f(y, z) = 0$, $x = 0$ i koja nastaje rotacijom te generatriše oko osi z (sl. 342). U tu svrhu uzmimo bilo koju točku $T = (x, y, z)$ na toj plohi. Ona je nastala rotacijom neke točke T_0 generatriše. Neka je S središte paralele na kojoj leži točka T . Označimo sa T' ortogonalnu projekciju točke T na xy -ravninu,



Sl. 342.

a sa T_x ortogonalnu projekciju od T' na os x . Iz pravokutnog trokuta $\Delta OT_x T'$ razabiremo da je $|OT'| = \sqrt{x^2 + y^2}$, pa je i $|ST'| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Kako je točka T nastala rotacijom točke T_0 oko osi z , to je y -koordinata točke T_0 jednaka $\sqrt{x^2 + y^2}$, kako točka $T_0 = (0, \sqrt{x^2 + y^2}, z)$ leži na krivulji, to vrijedi $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$. Dakle, koordinate svake točke $T = (x, y, z)$ rotacione plohe zadovoljavaju jednadžbu $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$, pa je stoga to i jednadžba te rotacijske plohe.

Ukratko: ako je $f(y, z) = 0, x = 0$ jednadžba onog meridijana rotacione plohe koji leži u yz -ravnini, onda se jednadžba rotacijske plohe, koja nastaje rotacijom tog meridijana oko osi z , dobije tako da se u njoj y zamijeni sa $\sqrt{x^2 + y^2}$.

U slučaju da se radilo o rotaciji oko osi y , treba u jednadžbi $f(y, z) = 0$ zamijeniti z sa $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Kako se nalazi jednadžba rotacijske plohe u ostalim slučajevima, lako ćete zaključiti sami.

Dakako da je sfera primjer rotacijske plohe. Navedimo sada i ostale tipove rotacijskih ploha 2. reda.

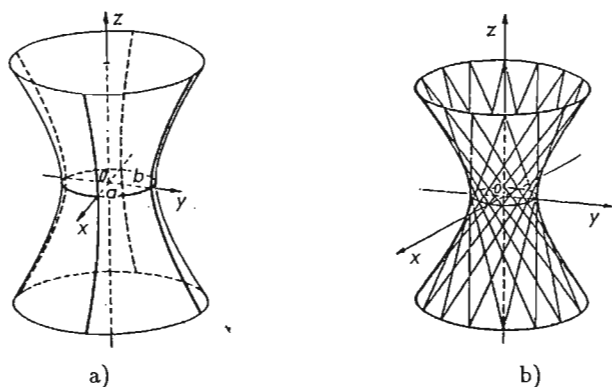
Ploha koja nastaje rotacijom hiperbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$ oko osi z zove se **jednoplomi rotacioni hiperboloid**. Njegova se jednadžba dobije tako da se u jednadžbi hiperbole y zamijeni sa $\sqrt{x^2 + y^2}$. Dakle, jednadžba jednoplhog rotacionog hiperboloida glasi $\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ploha koja nastaje rotacijom hiperbole $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x = 0$ oko osi z ima jednadžbu $-\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Ta se ploha zove **dvoplohi rotacioni hiperboloid**.

Ploha koja nastaje rotacijom parabole $y^2 = 2pz, x = 0$ oko osi z zove se **rotacioni paraboloid**. Njegova jednadžba glasi $x^2 + y^2 = 2pz$.

Ploha koja nastaje rotacijom pravca $z = ay, x = 0$ ima jednadžbu $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ ili $a^2(x^2 + y^2) = z^2$. Ta se ploha zove **rotacijski stožac**.

Dakako da je i kružni cilindar primjer rotacijske plohe 2. reda.



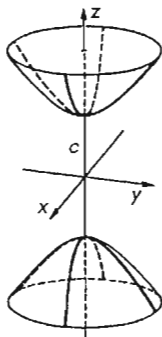
Sl. 343.

Napokon ploha koja nastaje rotacijom elipse $\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1, x = 0$ oko osi z ima jednadžbu $\frac{x^2 + y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. Ta se ploha zove **rotacioni elipsoid** ili **dvoosni elipsoid**.

Generalizacijom jednadžbi ovih ploha dobiju se sljedeće plohe 2. reda.

Ploha $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ zove se **jednoplomi hiperboloid**. On je skiciran na sl. 343a. Paralele te plohe su elipse kojima su središta na osi z , a meridijani kongruentne hiperbole. Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ zove se **grlena elipsa** jednoplomog hiperboloida. Za $a = b$ imamo rotacioni jednopolni hiperboloid, pa se u tom slučaju kružnica $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ zove **grlena kružnica** hiperboloida.

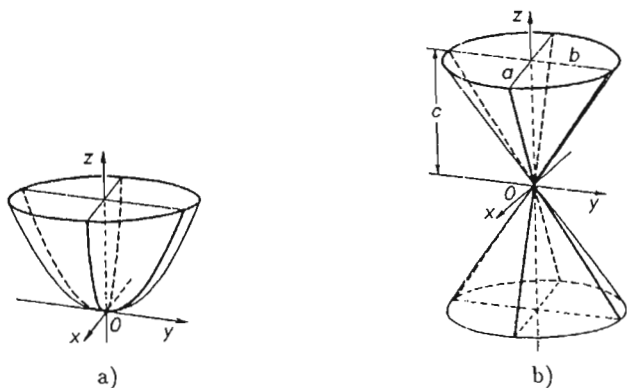
Ploha zadana jednadžbom $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ zove se **dvoplohi hiperboloid** (sl. 344). Za $a = b$, kao što smo vidjeli, dobije se rotacioni dvoplohi hiperboloid.



Sl. 344.

Ploha $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ zove se **eliptički paraboloid** (v. sl. 345a).

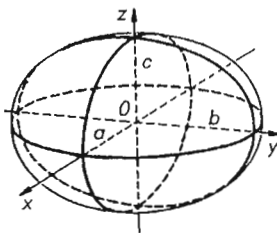
Ploha zadana jednadžbom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ zove se **stožac 2. reda** ili još i



Sl. 345.

eliptički stožac, jer su njegovi presjeci s ravninama okomitim na os elipse. Za $a = b$ dobije se rotacioni stožac. On je skiciran na sl. 345b.

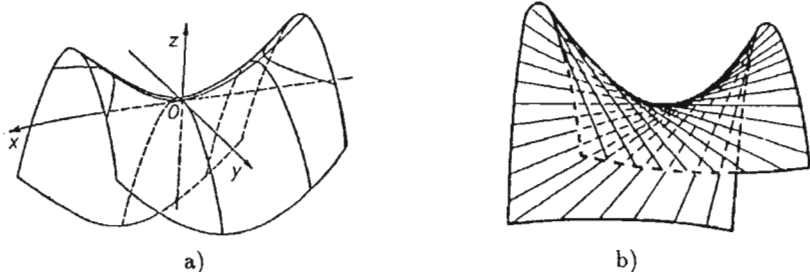
Generalizacijom jednadžbe dvoosnog (rotacionog) elipsoida dobije se jednadžba $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a \neq b \neq c$. Ploha određena tom jednadžbom zove se **elipsoid** ili troosni elipsoid. Ta je ploha skicirana na sl. 346. Presjeci te plohe s koordinatnim ravninama su elipse.



Sl. 346.

Zadnji tip plohe 2. reda je ploha zadana jednadžbom $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$. Ta se ploha zove **hiperbolički paraboloid**, a zbog svojeg izgleda zove se još i **sedlasta ploha**. Na sl. 347a. ona je skicirana za $p < 0$.

Pokazuje se (slično kao i kod krivulja u ravnini) da su to svi tipovi ploha 2. reda, tj. uvijek je moguće tako svrsishodno odabrati koordinatni sustav u prostoru da svaka jednadžba oblika (1) u tom sustavu ima jedan od prije navedenih oblika.



Sl. 347.

Stoga se ti oblici zovu i kanonskim oblicima jednadžaba ploha 2. reda.

Primjer 45. Dokažite da je jednoplohi hiperboloid pravčasta ploha.

Rješenje. Neka je hiperboloid dan svojom kanonskom jednadžbom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Napišimo tu jednadžbu u obliku $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$, odnosno $\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$. Dakle, svaka točka $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ koja zadovoljava prvu jednadžbu zadovoljava i treću, pa onda i sustav jednadžbi $\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = 1 + \frac{y_0}{b}$, $\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} = 1 - \frac{y_0}{b}$, a to znači da ta točka leži na pravcu

$$p \dots \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1 + \frac{y}{b}, \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1 - \frac{y}{b}. \end{cases}$$

Obrnuto, i koordinate svake točke tog pravca očito zadovoljavaju jednadžbu hiperboloida, pa stoga i čitav pravac leži na tom hiperboloidu. Dakle, jednoplohi hiperboloid je pravčasta ploha. Vrijedi još i više. Naime, slično se vidi da i čitav pravac

$$q \dots \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1 - \frac{y}{b}, \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1 + \frac{y}{b}. \end{cases}$$

leži na tom hiperboloidu. Dakle, svakom točkom jednoplohog hiperboloida prolaze dva pravca koji na njemu leže v. sl. 343b. ■

Za vježbu pokažite sami da je i hiperbolični paraboloid (sedlasta ploha) pravčasta ploha i da svakom točkom te plohe prolaze dva pravca koji na njoj leže. Jednoplohi hiperboloid i sedlasta ploha su jedine dvije plohe 2. reda koje su pravčaste (v. sl. 347b).

Primjer 46. Dokažite da ravnina $y+6=0$ siječe hiperbolički paraboloid $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ u paraboli. Odredite parametar i tjeme te parabole.

Rješenje. Presjek je parabola $\frac{x^2}{5} - 9 = 6z$, $y = -6$, koja leži u ravnini $y + 6 = 0$. Uzmemo li u toj ravnini koordinatni sustav kojemu je ishodište u točki $O' = (0, -6, 0)$, a kojemu su koordinatne osi $O'x'$, $O'y'$ paralelne s osima Ox , Oy , onda u tom sustavu

jednadžba presječne krivulje glasi $\frac{x^2}{5} - 9 = 6z'$, a to je jednadžba parabole kojoj je tjeme u točki $T = \left(0, -6, -\frac{3}{2}\right)$ i kojoj je parametar jednak $p = 15$. ■

Primjer 47. Parabola $x^2 = -2pz$, $y = 0$, $p > 0$ giba se tako da je ravnina u kojoj leži uvijek paralelna sa xz -ravninom, a tjeme joj klizi po paraboli $y^2 = 2qz$, $x = 0$, $q > 0$. Dokažite da tako pomična parabola opisuje hiperbolični paraboloid.

Rješenje. Neka je $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ bilo koja točka na opisani način nastale plohe. Ta točka leži na onoj pomičnoj paraboli kojoj je tjeme u točki $T_0 = \left(0, y_0, \frac{y_0^2}{2q}\right)$. Jednadžba pomične parabole u toj ravnini glasi $x^2 = -2p \left(z - \frac{y_0^2}{2q}\right)$, pa vrijedi $x_0^2 = -2p \left(z_0 - \frac{y_0^2}{2q}\right)$. Dakle, koordinate svake točke plohe zadovoljavaju jednadžbu $x^2 = -2p \left(z - \frac{y^2}{2q}\right)$, odnosno $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = -2z$. Usporedba s kanonskom jednadžbom sedlaste plohe pokazuje da navedenim gibanjem zaista nastaje sedlasta ploha. ■

Primjer 48. Dokažite da je $z = xy$ jednadžba sedlaste plohe.

Rješenje. Neka je $Ox'y'z'$ koordinatni sustav koji nastaje rotacijom sustava $Oxyz$ oko osi z za neki kut α . Tada su, prema primjeru 17, koordinate u ta dva sustava vezane relacijama:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \\z &= z'.\end{aligned}$$

Dakle, jednadžba plohe u sustavu $Ox'y'z'$ glasi

$$z' = (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha),$$

tj.

$$z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \sin 2\alpha + x'y' \cos 2\alpha.$$

Uzmemo li $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, dobit ćemo $2z' = x'^2 - y'^2$, pa se zaista radi o sedlastoj plohi. Za vježbu skicirajte tu plohu. ■

VII. ELEMENTARNA TEORIJA BROJEVA

§ 1. Uvod. Djeljivost. Prosti brojevi

Grubo govoreći, teorija brojeva proučava skup prirodnih brojeva

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\},$$

odnosno, malo šire, skup cijelih brojeva

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Teorija brojeva uopće, a posebno elementarna teorija brojeva, pripada među najstarije matematičke discipline s prvim dokumentiranim počecima u starohebrejskoj, pa starogrčkoj i starokineskoj kulturi te s nastavkom od srednjovjekovne europske kulture do danas. Kronecker¹ je jednom rekao (govoreći o matematici uopće) da je "...Bog stvorio prirodne brojeve, a sve ostalo je djelo čovjeka".

Osnovna svojstva skupa \mathbb{N} su da na njemu imamo dvije operacije: zbrajanje i množenje, za koje vrijede uobičajena pravila, da svaki neprazni podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima minimalni element $\min S \in S$, te (kao posljedica) da vrijedi princip matematičke indukcije (prvi dio, pogl. I).

Broj $a \in \mathbb{N}$ dijeli broj $b \in \mathbb{N}$ ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $b = ka$. To zapisujemo kao $a|b$; ako a ne dijeli b , piše se $a \nmid b$. Na primjer $2|6$ ali $4 \nmid 6$. Kaže se još da je b **djeljiv** s a ili da je a **divizor** ili **djelitelj** od b . Problem nalaženja divizora danog broja je vrlo težak praktički problem. Na primjer, danas se ne znaju (netrivijalni) divizori broja $2^{16438} + 1$ (ali se zna da postoje). Prirodni broj $p > 1$, koji je djeljiv samo sa 1 i samim sobom, zove se **prost broj** (ili katkad **prim broj**), a ostali brojevi veći od 1 se zovu **složeni**. Broj 1 nije niti prost niti složen. Svaki se složeni broj $n \in \mathbb{N}$ može napisati u obliku $n = a \cdot b$, gdje su $a, b \in \mathbb{N}$ i $1 < a, b < n$. Prirodni broj koji je djeljiv sa 2 zove se **paran**, a inače **neparan**. Jedini paran prost broj je 2. Kasnije ćemo pokazati da se svaki prirodan broj (osim broja 1) može prikazati kao umnožak prostih brojeva, pa stoga možemo reći da prosti brojevi čine "osnovne dijelove" svakog prirodnog broja. Naime, ako je zadan neki prirodan broj, onda ga želimo postupno rastavljati na njegove faktore, sve dotle dok to možemo. Na primjer, $240 = 24 \times 10 = 4 \times 6 \times 10 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5$. Tako

¹Leopold Kronecker (1823–1891), njemački matematičar.

dolazimo do samih prostih faktora danog broja. Stoga vidimo da je proučavanje prostih brojeva od izuzetnog značenja u teoriji brojeva. Početni komad skupa P svih prostih brojeva izgleda ovako

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \dots\}.$$

Mnoge probleme iz (elementarne) teorije brojeva, a napose o prostim brojevima, lako je razumjeti, ali isto tako teško riješiti. Evo nekoliko takvih "povijesnih" primjera i kratkih komentara o njima.

1) Je li skup P svih prostih brojeva beskonačan? Odgovor je potvrđan. Malo kasnije ćemo dati Euklidov dokaz te činjenice.

2) **Goldbachova hipoteza.** Može li se svaki paran broj > 2 prikazati kao suma od dva prosta broja (npr. $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3, \dots$)? I danas (1994) odgovor je nepoznat, iako su sve konkretne provjere (i računalima) dale pozitivne odgovore. Goldbachova² hipoteza kaže da je odgovor potvrđan.

3) Neki se prosti brojevi pojavljuju u parovima susjednih prostih brojeva: 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, 41 i 43, 59 i 61, 71 i 73, 101 i 103, ... Ima li takvih "parova blizanaca" beskonačno mnogo? Odgovor na to pitanje ne zna se do danas.

Među najvećim danas poznatim "parom blizanaca" je par brojeva $260497545 \cdot 2^6625 \pm 1$, a s modernom kompjuterskom tehnologijom, se u toj potrazi gotovo svakodnevno mogu očekivati sve veći rezultati.

Može se pokazati da je problem "parova blizanaca" ekvivalentan problemu da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n , tako da broj $n^2 - 1$ ima točno 4 djelitelja. Već i ovo pokazuje da su "problemi djelitelja" vrlo bliski "problemima s prostim brojevima"

4) Ne zna se, ima li beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

5) Za svaki dovoljno veliki realni broj x , npr. $x \geq 117$, postoji barem jedan prost broj između brojeva x i $x + \sqrt{x}$. Tu je slutnju krajem 18. st. postavio Legendre³, ali ona i do danas nije riješena.

Ovo je samo jedan od problema vezan uz tzv. "problem gustoće" prostih brojeva. U tom smislu ćemo kasnije pokazati da za svaki prirodan broj $n > 1$, između n i $2n$ postoji bar jedan prost broj. Isto tako, kasnije ćemo razmatrati funkciju $\pi(x)$, gdje je $\pi(x)$ broj prostih brojeva koji nisu veći od x .

Promotrimo sada nekoliko primjera s djeljivošću i prostim brojevima.

Primjer 1. Dokažite da $120|n^5 - 5n^3 + 4n$, za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Rješenje. $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$. Dakle, imamo umnožak od pet uzastopnih cijelih brojeva koji su svi pozitivni, jer je $n > 2$. No, u nizu prirodnih brojeva 1, 2, 3, ..., svaki drugi broj je djeljiv sa 2, svaki treći sa 3, svaki četvrti sa 4, a svaki peti sa 5. Prema tome, u produktu od pet uzastopnih brojeva mora biti takvih faktora koji su redom djeljivi s 2, 3, 4, 5. Stoga je $n^5 - 5n^3 + 4n$ djeljiv s $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. ■

Primjer 2. Dokažite da $169|3^{3n+3} - 26n - 27$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

²Christian Goldbach (1690 - 1764), njemački matematičar. Od 1725 djeluje u Rusiji. Problem postavio u pismu Euleru 1742.

³Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833), francuski matematičar.

Rješenje. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po n . Za $n = 1$, $169 \cdot 3^6 - 26 - 27 = 676 = 4 \cdot 169$. Dalje imamo $3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27 - (3^{3n+3} - 26n - 27) = 26(3^{3n+3} - 1)$. No, $13|3^3 - 1$, pa $13|3^{3(n+1)} - 1 = (3^3 - 1)(3^{n+1} + 3^n + \dots + 1)$. Stoga $169|26(3^{3n+3} - 1)$, čime dokaz slijedi indukcijom. ■

Primjer 3. Ima li prostih brojeva oblika $8^n + 1, n \in \mathbb{N}$?

Rješenje. Nema. Za svako $n \in \mathbb{N}$, koristeći se formulom $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, vidimo da $2^n + 1|2^{3n} + 1 = 8^n + 1$, i naravno, $1 < 2^n + 1 < 8^n + 1$. Stoga su svi brojevi $8^n + 1, n \in \mathbb{N}$ složeni. ■

Primjer 4. Dokažite da je Goldbachova hipoteza ekvivalentna hipotezi da je svaki parni broj veći od 4 zbroj triju prostih brojeva.

Rješenje. Iz Goldbachove hipoteze slijedi da za svako $n \in \mathbb{N}, n > 1$, postoje prosti brojevi p, q , tako da je $2n = p + q$. Stoga je $2(n+1) = 2 + p + q$, pa je svaki parni broj > 4 suma triju prostih brojeva. Obratno, ako je svaki parni broj > 4 suma tri prosta broja, tj. ako za svako $n \in \mathbb{N}, n > 2$, postoje prosti brojevi p, q, r tako da je $2n = p + q + r$, onda bar jedan od brojeva p, q, r mora biti paran, pa stoga jednak 2. Neka je, npr., $r = 2$. Tada je $2(n-1) = p + q$, a to povlači Goldbachovu hipotezu. ■

Primjer 5. Dokažite da postoji beskonačno mnogo neparnih prirodnih brojeva, koji se ne mogu prikazati kao suma od najviše dva prosta broja.

Rješenje. Takvi su, npr., brojevi $(14k + 3)^2, k \in \mathbb{N}$. Očito su oni neparni i složeni (tj. nisu prosti). Kada bi se takav broj mogao napisati kao suma dvaju prostih brojeva, onda bi jedan od njih morao biti jednak 2, tj. imali bismo $(14k + 3)^2 = 2 + p$, odakle je $p = 7(28k^2 + 12k + 1)$, što je nemoguće. ■

Primjer 6. Pretpostavimo da je prost broj p u decimalnom zapisu oblika $p = \underbrace{111\dots1}_s$ (tj. s jedinica). Dokažite da je tada s prost broj. (Obrat ne vrijedi.)

Rješenje. Pretpostavimo da je s složen broj, tj. $s = ab, (a, b > 1)$. Tada imamo

$$p = \frac{10^s - 1}{9} = \frac{10^{ab} - 1}{9}.$$

Međutim, zbog $10^a - 1|10^{ab} - 1$, slijedi $\frac{10^a - 1}{9}|p$, pri čemu je $\frac{10^a - 1}{9}$ prirodni broj > 1 , jer je $a > 1$. Zbog $b > 1$ imamo da je

$$\frac{10^a - 1}{9} < \frac{10^{ab} - 1}{9} = p.$$

Oдавде zaključujemo da p ima divizor $(10^a - 1)/9$, koji je veći od 1, a manji od p , što je nemoguće, pa to dokazuje tvrdnju. Da obrat ne vrijedi pokazuju primjeri $111 = 3 \cdot 37$ i $11111 = 41 \cdot 271$. Ne zna se, međutim, sadrži li niz 11, 111, 1111, ... beskonačno mnogo prostih brojeva. ■

Pojam djeljivosti se izravno prenosi s prirodnih na cijele brojeve. Skup svih cijelih brojeva $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ je prsten s obzirom na operacije zbrajanja i množenja. Brojevi -1 i 1 dijele sve cijele brojeve, i to su jedini takvi brojevi. Oni se zovu **jedinice** prstena \mathbb{Z} .

Neka osnovna svojstva djeljivosti u \mathbb{Z} jesu (dokažite ih sami):

(1) $c|a, a \neq 0$;

(2) $a|b$ & $b|a \Rightarrow a = \pm b$;

$$(3) a|b \ \& \ b|c \Rightarrow a|c;$$

$$(4) a|b \ \& \ a|c \Rightarrow a|b \pm c;$$

$$(5) a|b \ \& \ a|c \Rightarrow a|bc.$$

I u skupu \mathbf{Z} je prost broj p onaj čiji su svi djelitelji $\pm p, \pm 1$. No uobičajeno je za proste brojeve uzimati samo pozitivne brojeve > 1 .

Ako je $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ i p prost broj, onda postoji $a \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ takav da je $p^a | n$, ali $p^{a+1} \nmid n$. To se lako vidi ako su $p, n > 0$, jer potencije od p rastu i nakon konačno mnogo koraka prijeđu n . Ostali slučajevi se svode na ovaj. Broj a se zove red od n u p . Oznaka je $a = \text{ord}_p n$, i kaže koja najveća potencija od p dijeli n . Stavljajući $\text{ord}_p 0 = \infty$. Uočite da je $\text{ord}_p n = 0 \Leftrightarrow p \nmid n$.

LEMA 1. *Svaki prirodan broj (> 1) može se predočiti kao produkt prostih brojeva.*

Dokaz I. Pretpostavimo da postoji prirodan broj koji se ne može tako predočiti. Neka je $N \in \mathbf{N}$ najmanji takav broj. Ako je N prost broj, onda je N (na trivijalni način) produkt prostih brojeva, a ako N nije prost broj, onda je $N = mn$, $1 < m, n < N$. Kako su m, n pozitivni i manji od N , onda su oni produkti prostih, a tada je i njihov produkt $N = mn$ produkt prostih. Kontradikcija.

Dokaz II. (Indukcijom) 2 je prost. Pretpostavimo da je $2 < N$ i uzmimo da je tvrdnja dokazana za sve m , $2 \leq m < N$. Želimo dokazati da se i N može prikazati kao produkt prostih. Ako je N već prost, tvrdnja je dokazana. Ako N nije prost, onda je $N = mn$, $2 \leq m, n < N$. Po pretpostavci indukcije m i n su produkti prostih, pa je i N takav. ■

TEOREM 1 (Euklid). *Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.*

Dokaz. Označimo sa p_1, p_2, p_3, \dots proste brojeve u rastućem poretku, tj. $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ itd. Neka je $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. Broj $N > 1$ nije djeljiv niti s jednim $p_i, i = 1, 2, \dots, n$.

S druge strane, prema Lemi 1, broj N je djeljiv s nekim prostim brojem p . Kako je $p \neq p_i, i = 1, 2, \dots, n$ to mora biti $p > p_n$. Dokazali smo, dakle, da za svaki prost broj postoji veći prost broj. Stoga prostih brojeva ima beskonačno mnogo. ■

Prema Lemi 1, svaki se cijeli ne nul-broj može napisati (do na predznak) kao produkt prostih brojeva. Skupivši jednake faktore, možemo pisati $n = \pm p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, gdje su p_i prosti brojevi, $a_i \geq 0$. Katkad se piše još

$$n = (-1)^{\varepsilon(n)} \prod_{p \in \mathbf{P}} p^{a(p)},$$

gdje je $\varepsilon(n) = \begin{cases} 0, & n > 0 \\ 1, & n < 0, \end{cases}$ $a(p) = 0$ za sve $p \in \mathbf{P}$ osim konačno mnogo njih.

Na primjer, za $n = 180$, $\varepsilon(n) = 0, a(2) = 2, a(3) = 2, a(5) = 1$ a svi ostali $a(p) = 0$. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

TEOREM 2 (osnovni teorem aritmetike). *Svaki cijeli broj $n \neq 0$ može se zapisati u obliku produkta prostih brojeva*

$$n = (-1)^{\epsilon(n)} \prod_{p \in P} p^{a(p)}.$$

*EkspONENTI su jednoznačno određeni sa n . Zapravo, $a(p) = \text{ord}_p n$. Za $n \in \mathbf{N}$, rastav $n = \prod_p p^{a(p)}$ zove se **kanonski rastav** od n .*

Dokaz nije jednostavan, kako se može učiniti na prvi pogled, pa ćemo ga provesti malo kasnije.

LEMA 2 (o dijeljenju). *Za svako $a, b \in \mathbf{Z}$, $b > 0$, postoje jedinstveni $q, r \in \mathbf{Z}$, tako da je $a = qb + r$, gdje je $0 \leq r < b$.*

Dokaz I. Promotrimo skup $S = \{a - bx \mid x \in \mathbf{Z}\}$. Očito $S \cap \mathbf{N} \neq \emptyset$, pa neka je $r = \min(S \cap \mathbf{N}) = a - qb$. Tvrdimo $0 \leq r < b$. U suprotnome bilo bi $r = a - qb \geq b \Rightarrow 0 \leq a - (q+1)b < r$, što je u kontradikciji s minimalnošću elementa r .

Dokaz II. Specijalni slučaj Teorema 3, poglavlja II. o polinomima (str. 62). ■

Za $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$, stavimo

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{Z}\}.$$

Primijetimo da za $a, a' \in A = (a_1, \dots, a_n) \Rightarrow a \pm a' \in A, r \in \mathbf{Z} \Rightarrow ra \in A$. Kaže se još da je A ideal u prstenu \mathbf{Z} .

LEMA 3 (o idealima). *Ako su $a, b \in \mathbf{Z}$, onda postoji $d \in \mathbf{Z}$ takav da je*

$$(a, b) = (d).$$

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je bar jedan od $a, b \neq 0$. Stoga je $(a, b) \cap \mathbf{N} \neq \emptyset$. Neka je $d = \min((a, b) \cap \mathbf{N})$. Očito $(d) \subseteq (a, b)$. Pokažimo da vrijedi i obrnuta inkluzija. Neka je $c \in (a, b)$. Prema Lemi 2, $\exists q, r \in \mathbf{Z}, c = qd + r, 0 \leq r < d$. Kako $c, d \in (a, b) \Rightarrow r = c - qd \in (a, b)$. Zbog $0 \leq r < d$ i izbora d , slijedi $r = 0$. Stoga je $c = qd \in (d)$. ■

Primjer 7. Neka je p prost broj. Ako je $5p^2 - 2$ prost broj, dokažite da su tada $5p^2 - 4$ i $5p^2 + 2$ također prosti brojevi.

Rješenje. Podijelimo p brojem 3 i neka je r ostatak, tj. napišimo $p = 3q + r$, $0 \leq r < 2$ (prema lemi o dijeljenju). Ako je $r = 0$, onda je nužno $q = 1$ (jer je p prost), pa je $p = 3$ i tada je $5p^2 - 4 = 41$, $5p^2 + 2 = 47$. Ako je $r = 1$, onda broj $5p^2 - 2 = 45q^2 + 30q + 3 = 3(15q^2 + 10q + 1)$ nije prost. Ako je $r = 2$, onda opet $5p^2 - 2 = 45q^2 + 60q + 18 = 3(15q^2 + 20q + 9)$ nije prost. Time je tvrdnja dokazana. ■

Primjer 8. Dokažite da za $n > 2$, brojevi $2^n - 1$ i $2^n + 1$ ne mogu istodobno biti prosti.

Rješenje. Podijelimo $2^n - 1$ sa 3 i neka je r ostatak, tj. napišimo $2^n - 1 = 3q + r$. Ako je $r = 0$, onda je $q \neq 1$, jer je $n > 2$, pa je $2^n - 1$ složen broj. Ako je $r = 1$, onda je

$2^n + 1 = 3q + 3 = 3(q + 1)$ složen broj, a slučaj $r = 2$ povlači $2^n = 3q + 3$, tj. 2^n bi bio djeljiv sa 3, što nije moguće. ■

Neka su $a, b \in \mathbf{Z}$. Cijeli broj d se zove **najveća zajednička mjera** od a i b , ako $d|a$ i $d|b$ te svaki djelitelj od a i b dijeli d . Primijetimo, ako je c najveća zajednička mjera od a i b , onda $c|d$ i $d|c \Rightarrow c = \pm d$, pa je najveća zajednička mjera određena do na predznak, ako postoji. Ona se označava s $M(a, b)$.

LEMA 4 (egzistencija najveće zajedničke mjere). *Neka su $a, b \in \mathbf{Z}$. Ako je $(a, b) = (d)$, onda je d najveća zajednička mjera od a, b .*

Dokaz. $a \in (d), b \in (d) \Rightarrow d|a, b$. Neka je c djelitelj od a i b . Tada $c|ax + by$, pa kako je d također oblika $ax + by$, to $c|d$. ■

Pretpostavljat ćemo uvijek da je $M(a, b)$ pozitivan od ona dva kandidata. Time je $M(a, b)$ jednoznačno određen pozitivan broj.

Efektivno se najveća zajednička mjera $M(a, b)$ najčešće određuje **Euklidovim algoritmom** (usp. prvi dio, pogl. II o polinomima).

$$\left. \begin{array}{l} a = qb + r, \quad 0 \leq r < b \\ b = q_1r + r_1, \quad 0 \leq r_1 < r \\ r = q_2r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1 \\ \vdots \\ r_{k-1} = q_{k+1}r_k + r_{k+1}, \quad 0 \leq r_{k+1} < r_k \\ r_k = q_{k+2}r_{k+1}. \end{array} \right\} (*)$$

Tada je $r_{k+1} = M(a, b)$.

Odredimo tako npr. $M(612, 124)$. Imamo redom

$$612 = 4 \cdot 124 + 116$$

$$124 = 1 \cdot 116 + 8$$

$$116 = 14 \cdot 8 + \boxed{4}$$

$$8 = 2 \cdot 4 + 0.$$

Stoga je $M(612, 124) = 4$.

Brojevi $a, b \in \mathbf{Z}$ su **relativno prosti**, ako je $M(a, b) = 1$.

Uočite da za bilo koja dva broja $a, b \in \mathbf{Z}$ s najvećom zajedničkom mjerom $d = M(a, b)$ postoje $x, y \in \mathbf{Z}$, tako da je

$$ax + by = d.$$

Naime, to neposredno slijedi iz Leme o idealima, a efektivno to možemo učiniti tako da u (*) izrazimo $d = r_{k+1}$ pomoću r_k i r_{k-1} , pa zatim pomoću r_{k-1} i r_{k-2} itd., dok očito ne završimo s oblikom $d = ax + by$. Posebno, za relativno proste brojeve a i b postoje uvijek $x, y \in \mathbf{Z}$, tako da je

$$xa + yb = 1.$$

Primjer 9. Ako su $a, b \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi, dokažite da postoje $u, v \in \mathbb{N}$, takvi da je $au - bv = 1$.

Rješenje. Prema gornjim razmatranjima, postoje $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tako da je $ax_0 + by_0 = 1$. Odaberimo cijeli broj t_0 , tako da je $t_0 > -x_0/b$ i $t_0 > y_0/a$. Stavimo $u = x_0 + bt_0 > 0$ i $v = -(y_0 - at_0) > 0$. Očito $u, v \in \mathbb{N}$ i $au - bv = ax_0 + by_0 = 1$. ■

Primjer 10. Za $m, n \in \mathbb{N}$, m neparan, dokažite da je $M(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$.

Rješenje. Neka je $M(2^m - 1, 2^n + 1) = d$. Tada je očito d neparan broj i $2^m - 1 = kd$, $2^n + 1 = ld$, za neke prirodne brojeve k, l . Iz relacija $2^m = kd + 1$, $2^n = ld - 1$, dobivamo $2^{mn} = (kd + 1)^n = xd + 1$, $2^{mn} = (ld - 1)^m = yd - 1$, za neke prirodne brojeve x, y . Stoga je $xd + 1 = yd - 1$, tj. $d(y - x) = 2$ pa $d|2$. Kako je d neparan, to je $d = 1$. ■

Primjer 11. Dokažite da je svaki prirodan broj > 6 zbroj dvaju relativno prostih prirodnih brojeva većih od 1.

Rješenje. Neka je $n > 6$ neparan broj. Tada je $n = 2 + (n - 2)$ traženi rastav, jer je $n - 2 > 1$ neparan, pa je $M(2, n - 2) = 1$. Neka je $n > 6$ paran. Ako je $n = 4k$, $k > 1$ (zbog $n > 6$), onda je traženi rastav $n = (2k - 1) + (2k + 1)$, jer je $2k + 1 > 2k - 1 > 1$, a $2k - 1, 2k + 1$ dva uzastopna neparna broja, koja su relativno prosta. Neka je sada $n = 4k + 2$, za neko $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ (zbog $n > 6$). Tada je traženi rastav $n = (2k + 3) + (2k - 1)$. Naime, $2k + 3 > 2k - 1 > 1$ (zbog $k > 1$). Neka je d neki djelitelj od $2k + 3$ i $2k - 1$. Tada $d|2k + 3$ i $d|2k - 1$ povlači $d|(2k + 3) - (2k - 1)$, tj. $d|4$. Kako je d djelitelj neparanog broja, to i sam mora biti neparan, pa je $d = 1$. Stoga je $M(2k + 3, 2k - 1) = 1$. ■

PROPOZICIJA 1 (djeljivost produkta). Ako $a|bc$ i $M(a, b) = 1$, onda $a|c$.

Dokaz. Zbog $M(a, b) = 1 \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z}$, $ax + yb = 1 \Rightarrow xac + ybc = c$. Budući da a dijeli lijevu stranu, mora dijeliti i desnu. ■

Tvrđnja ne vrijedi ako je $M(a, b) \neq 1$. Na primjer, $6|24$, no $6 \nmid 3$ i $6 \nmid 8$.

KOROLAR 1. Ako je p prost broj i $p|bc$, onda $p|b$ ili $p|c$.

Dokaz. Jedini djelitelji od p su $\pm 1, \pm p$. Stoga je $M(p, b) = 1$ ili p , tj. ili $p|b$ ili $M(p, b) = 1$. Ako $p|b$, dokaz je gotov. Ako $p \nmid b$ onda je $M(p, b) = 1$, pa je prema Propoziciji $p|c$. ■

Napomenimo da Korolar 1. očito vrijedi i za više faktora, pa ga možemo riječima izraziti ovako: Ako prost broj dijeli produkt od nekoliko prirodnih brojeva, onda dijeli bar jedan faktor.

Kontrapozicijom dobivamo

KOROLAR 2. Ako je p prost broj, $p \nmid b$ i $p \nmid c$, onda $p \nmid bc$. ■

KOROLAR 3. Neka je p prost broj, $a, b \in \mathbb{Z}$. Tada je $\text{ord}_p ab = \text{ord}_p a + \text{ord}_p b$.

Dokaz. Neka je $\alpha = \text{ord}_p a$, $\beta = \text{ord}_p b$. Tada je $a = p^\alpha c$, $b = p^\beta d$, $p \nmid c$, $p \nmid d$. Dalje, $ab = p^{\alpha+\beta} cd$ i zbog Korolara 2. $p \nmid cd$. Stoga je $\text{ord}_p ab = \alpha + \beta = \text{ord}_p a + \text{ord}_p b$. ■

Očito i Korolar 3. vrijedi i za produkt od više faktora (možemo stoga reći da se ord_p ponaša kao i logaritamska funkcija). Sada se vratimo na dokaz osnovnog teorema aritmetike.

Dokaz Teorema 2. Primijenimo ord_q na obje strane jednakosti

$$n = (-1)^{\varepsilon(n)} \prod_p p^{a(p)}$$

koristeći Korolar 3. Tada je

$$\text{ord}_q n = \varepsilon(n) \text{ord}_q(-1) + \sum_p a(p) \text{ord}_q(p). \quad (*)$$

Prema definiciji funkcije ord_q imamo da vrijedi

$$\text{ord}_q(-1) = 0, \text{ord}_q(p) = \begin{cases} 0, & \text{za } p \neq q \\ 1, & \text{za } p = q. \end{cases}$$

Stoga je desna strana u (*) jednaka $a(q)$, tj. $\text{ord}_q(n) = a(q)$. ■

Napomenimo da je suština dokaza tu bio Korolar 1, tj. $p|ab \Rightarrow p|a$ ili $p|b$.

Slično, kao i najveća zajednička mjera, definira se **najmanji zajednički višekratnik** $v(a, b)$ brojeva $a, b \in \mathbf{Z}$ kao broj $m \in \mathbf{Z}$ takav da $a|m$ i $b|m$ i m dijeli svaki zajednički višekratnik od a i b . Uzimamo $v(a, b) > 0$. Vrijedi $M(a, b)v(a, b) = ab$ i $M(a + b, v(a, b)) = M(a, b)$. Dokažite to sami koristeći formule

$$a = \prod_p p^{a(p)}, b = \prod_p p^{b(p)} \Rightarrow M(a, b) = \prod_p p^{\min(a(p), b(p))}, v(a, b) = \prod_p p^{\max(a(p), b(p))}.$$

Napomenimo da se najveća zajednička mjera (kratko n.z.m.) i najmanji zajednički višekratnik (kratko n.z.v.) mogu definirati i za više brojeva induktivno formulama $M(a_1, a_2, \dots, a_n) = M(M(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$, $v(a_1, a_2, \dots, a_n) = v(v(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$. Za $n \geq 3$ brojeva više ne vrijedi općenito da je n.z.m. puta n.z.v. jednako produktu brojeva.

Najveća zajednička mjera $M(a, b)$ sadrži sve zajedničke faktore od a i b . Stoga, ako a i b podijelimo sa $M(a, b)$, dobiveni kvocijenti neće imati zajedničkih faktora. Vrijedi, naime, sljedeće svojstvo.

PROPOZICIJA 2. Brojevi $\frac{a}{M(a, b)}, \frac{b}{M(a, b)}$ su relativno prosti.

Dokaz. Neka je $d = M(a, b)$ najveća zajednička mjera od a i b . Neka je $a_1 = a/d, b_1 = b/d$. Pretpostavimo suprotno da a_1 i b_1 nisu relativno prosti i neka im je najveća zajednička mjera $d_1 > 1$. Tada su $a_2 = a_1/d_1, b_2 = b_1/d_1$ cijeli brojevi. Jednakosti $a = dd_1a_2, b = dd_1b_2$ povlače da je dd_1 zajednički djelitelj od a i b , pa je $dd_1 \leq d$, što je nemoguće zbog $d_1 > 1$. Dakle a_1 i b_1 su relativno prosti, i tvrdnja je dokazana. ■

Primjer 12. Neka su p i q zadani prirodni brojevi. Dokažite da tada postoje jedinstveni prirodni brojevi a i b tako da je $pb = qa$ (tj. $p/q = a/b$) i da je $M(a, b) = 1$. Drugim riječima, svaki se razlomak može "do kraja skratiti", tako da mu brojnik i nazivnik postanu relativno prosti, i to se može učiniti na jednoznačan način.

Rješenje. Egzistencija. Uzmimo $a = \frac{p}{M(p, q)}$, $b = \frac{q}{M(p, q)}$. Brojevi a i b su relativno prosti prema Propoziciji 2, i očito je $p/q = a/b$.

Jedinstvenost. Neka su $a, a', b, b' \in \mathbb{N}$ takvi da je $a/b = a'/b'$ i $M(a, b) = M(a', b') = 1$. Dokažimo da je $a = a'$ i $b = b'$. Iz $M(a, b) = 1$ slijedi da postoje cijeli brojevi x, y , tako da je $xa + yb = 1$. Stoga imamo

$$b' = (xa + yb)b' = xab' + ybb' = xa'b + yb'b = (xa' + yb')b,$$

pa zaključujemo da $b|b'$. Slično, iz $M(a', b') = 1$ slijedi da $b'|b$. Kako su b i b' prirodni brojevi, slijedi da je $b = b'$. Iz naše pretpostavke $ab' = a'b$ slijedi tada $a = a'$. ■

Primjer 13. Dokažite da je $M(a^m - 1, a^n - 1) = a^{M(m, n)} - 1$, za $m, n, a \in \mathbb{N}$, $a > 1$.

Rješenje. Neka je $\delta = M(m, n)$. Tada je $m = \delta m_1$, $n = \delta n_1$, pri čemu je $M(m_1, n_1) = 1$ (Propozicija 2). Zbog Primjera 9, postoje $u, v \in \mathbb{N}$, tako da je $m_1 u - n_1 v = 1$. Stoga je $\delta = m u - n v$. Neka je $d = M(a^m - 1, a^n - 1)$. Očito $a^{M(m, n)} - 1 | a^m - 1$ i $a^{M(m, n)} - 1 | a^n - 1$, što povlači $a^{M(m, n)} - 1 | d$. S druge strane, $d | a^m - 1$ povlači $d | a^{m u} - 1$ i slično $d | a^{n v} - 1$. Stoga $d | a^{m u} - a^{n v} = a^{n v} (a^{m u - n v} - 1) = a^{n v} (a^\delta - 1)$. Iz $d | a^m - 1$ i $a > 1$ slijedi $M(a, d) = 1$, pa $d | a^\delta - 1$. Prema tome, ovo zajedno sa $a^\delta - 1 | d$ daje konačno $a^{M(m, n)} - 1 = d = M(a^m - 1, a^n - 1)$. ■

Složen broj n se može prikazati kao produkt dvaju brojeva od kojih je svaki manji od n , tj. $n = ab$, $1 < a, b < n$. Možemo pretpostaviti da je $a \leq b$. Tada je $a^2 \leq ab = n$, pa stoga $a \leq \sqrt{n}$. Stoga smo dokazali

TEOREM 3. *Ako je prirodni broj n složen, onda ima djelitelj a , takav da je $1 < a \leq \sqrt{n}$.* ■

KOROLAR 4. *Svaki složen broj n ima prosti djelitelj $\leq \sqrt{n}$.* ■

Tako, npr., da se ispita da li je broj 1993 prost ili složen, treba samo vidjeti je li 1993 djeljiv s prostim brojevima $\leq \sqrt{1993}$, tj. sa 2, 3, 5, ..., 43. Nakon ovih 14 dijeljenja vidimo da 1993 nije djeljiv niti jednim od tih brojeva, pa je 1993 prost broj.

Primjer 14. Dokažite da između bilo kojih $n + 1$ (ili više) brojeva iz skupa $\mathbb{N}_{2n} = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ postoje uvijek dva od kojih jedan dijeli drugog.

Rješenje. Ovdje ćemo se koristiti tzv. Dirichletovim⁴ principom, koji kaže: ako je $n + 1$ (ili više) kuglica smješteno u n kutija, onda bar jedna kutija sadrži bar dvije kuglice. Ovaj jednostavni teorem je napose koristan u elementarnoj teoriji brojeva.

Svaki se prirodan broj može na jedinstveni način napisati u obliku $2^k \cdot a$, gdje je $k \geq 0$ ($k \in \mathbb{Z}$), a neparan, tj. izlučimo sve faktore 2 tog broja. Za brojeve između 1 i $2n$ vrijednosti od a su među n brojeva 1, 3, 5, ..., $2n - 1$. Stoga među $n + 1$ (ili više) brojeva prema Dirichletovom principu postoje dva broja čiji su pripadni a -ovi jednaki. Neka su to brojevi $2^r \cdot a$ i $2^s \cdot a$ i neka je $r \leq s$. Tada je očito $2^r \cdot a | 2^s \cdot a$. ■

Primjer 15. Neka je $n > 1$ prirodan broj, a $S \subseteq \{2, 3, 4, \dots, n^2\}$ podskup od n elemenata, tj. $|S| = n$. Ako su svaka dva elementa iz S relativno prosti, dokažite da S sadrži bar jedan prost broj.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da je svaki $a \in S$ složen broj. Svaki složen broj a , ima prema Korolaru 4, prost djelitelj $p(a) \leq \sqrt{a}$. Kako je $a \leq n^2$, to je $p(a) \leq \sqrt{a} \leq n$.

⁴Peter G. L. Dirichlet (1805 - 1859), njemački matematičar.

Kako su svaka dva broja iz S relativno prosta, to su pripadni $p(a)$ -ovi međusobno različiti. Stoga i tih $p(a)$ -ova ima točno n , jer je $|S| = n$. To je, međutim, u kontradikciji s Dirichletovim principom, jer svih prostih brojeva koji su $\leq n$ ima najviše $n - 1$. ■

Faktorizacija na proste faktore je, naravno, zamršen posao. Jedan od razloga za to je da nemamo jednostavnu karakterizaciju prostih brojeva. Među najvećim danas poznatim prostim brojevima je $2^{858433} - 1$. Taj broj ima u dekadskom sustavu skoro 260 tisuća cifara, a u binarnom sustavu taj broj ima zapis od 858 433 jedinice.

Neposredna posljedica gornjeg Korolara je da ako je $n > 1$ prirodan broj i ako nije djeljiv niti s jednim prostim brojem $\leq \sqrt{n}$, onda je n prost broj. Odavde dobivamo metodu za dobivanje svih prostih brojeva u nizu $2, 3, 4, \dots, N$, gdje je N dani prirodni broj. Dovoljno je, naime, odstraniti sve multiple kp prostih brojeva $p \leq \sqrt{N}$ iz tog niza. Npr., da dobijemo sve proste brojeve u nizu $2, 3, 4, \dots, 100$, dovoljno je odstraniti sve brojeve veće od $2, 3, 5, 7$ koji su djeljivi s barem jednim od njih.

Jednostavnu metodu nalaženja niza prostih brojeva našao je starogrčki matematičar Eratosten⁵. Promotrimo niz prirodnih brojeva $2, 3, 4, \dots$. Prvi (tj. najmanji) prost broj je $2 = p_1$. Sada izbacimo iz niza sve brojeve veće od p_1 koji su djeljivi sa p_1 . Prvi od preostalih je $3 = p_2$. Sada izbacimo sve višekratnike od p_2 koji su veći od p_2 . Prvi od preostalih je $5 = p_3$. Pretpostavimo da je nakon n -tog koraka preostao n -ti prost broj p_n i da smo iz niza izbacili sve veće brojeve od p_n koji su djeljivi sa p_n . Prvi od preostalih je $(n + 1)$ -vi prost broj p_{n+1} . Taj postupak dobivanja niza prostih brojeva se zove Eratostenovo sito.

Ako se niz sastoji od prirodnih brojeva $2, 3, 4, \dots, N$ onda taj postupak završava nakon k koraka, gdje je p_k najveći prost broj $\leq \sqrt{N}$. Tako dobivamo niz prostih brojeva $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23, p_{10} = 29, \dots, p_{25} = 97, \dots, p_{100} = 541, \dots, p_{200} = 1223, \dots, p_{1000} = 7919, \dots, p_{1229} = 9973, p_{1230} = 10007$. Nedavno je izračunato da je $p_{6000000} = 104395301$.

D. Blanuša⁶ je 1949 godine našao sljedeću jednostavnu geometrijsku interpretaciju Eratostenovog sita. U Kartezijevom sustavu promotrimo skup točaka $A = \{(0, \frac{1}{m}) | m \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{(n + 1, 0) | n \in \mathbb{N}\}$. Spojimo pravcem svaku točku iz A sa svakom točkom iz B (nacrtajte sliku!). Tada je skup svih apscisa točaka presjeka tih pravaca s pravcem $y = -1$ točno skup svih složenih brojeva. Naime, pravac kroz točku $(0, \frac{1}{m})$ i $(n + 1, 0)$ ima jednadžbu $x/(n + 1) + my = 1$. Taj pravac siječe pravac $y = -1$ u točki s apscisom $x = (m + 1)(n + 1)$. Kako su m i n prirodni brojevi, x je složen broj. Obratno, ako je x složen broj, onda je $x = (m + 1)(n + 1)$ za neke $m, n \in \mathbb{N}$, pa je x apscisa presjeka pravca kroz $(\frac{1}{m}, 0)$ i $(n + 1, 0)$ s pravcem $y = -1$.

⁵Eratosten iz Kirene (276 - 194 pr. Kr.), djelovao u Aleksandriji.

⁶Danilo Blanuša (1903-1987), hrvatski matematičar, profesor matematike na PMF-u i ETF-u Sveučilišta u Zagrebu. Bavio se pretežno diferencijalnom geometrijom i specijalnim funkcijama.

Neke aritmetičke funkcije

Aritmetička funkcija je svaka funkcija definirana na skupu \mathbb{N} . Napose su zanimljive one među njima koje odražavaju strukturu od \mathbb{N} (djeljivost i sl.). Mi ćemo proučiti neke od njih. No prije toga recimo da riječ **aritmetika** dolazi od grčke riječi $\alpha\rho\iota\upsilon\mu\omicron\varsigma$ - broj, pa se pod aritmetikom u davniini podrazumijevala vještina računanja s brojevima, a danas znanost o cijelim i racionalnim brojevima i operacijama s njima.

Definirajmo $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ i $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\tau(n)$ = broj svih pozitivnih djelitelja od n , $\sigma(n)$ = suma svih pozitivnih djelitelja od n .

PROPOZICIJA 3. *Neka je $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ kanonski rastav od n . Tada je*

$$\begin{aligned} \text{a) } \tau(n) &= (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1), \\ \text{b) } \sigma(n) &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}. \end{aligned}$$

Dokaz. a) $m|n \Leftrightarrow m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Stoga su djelitelji od n u bijekciji s uređenim k -torkama $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$, gdje je $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, a tih je $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.

b) $\sigma(n) = \sum p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, gdje se sumira po svim k -torkama kao gore. Stoga je

$$\sigma(n) = \left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} p_1^{\beta_1} \right) \left(\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} p_2^{\beta_2} \right) \dots \left(\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_k^{\beta_k} \right),$$

pa koristeći formulu za sumu konačnog geometrijskog niza, slijedi tvrdnja. ■

Primjer 16. Nađite sve prirodne brojeve koji imaju točno 15 djelitelja.

Rješenje. Treba naći sve $n \in \mathbb{N}$ za koje je $\tau(n) = 15$. Prema Propoziciji 3a), mora biti $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 15$. Pri tom možemo pretpostaviti da je $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k$. Postoje samo dva načina da se 15 prikaže kao produkt (rastućih) brojeva > 1 ; to su $15 = 3 \cdot 5$ i $15 = 15$. Stoga mora biti ili $k = 2$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$ ili $k = 1$, $\alpha_1 = 14$. Prema tome, svi traženi brojevi su $n = p^2 q^4$, gdje su $p \neq q$ prosti brojevi ili $n = p^{14}$, gdje je p prost broj. Najmanji među njima je $n = 2^4 \cdot 5^2 = 400$. ■

S funkcijom $\sigma(n)$ vezan je jedan zanimljiv neriješen problem. Prirodni broj n je savršen ako je $\sigma(n) = 2n$. Npr. 6 i 28 su savršeni. Općenito, ako je $2^{m+1} - 1$ prost broj, onda je $n = 2^m(2^{m+1} - 1)$ savršen jer iz Propozicije 3b) slijedi

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{(2^{m+1} - 1)^2 - 1}{2^{m+1} - 2} = (2^{m+1} - 1) \frac{(2^{m+1} - 1 + 1)(2^{m+1} - 2)}{2^{m+1} - 2} = \\ &= 2 \cdot 2^m(2^{m+1} - 1) = 2n. \end{aligned}$$

To je još znao i Euklid. Euler je dokazao da je svaki parni savršen broj tog oblika. Stoga se problem nalaženja parnih savršenih brojeva svodi na problem nalaženja prostih brojeva oblika $2^{m+1} - 1$. Takvi prosti brojevi zovu se **Mersenneovi**⁷

⁷Marin Mersenne (1588 - 1648), francuski matematičar i fizičar.

brojevi. Ne zna se ima li beskonačno mnogo Mersenneovih brojeva. Isto tako ne zna se postoje li neparni savršeni brojevi. Najveći danas poznat Mersenneov broj je $2^{858433} - 1$, a najveći savršeni $2^{858433}(2^{858433} - 1)$ koji ima oko pola milijuna cifara.

Primjer 17. Dokažite Eulerovu tvrdnju da je svaki parni savršen broj n oblika $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$, gdje je $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, a $2^m - 1$ prost broj.

Rješenje. Napišimo n u obliku $n = 2^{m-1} \cdot l$, gdje je $m > 1$, l neparan (tj. "izlučimo" sve dvojke). Koristeći se svojstvom $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$ za $M(a, b) = 1$ (što izlazi odmah iz Propozicije 3b)), slijedi da je $\sigma(n) = (2^m - 1)\sigma(l)$. Zbog $\sigma(n) = 2n$ slijedi $(2^m - 1)\sigma(l) = 2^m l$. Iz $M(2^m - 1, 2^m) = 1$, slijedi da je $\sigma(l) = 2^m q$, za neko $q \in \mathbb{N}$. Stoga je $(2^m - 1)q = l$, pa zbog $\sigma(l) = 2^m q$ slijedi $\sigma(l) = l + q$. No, iz $(2^m - 1)q = l$ slijedi da $q|l$ i $q < l$ (zbog $m > 1$). Prema tome, broj l ima barem dva različita djelitelja q i l , a formula $\sigma(l) = l + q$ dokazuje da nema drugih. Stoga mora biti $q = 1$ a l prost broj. Dakle, $l = (2^m - 1)q = 2^m - 1$ i konačno $n = 2^{m-1}l = 2^{m-1}(2^m - 1)$, gdje je $2^m - 1$ prost broj. ■

Möbiusova i Eulerova funkcija

Definirajmo Möbiusovu funkciju $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ na sljedeći način: $\mu(1) = 1$. Neka je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ kanonski rastav od n . Ako je n djeljiv s kvadratom prostog broja (tj. ako je bar jedan od brojeva $\alpha_i > 1$), stavimo $\mu(n) = 0$. Ako su svi $\alpha_i = 1$ (tj. $n = p_1 p_2 \dots p_k$, gdje su p_i različiti prosti brojevi) stavimo $\mu(n) = (-1)^k$.

PROPOZICIJA 4. Za $n > 1$ je $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$. (Simbol $\sum_{d|n}$ se čita ovako: suma po svim d koji dijele n .)

Dokaz. Neka je $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ kanonski zapis od n . Tada je

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)} \mu(p_1^{\epsilon_1} p_2^{\epsilon_2} \dots p_k^{\epsilon_k}),$$

gdje su ϵ_i 0 ili 1. Stoga, s obzirom na to koliko ima jedinica u $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$, imamo po binomnom teoremu (pogl. II)

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 - k + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \dots + (-1)^k = (1 - 1)^k = 0. \blacksquare$$

Dubinu značenja Möbiusove funkcije μ može se dobro shvatiti tek s njenom vezom s Dirichletovim produktom.

Neka su $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Dirichletov produkt (ili konvolucija) od f i g je definirana sa

$$(f * g)(n) = \sum f(d_1)g(d_2),$$

gdje se sumira po svim $(d_1, d_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ za koje je $d_1 d_2 = n$. Taj produkt je asocijativan, jer imamo

$$[f * (g * h)](n) = \sum f(d_1)g(d_2)h(d_3) = [(f * g) * h](n),$$

gdje se sumira po svim trojkama (d_1, d_2, d_3) za koje je $d_1 d_2 d_3 = n$. Definiramo funkciju $I : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ sa $I(1) = 1, I(n) = 0$ za $n > 1$. Tada je $f * I = I * f = f$. Neka je $I : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definirana sa $I(n) = 1$. Tada je

$$(f * I)(n) = (I * f)(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

LEMA 5. $I * \mu = \mu * I = I$.

Dokaz. $(\mu * I)(1) = \mu(1)I(1) = 1$. Za $n > 1$ imamo $(\mu * I)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = 0$.

To se isto primijeni na $I * \mu$. ■

TEOREM 4 (Möbiusova inverzija u teoriji brojeva). Neka su $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Tada vrijedi

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Dokaz. Očito vrijedi $g = f * I$. Stoga je $g * \mu = (f * I) * \mu = f * (I * \mu) = f * I = f$. To pokazuje da je $f(n) = (g * \mu)(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$. Analogno se dokazuje obrat. ■

Analogno se dokazuje multiplikativna verzija:

$$g(n) = \prod_{d|n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \prod_{d|n} \left(g\left(\frac{n}{d}\right)\right)^{\mu(d)}.$$

Eulerova funkcija $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definirana je ovako. $\varphi(n)$ je broj cijelih brojeva između 1 i n koji su relativno prosti sa n . Npr., $\varphi(1) = 1, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2, \varphi(9) = 6$ itd. Ako je p prost broj, jasno je da je $\varphi(p) = p - 1$.

PROPOZICIJA 5. $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Dokaz. Promotrimo n racionalnih brojeva $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$. Izvršimo maksimalna skraćivanja tih brojeva, tj. predočimo ih kao kvocijente relativno prostih brojeva. (Primjer 12.) Dobiveni nazivnici su svi djelitelji broja n . Ako $d|n$, onda točno $\varphi(d)$ imaju d kao nazivnik nakon navedenog skraćivanja. Kako svih brojeva ima n , slijedi da je $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. ■

Kako izračunati $\varphi(n)$?

PROPOZICIJA 6. Neka je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ kanonski zapis od n . Tada je

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Dokaz. Kako je $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, iz Teorema 3 o Möbiusovoj inverziji slijedi ($g = 1_{\mathbb{N}}$, $f = \varphi$):

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j} - \dots = \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \end{aligned}$$

(Za drugi dokaz v. D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.) ■

KOROLAR 5 (Multiplikativnost Eulerove funkcije). *Ako je $M(m, n) = 1$, onda je*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Dokaz. Neka su $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, $m = q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}$ kanonski rastavi od m i n . Kako su m i n relativno prosti, to su svi p_i -ovi različiti od svih q_j -ova. Stoga je kanonski rastav od mn dan sa

$$mn = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}.$$

Stoga je, prema Propoziciji 6,

$$\varphi(mn) = mn \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_l}\right) = \varphi(m)\varphi(n). \quad \blacksquare$$

Na drugi način se Propozicija 6 može dokazati tako da se prvo pokaže da za prost broj p vrijedi $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1)$ i drugo da vrijedi Korolar 5. Tada ove dvije činjenice povlače Propoziciju 6. Pokušajte to učiniti sami.

Primjer 18. Dokažite da za sve složene brojeve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$.

Rješenje. Neka je p_1 najmanji prost djeljitelj složenog broja n . Tada je (v. Korolar 4, §1) $p_1 \leq \sqrt{n}$. Stoga iz Propozicije 6 slijedi $\varphi(n) \leq n(1 - \frac{1}{p_1}) \leq n - \frac{n}{\sqrt{n}} = n - \sqrt{n}$. ■

Primjer 19. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, a $d = M(m, n)$. Dokažite da vrijedi

$$\varphi(mn) = \frac{d}{\varphi(d)} \varphi(m)\varphi(n).$$

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su kanonski rastavi od m i n dani ovako

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \dots q_l^{\gamma_l}$$

(tj. $p_i \neq q_j$, za sve i, j), s time da neki β_i mogu biti 0. Označimo li $\delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, dobivamo da je kanonski rastav od d dan sa

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k}.$$

Iz Propozicije 6 tada slijedi

$$\varphi(d) = d \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

$$\varphi(mn) = mn \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_l}\right),$$

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_l}\right).$$

Ove jednakosti očitno povlače $\varphi(d)\varphi(mn) = d\varphi(m)\varphi(n)$, što je ekvivalentno tvrdnji. Uočite da posebno, za $d = 1$, dobivamo Kòrolar 5. ■

Na kraju izvedimo jedno svojstvo funkcije ord_p . Vrijedi

PROPOZICIJA 7. $\text{ord}_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots \leq \frac{n}{p-1}$.

Dokaz. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p \cdot \dots \cdot n$. Prebrojimo koliko ima parova $(s, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takvih da je $p^s t \leq n$, tj. $t \leq \frac{n}{p^s}$. Za dano s takvih t -ova ima točno $\lfloor n/p^s \rfloor$, pa prva tvrdnja slijedi. Nejednakost slijedi iz sume geometrijskog reda:

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} + \dots =$$

$$= \frac{n}{p} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) = \frac{n}{p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1}. \blacksquare$$

Primjer 20. Da li je $50!$ djeljiv sa 7^7 , a sa 7^8 , a sa 7^9 ?

Rješenje. $\text{ord}_7(50!) = \lfloor \frac{50}{7} \rfloor + \lfloor \frac{50}{7^2} \rfloor + \lfloor \frac{50}{7^3} \rfloor + \dots = 7 + 1 + 0 + 0 + \dots = 8$. Dakle $7^7 | 50!$, $7^8 | 50!$, ali $7^9 \nmid 50!$. ■

Primjer 21. Neka je p prost broj, a $1 \leq k < p$. Dokažite da je binomni koeficijent $\binom{p}{k}$ djeljiv s p .

Rješenje. Iz $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ slijedi $p! = k!(p-k)! \binom{p}{k}$. Očito, p dijeli $p!$, ali ne dijeli $k!(p-k)!$, jer je to produkt cijelih brojeva manjih od p , pa stoga i relativno prostih s p (jer je p prost broj). Zato p mora dijeliti $\binom{p}{k}$. ■

Primjer 22. S koliko nula završava broj $\binom{180}{90}$ u dekadskom sustavu?

Rješenje. Očito će taj broj završavati s $\text{ord}_5 \binom{180}{90}$ nula. Iz Propozicije 7 slijedi da je općenito

$$\text{ord}_p \binom{n}{k} = \sum_{s \geq 1} \left\{ \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^s} \right\rfloor \right\}.$$

Stoga je traženi broj jednak

$$\text{ord}_5 \binom{180}{90} = \lfloor \frac{180}{5} \rfloor + \lfloor \frac{180}{5^2} \rfloor + \lfloor \frac{180}{5^3} \rfloor - 2 \left(\lfloor \frac{90}{5} \rfloor + \lfloor \frac{90}{5^2} \rfloor \right) = 2, \text{ tj. } \binom{180}{90} \text{ završava s dvije nule. } \blacksquare$$

§ 2. Prosti brojevi i funkcija $\pi(x)$

Prosti brojevi mogu se također nizati redom: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23, \dots$ Ne zna se neka lijepa i dovoljno jednostavna formula za n -ti prosti broj.

Za realni broj x , označimo sa $\pi(x)$ broj prostih brojeva $\leq x$. Tako je $\pi(1) = 0, \pi(2) = 1, \pi(3) = \pi(4) = 2, \pi(5) = \pi(6) = 3, \pi(7) = \pi(8) = \pi(9) = \pi(10) = 4, \pi(100) = 25, \pi(1000) = 168, \pi(10000) = 1229, \pi(10^5) = 9592$ itd. Nedavno je izračunato da je $\pi(10^{16}) = 279238341033925$. Očito je $\pi(p_n) = n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Kao i za p_n ne zna se neka korisna formula za $\pi(n)$. Stoga su korisne neke ocjene za $\pi(x)$.

TEOREM 1 (P. Erdős⁸, 1940). $\pi(n) \geq \frac{\log n}{2 \log 2}$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Svaki prirodni broj n se jedinstveno može prikazati u obliku $k^2 l$ ($k, l \in \mathbb{N}$), pri čemu l nije djeljiv s kvadratom nekog prostog broja. To slijedi odmah iz osnovnog teorema aritmetike. Dakle $n = k^2 l \geq k^2$, pa je $k \leq \sqrt{n}$, pa broj k može poprimiti najviše \sqrt{n} vrijednosti. Broj l je očito produkt različitih prostih brojeva iz niza $p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)}$. Broj takvih produkata (uključivši broj 1) je $2^{\pi(n)}$. Stoga broj l može poprimiti najviše $2^{\pi(n)}$ različitih vrijednosti. Prema tome, broj različitih produkata oblika $k^2 l$ (l nije djeljiv s kvadratom prostog broja) s time da su svi oni $\leq n$ je najviše jednak $\sqrt{n} 2^{\pi(n)}$. Kako se svaki prirodni broj $\leq n$ može reprezentirati u tom obliku, to slijedi da je $n \leq \sqrt{n} 2^{\pi(n)}$, tj. $\sqrt{n} \leq 2^{\pi(n)}$, a odavde logaritmiranjem slijedi tvrdnja. \blacksquare

KOROLAR 1. $p_k \leq 2^{2k}$.

Dokaz. Zbog $\pi(p_k) = k$ i gornjeg Teorema slijedi $k \geq \log p_k / 2 \log 2$, a odavde tvrdnja. \blacksquare

Dokazat ćemo i mnogo jaču tvrdnju: $p_k \leq 2^k$. To će slijediti kao posljedica jednog važnog teorema o rasprostranjenosti prostih brojeva. Vrijedi, naime,

TEOREM 2 (P. Čebišev, 1850). Za svaki prirodni broj $n > 1$, između brojeva n i $2n$ postoji bar jedan prost broj.

⁸Pál Erdős (r. 1913), mađarski matematičar.

KOROLAR 2. Za sve prirodne brojeve $k > 2$ vrijedi $p_k < 2^k$.

Dokaz Korolara. Prvo je $p_2 = 3 < 2^2$. Pretpostavimo da je za neko k , $p_k < 2^k$. Prema Čebiševljevu teoremu između 2^k i 2^{k+1} postoji prost broj, koji je očito veći od p_k . Stoga je $p_{k+1} < 2^{k+1}$, pa dokaz tvrdnje slijedi indukcijom. ■

Dokaz Čebiševljevog teorema je malo poduži, ali potpuno elementaran, kao što je izveden u knjizi W. Sierpiński, *Elementary Number Theory* nizom lema, pa ga takvog i navodimo. Drugi naziv za ovaj teorem je **Bertrandov postulat**, jer je tu tvrdnju naslutio J. Bertrand 1845 godine.

LEMA 1. $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$, za sve $n > 1$.

Dokaz. Indukcijom po n . Za $n = 2$, $\binom{4}{2} = 6 > \frac{4^2}{2\sqrt{2}}$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n > 1$. Tada imamo

$$\binom{2n+2}{n+1} = 2 \frac{2n+1}{n+1} \binom{2n}{n} > \frac{2(2n+1)4^n}{(n+1)2\sqrt{n}} = \frac{2(2n+1)4^n}{\sqrt{4n(n+1)}\sqrt{n+1}} > \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}},$$

jer zbog $(2n+1)^2 > 4n(n+1)$, imamo $2n+1 > \sqrt{4n(n+1)}$. ■

LEMA 2. Produkt P_n svih prostih brojeva od kojih je svaki $\leq n$, nije veći od 4^n .

Dokaz. Indukcijom po n . Za $n = 1, 2$, tvrdnja je točna, pa neka vrijedi za sve brojeve $< n$, gdje je $n > 2$. Ako je n paran, onda je $P_n = P_{n-1}$ pa lema vrijedi za broj n . Neka je $n = 2k+1$. Tada je svaki prost broj p , za koji je $k+2 \leq p \leq 2k+1$ djelitelj broja

$$\binom{2k+1}{k} = \frac{(2k+1)2k(2k-1)\dots(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

Zbog binomnog teorema imamo

$$(1+1)^{2k+1} > \binom{2k+1}{k} + \binom{2k+1}{k+1} = 2 \binom{2k+1}{k} \Rightarrow \binom{2k+1}{k} < 4^k.$$

Stoga je produkt svih različitih brojeva p za koje je $k+2 \leq p \leq 2k+1$ djelitelj broja $\binom{2k+1}{k} < 4^k$. Lema po pretpostavci vrijedi za brojeve $< n$, pa je produkt svih prostih brojeva $\leq k+1$ najviše jednak 4^{k+1} . Prema tome, $P_n = P_{2k+1} < < 4^k \cdot 4^{k+1} = 4^{2k+1} = 4^n$. Dakle, $P_n < 4^n$. ■

LEMA 3. Neka je p prosti djelitelj od $\binom{2n}{n}$, $p \geq \sqrt{2n}$. Tada je $\text{ord}_p \left(\binom{2n}{n} \right) = 1$.

Dokaz. $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, pa je prema Propoziciji 7

$$a(p) = \text{ord}_p \left(\binom{2n}{n} \right) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{2n}{p^k} \right] - 2 \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right] = \sum_{k \geq 1} \left(\left[\frac{2n}{p^k} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^k} \right] \right).$$

Za $n \neq 2$, $p > \sqrt{2n}$, pa je $a(p) = \left[\frac{2n}{p} \right] - 2 \left[\frac{n}{p} \right] < 2$, pa je $a \leq 1$. Za $n = 2$, lema slijedi izravno, jer je $\binom{4}{2} = 2 \cdot 3$. ■

LEMA 4. Neka prosta potencija p^r dijeli $\binom{2n}{n}$. Tada je $p^r \leq 2n$. Nadalje,

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

Dokaz. Neka, dakle, $p^r \mid \binom{2n}{n}$. Tada je

$$a(p) = \text{ord}_p \left(\binom{2n}{n} \right) = \sum_{k \geq 1} \left(\left[\frac{2n}{p^k} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^k} \right] \right) \geq r.$$

Kada bi bilo $p^r > 2n$, onda bi bilo $\left[\frac{2n}{p^k} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^k} \right] = 0$ za $k \geq r$, pa stoga

$$a(p) = \sum_{k=1}^{r-1} \left(\left[\frac{2n}{p^k} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^k} \right] \right).$$

No, kako je za sve $x \in \mathbf{R}$, $0 \leq [2x] - 2[x] \leq 1$, ova gornja nejednakost bi povlačila $a(p) \leq r - 2$, što proturijedi pretpostavci $a(p) \geq r$. Stoga je $p^r \leq 2n$.

Za dokaz druge tvrdnje, uočimo da u faktorizaciju od $\binom{2n}{n}$ ulaze samo prosti brojevi $\leq 2n$. Stoga je $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}$. ■

LEMA 5. Neka je $n > 2$ prirodan broj. Tada ni jedan prost broj p , $\frac{2}{3}n < p \leq n$ nije djelitelj od $\binom{2n}{n}$.

Dokaz. Za $n = 3$ i $n = 4$ lema se direktno provjeri. Za $n > 4$ zaključujemo ovako. Zbog $\frac{2}{3}n < p \leq n$ slijedi $\frac{2n}{p} < 3$, $\frac{n}{p} \geq 1$. Stoga $\left[\frac{2n}{p} \right] \leq 2$, $\left[\frac{n}{p} \right] \geq 1$, pa je $\left[\frac{2n}{p} \right] - 2 \left[\frac{n}{p} \right] = 0$ (jer za sve $x \in \mathbf{R}$, $[2x] - 2[x] \geq 0$). Za $n > 4$ i $k > 1$ imamo

tada $p^k > \frac{4}{9}n^2 \Rightarrow \frac{2n}{p^k} < \frac{9}{2n} < 1$, pa je $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$ za $n > 4$ i $k > 1$. Stoga je $\text{ord}_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 0$, pa $\binom{2n}{n}$ nije djeljiv sa p . ■

LEMA 6. Ako je p prost i $n < p < 2n$, onda je $\text{ord}_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 1$.

Dokaz. Iz $n < p < 2n$ slijedi $1 < \frac{2n}{p} < 2$, $\frac{n}{p} < 1$, pa je $\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor = 1$, $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 0$. Za $k \geq 2$ je $\frac{2n}{p^k} \leq \frac{2n}{p^2} < \frac{2}{n}$, pa je za $n > 1$, $\frac{2n}{p^k} < 1$, a odatle $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor = 0$, pa stoga naravno i $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$. Dakle, $\text{ord}_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 1$. Za $n = 1$ tvrdnja je očita. ■

LEMA 7. Za sve prirodne brojeve $n \geq 14$, $\pi(n) \leq \frac{1}{2}n - 1$.

Dokaz. $\pi(14) = 6 = \frac{14}{2} - 1$. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 15$. U nizu $1, 2, \dots, n$, parni brojevi $2, 4, 6, \dots, 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ su složeni i njih ima $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$. Za $n \geq 15$, u nizu $1, 2, \dots, n$ ima neparnih brojeva koji nisu prosti, npr. $1, 9, 15$. Stoga je

$$\pi(n) \leq n - \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 + 3 \right) = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2 < \frac{n}{2} - 1. \blacksquare$$

LEMA 8. Označimo sa R_n produkt prostih brojeva p , za koje je $n < p \leq 2n$. U slučaju da nema takvih prostih brojeva, stavimo $R_n = 1$. Tada vrijedi

$$R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)\sqrt{n/2}}, \text{ za sve } n \geq 98.$$

Dokaz. Iz definicije od R_n odmah slijedi da $R_n \mid \binom{2n}{n}$. Stoga je $\binom{2n}{n} = Q_n R_n$, gdje je $Q_n \in \mathbb{N}$. Prema Lemi 6, u kanonskoj faktorizaciji od Q_n , nema prostih brojeva p , $n < p \leq 2n$. Stoga je svaki prosti djelitelj p od Q_n najviše jednak n , pa zbog Leme 5, on mora biti $\leq \frac{2}{3}n$.

Produkt svih različitih prostih brojeva p , takvih da $p \mid Q_n$ tada je najviše jednak produktu svih prostih brojeva, svaki $\leq \frac{2}{3}n$, pa je po Lemi 2 to najviše $4^{2n/3}$. Iz Leme 3 i $Q_n \mid \binom{2n}{n}$ slijedi da je $\text{ord}_p(Q_n) > 1$ samo u slučaju $p < \sqrt{2n}$. Broj takvih prostih brojeva je prema Lemi 7 (pri čemu ulogu od n igra $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$; ta supstitucija je u redu jer $n \geq 98 \Rightarrow \sqrt{2n} \geq 14$) manji od $\sqrt{2n}/2$. Prema Lemi 4 produkt potencija svih prostih brojeva koji se javljaju u kanonskoj faktorizaciji od

$\binom{2n}{n}$ je $< (2n)^{\sqrt{2n}/2}$. Istu nejednakost dobivamo, naravno, za produkt potencija prostih brojeva koji se javljaju u kanonskoj faktorizaciji broja Q_n . Stoga je $Q_n < 4^{2n/3}(2n)^{\sqrt{2n}/2}$. No zbog $\binom{2n}{n} = Q_n R_n$ i zbog Leme 1 dobivamo $Q_n R_n > 4^n / 2\sqrt{n}$, pa odavde slijedi nejednakost u Lemi 8. ■

LEMA 9. Za $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 8$ vrijedi $2^k > 18(k+1)$.

Dokaz. $2^8 = 256 > 18 \cdot 9$. Ako je $2^k > 18(k+1)$, onda je $2^{k+1} = 2^k + 2^k > 18k + 18 + 18k + 18 > 18k + 36 = 18(k+2)$, pa je induktivni dokaz gotov. ■

LEMA 10. Za $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 8$ vrijedi $2^x > 18x$.

Dokaz. Za $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 8$ imamo $\lfloor x \rfloor \geq 8$, pa iz Leme 9 slijedi $2^x \geq 2^{\lfloor x \rfloor} > 18(\lfloor x \rfloor + 1) > 18x$, pa slijedi tvrdnja. ■

LEMA 11. Za $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 6$ vrijedi $2^k > 6(k+1)$.

Dokaz. Zbog Leme 9 dovoljno je dokazati Lemu 11 samo za $k = 6$ i $k = 7$. Ta se dva slučaja lako provjere. ■

LEMA 12. Za $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 6$ vrijedi $2^x > 6x$.

Dokaz je analogan dokazu Leme 10. ■

LEMA 13. Za $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 648$ vrijedi $R_n > 2n$.

Dokaz. Zbog Leme 8 dovoljno je dokazati $n \geq 648 \Rightarrow 4^{n/3} > 4n\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n}/2}$. Da to napravimo, uočimo da $n \geq 648$ povlači $\sqrt{2n}/6 > 6$, pa iz Leme 12 slijedi $2^{\sqrt{2n}/6} > \sqrt{2n}$. Potenciranjem ovoga s eksponentom $\sqrt{2n}$ dobivamo $2^{n/3} > (2n)^{\sqrt{n}/2}$. Dalje, $n \geq 648$ povlači $2n/9 > 8$, pa Lema 10 povlači $2^{2n/9} > 4n$, pa odavde $2^{n/3} > 4n\sqrt{4n} > 4n\sqrt{n}$. Dakle, $n \geq 648$ povlači $4^{n/3} > 4n\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n}/2}$. ■

LEMA 14. Za $n \geq 648$, između n i $2n$ postoje bar dva različita prosta broja.

Dokaz. Iz definicije R_n (Lema 8) slijedi da kad bi postojao najviše jedan prost broj između n i $2n$, onda bi imali $R_n \leq 2n$, što je zbog $n \geq 648$ nemoguće prema Lemi 13. ■

TEOREM 3. Za $n \in \mathbf{N}$, $n > 5$ između n i $2n$ postoje bar dva različita prosta broja.

Dokaz. Za $n = 6$ teorem je očito točan, jer između 6 i 12 imamo dva prosta broja 7 i 11. Zbog Leme 14, dovoljno je provjeriti tvrdnju za $7 \leq n < 648$, što se može učiniti direktno iz tablice prostih brojeva. ■

KOROLAR 3. Za $k \in \mathbf{N}$, $k > 3$, vrijedi $p_{k+2} < 2p_k$.

Dokaz. Neka je $k > 3$. Tada je $p_k > p_3 = 5$. Prema prethodnom Teoremu između p_k i $2p_k$ postoje bar dva različita prosta broja. No najmanja dva takva prosta broja su p_{k+1} i p_{k+2} . Tada je $p_{k+2} < 2p_k$. ■

Iz ovog odmah slijedi

KOROLAR 4. $p_{k+1} < 2p_k$, za sve $k \in \mathbf{N}$. ■

TEOREM 4. Za $n > 1$ vrijedi

$$(i) \quad \frac{1}{12} \frac{n}{\log n} < \pi(n) < 4 \frac{n}{\log n};$$

$$(ii) \quad \frac{1}{4} n \log n < p_n < 36n \log n.$$

Dokaz. (i) Sa R_n smo označili produkt svih prostih brojeva p , takvih da je $n < p < 2n$ (usp. Lemu 8). Broj takvih prostih brojeva je $\pi(2n) - \pi(n)$ (po Čebiševljevom teoremu, za svako n postoji takav p) i svaki od njih je manji od $2n$. Stoga je $R_n \leq (2n)^{\pi(2n) - \pi(n)}$. Prema Lemi 8, za sve $n \geq 98$ imamo stoga

$$(2n)^{\pi(2n) - \pi(n)} > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)\sqrt{n/2}}.$$

Logaritmiranjem dobivamo da za $n \geq 98$ vrijedi

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{n}{3 \log 2n} \left(\log 4 - \frac{3 \log 4n}{2n} - \frac{3 \log 2n}{\sqrt{2n}} \right).$$

Koristeći činjenicu da je $\log x/x$ padajuća funkcija od x za $x > e$, lako se vidi da je za $n \geq 2500$ izraz u okrugloj zagradi > 1 . Tako dobivamo da vrijedi

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{n}{3 \log 2n} \quad (*)$$

ne samo za $n \geq 2500$, nego kao što se lako provjeri za sve $n > 1$. S druge strane, iz binomne formule slijedi $(1+1)^{2n} > \binom{2n}{n}$, pa zbog $R_n | \binom{2n}{n}$ dobivamo $R_n < 4^n$, a iz definicije od R_n da je $R_n > n^{\pi(2n) - \pi(n)}$, pa odavde $n^{\pi(2n) - \pi(n)} < 4^n$. Stoga $\pi(2n) - \pi(n) < \frac{n \log 4}{\log n} < \frac{7n}{5 \log n}$. Odavde i iz (*) slijedi

$$\frac{n}{3 \log 2n} < \pi(2n) - \pi(n) < \frac{7n}{5 \log n}, \quad n > 1. \quad (**)$$

Odavde slijedi da je $\pi(2n) > \frac{n}{3 \log 2n}$ za $n > 1$, pa kako je za $n \geq 4$, $n > n/2 \geq \lfloor n/2 \rfloor > n/2 - 1 \geq n/4$ i $\log(2 \lfloor n/2 \rfloor) \leq \log n$, to dobivamo

$$\pi(n) \geq \pi\left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) > \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{3 \log 2 \lfloor n/2 \rfloor} > \frac{n}{12 \log n},$$

što je lijeva strana od (i) za $n \geq 4$, a lako se provjeri za $n = 2$ i 3 .

Indukcijom po k , koristeći (**), lako se dokaže da za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\pi(2^k) < \frac{2^{k+1}}{k \log 2}.$$

Sada za $n > 1$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Odavde je $(k+1) \log 2 > \log n$. Iz prethodne nejednakosti slijedi tada

$$\pi(n) \leq \pi(2^{k+1}) < \frac{2^{k+2}}{(k+1) \log 2} < \frac{4n}{\log n}.$$

Time je (i) dokazano.

Za dokaz (ii), zamijenimo u (i) n sa p_n . Zbog $\pi(p_n) = n$ dobivamo

$$\frac{p_n}{12 \log p_n} < n < \frac{4p_n}{\log p_n}.$$

Zbog $p_n > n$ odavde slijedi

$$p_n > \frac{n}{4} \log p_n > \frac{n \log n}{4} \text{ i } p_n < 12n \log p_n.$$

Stoga je $\log p_n < \log 12 + \log n + \log \log p_n$. Zbog Korolara Čebiševljevog teorema $p_n < 2^n$ imamo $\log p_n < n \log 2$, pa stoga $\log \log p_n < \log n + \log \log 2$. Zbog $\log 2 < 1$, za $n \geq 12$ imamo $n > 12 \log 2$ i, stoga, $\log n > \log 12 + \log \log 2$. Dakle, za $n \geq 12$ dobivamo $\log p_n < 2 \log n + \log 12 + \log \log 2 < 3 \log n$. Prema tome, $p_n < 36n \log n$ za $n \geq 12$, ali se to lako provjeri i za $2 \leq n < 12$. Time je i (ii) dokazano. ■

Primjer 1. Dokažite da u kanonskom rastavu broja $n!$ ($n > 1$) postoji prost broj p koji dolazi s eksponentom 1, tj. $\text{ord}_p(n!) = 1$.

Rješenje. Tvrdnja je očito točna za $n = 2$ i $n = 3$, pa neka je $n > 3$. Neka je n paran, tj. $n = 2k$. Iz $n > 3$ slijedi $k > 1$. Prema Čebiševljevu teoremu postoji prost broj p , za koji je $k < p < 2k$. Odavde slijedi da je $p < n < 2p$. To onda znači da je p djelitelj samo jednog faktora u produktu $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (naime, faktora p).

Ako je, pak, $n = 2k + 1$, $k > 1$, onda opet prema Čebiševljevu teoremu postoji prost broj p , takav da je $k < p < 2k < n$, odakle je $k + 1 \leq p$. Stoga je $2k + 1 < 2p$ i $p < n < 2p$, pa tvrdnja slijedi kao i gore. ■

Primjer 2. Dokažite da za sve prirodne brojeve n, k , broj

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+k}$$

nije cijeli broj.

Rješenje. Pretpostavimo da je taj broj cijeli (točnije prirodan). Tada je $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+k} \geq 1$, pa zbog $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+k} < \frac{k+1}{n}$, slijedi $k+1 > n$ tj. $k \geq n$. Neka je p najveći prost broj $\leq n+k$. Tada je $2p > n+k$. Naime, prema Čebiševljevu teoremu, između p i $2p$ postoji prost broj q , pa bi $2p \leq n+k$ povlačilo $p < q < n+k$, suprotno

izboru broja p . Zbog $k \geq n$ imamo $n+k \geq 2n$, i opet prema Čebiševljevu teoremu, postoji prost broj r između n i $2n$. Stoga je $r < 2n \leq n+k$, a po definiciji od p slijedi $r \leq p$. Iz $n < r$ slijedi $n < p \leq n+k < 2p$. Stoga među pribrojanjima sume $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+k}$ postoji samo jedan kojega je nazivnik djeljiv prostim brojem p . Svedemo li ovu sumu na zajednički nazivnik $n(n+1)\dots(n+k)$, vidimo da su svi brojnici, osim jednog, djeljivi prostim brojem p , koji je i djeljitelj nazivnika. Odavde slijedi da navedena suma ne može biti cijeli broj. Posebno, parcijalne sume harmonijskog reda $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ nisu cijeli brojevi, osim trivijalne prve sume. ■

Primjer 3. Dokažite da za svako $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$, između n i $2n$ postoji broj koji je produkt dva različita prosta broja, a za $n > 15$ postoji broj između n i $2n$ koji je produkt tri različita prosta broja.

Rješenje. $n > 4$ je oblika $n = 2k$, $k > 2$ ili $2l+1$, $l > 1$, $k, l \in \mathbb{N}$. U prvom slučaju prema Čebiševljevu teoremu postoji prost broj p , takav da je $k < p < 2k$, i pri tome je $p > k > 2$, pa je $p > 2$. Odavde je $n = 2k < 2p < 4k = 2n$, pa je zbog $p > 2$, broj $2p$ produkt dva različita prosta broja i $n < 2p < 2n$. U drugom slučaju, $n = 2l+1$, $l \geq 2$, pa, opet prema istom teoremu, postoji prost broj p , $l < p < 2l$, odakle je $3 \leq l+1 \leq p < 2l$ i $n = 2l+1 < 2l+2 \leq 2p < 4l < 4l+2 = 2n$. Stoga je opet $2p$ traženi broj.

Neka je sada $n > 15$. Za $n = 16, 17, \dots, 29$, između n i $2n$ imamo broj $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Stoga uzмимо $n \geq 30$ i podijelimo ga sa 6, tj. $n = 6m + r$, $0 \leq r \leq 5$. Tada je $m \geq 5$. Prema Čebiševljevu teoremu, postoji prost broj p , tako da je $m < p < 2m$. Stoga je $p > 5$ i $m+1 \leq p < 2m$, pa je $n = 6m + r < 6(m+1) \leq 2 \cdot 3 \cdot p < 12m \leq 2n$, pa je $n < 2 \cdot 3 \cdot p < 2n$ i $2 \cdot 3 \cdot p$ je produkt tri različita prosta broja. ■

Vratimo se funkciji $\pi(x)$. Rekli smo da ćemo označiti sa $\pi(x)$ broj prostih brojeva između 1 i x . $\pi(x)$ nam, dakle kaže kako gusto su prosti brojevi "posijani" između 1 i x . Pogledajmo tablicu

	$x = 100$	$x = 1000$	$x = 1000000$
$\pi(x) =$ broj prostih $< x$	25	168	78498
postotak prostih	25%	16,8%	7,8%

Gauss i Legendre su željeli naći formulu za $\pi(x)$. Oko 1800. godine oni su primijetili da je $\pi(x)$ aproksimativno jednak $x/\ln x$, tj. da je $\pi(x) \approx x/\ln x$ to bolje što je x veći, što se može naslutiti već iz ove tablice

x	$\pi(x)$	$x/\ln x$	Greška u postocima
10^3	168	144,8	16%
10^6	78498	72382	8,4%
10^9	50847478	48254942	5,4%

Tada su formulirali čuvenu hipotezu o prostim brojevima:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \text{ tj. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

J. Hadamard⁹ je 1896 godine dokazao (a gotovo istovremeno i neovisno Ch. de la Vallée Poussin¹⁰) **teorem o prostim brojevima**:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pi(x) : \frac{x}{\ln x} \right) = 1.$$

Dokaz tog teorema je dosta složen i izlazi van okvira elementarne matematike. Napomenimo samo da se u dokazu koriste kompleksno-analiitička svojstva **Riemannove zeta funkcije**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Vežu zeta funkcije s prostim brojevima pronašao je Euler u vidu (formalnog) identiteta

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}.$$

Čuvena **Riemannova hipoteza** (1860) glasi da sve nultočke funkcije $\zeta(s)$ u traci $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ leže na pravcu $\operatorname{Re} s = 1/2$. Spomenimo da su 1948 godine Erdős i Selberg¹¹ pronašli "elementarni" dokaz teorema o prostim brojevima, no i taj dokaz je prilično zamršen i dugačak, pa ga nećemo ovdje provesti. I taj dokaz potvrđuje zakon o "sačuvanju teškoća" koji kaže da težak teorem ostaje težak, bez obzira na to kako mu pristupimo.

Napomenimo da je funkcija $\pi(x)$ u uskoj svezi s tzv. **integralnim logaritmom**

$$\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t},$$

u smislu da je

$$\pi(x) + \frac{1}{2} \pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3} \pi(\sqrt[3]{x}) + \dots \approx \operatorname{Li}(x),$$

a "invertiranjem" ove formule dobivamo

$$\pi(x) \approx \operatorname{Li}(x) - \frac{1}{2} \operatorname{Li}(\sqrt{x}) - \frac{1}{3} \operatorname{Li}(\sqrt[3]{x}) - \dots$$

⁹ Jacques Hadamard (1865 - 1963), francuski matematičar.

¹⁰ Charles de La Vallée Poussin (1866 - 1962), belgijski matematičar i fizičar.

¹¹ Atle Selberg (r. 1917), norveški matematičar.

§ 3. Kongruencije

Pojam kongruencije je uveo C. F. Gauss u svom čuvenom djelu "Disquisitiones Arithmeticae" iz 1801 godine.

Neka su $a, b \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$. Kažemo da je a kongruentno b modulo n i pišemo $a \equiv b \pmod{n}$ ako $n|a - b$. Katkad ćemo kraće pisati $a \equiv b \pmod{n}$. U daljem, neka je $n \in \mathbf{N}$ čvrst broj.

- PROPOZICIJA 1.** (1) $a \equiv a \pmod{n}$;
 (2) $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$;
 (3) $a \equiv b \pmod{n} \ \& \ b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$.

- Dokaz.** (1) $a - a = 0$ i $n|0$.
 (2) $n|a - b \Rightarrow n|b - a$.
 (3) $n|a - b \ \& \ n|b - c \Rightarrow n|a - c = (a - b) + (b - c)$. ■

Ovo pokazuje da je relacija $\equiv \pmod{n}$ relacija ekvivalencije na skupu \mathbf{Z} . Za $a \in \mathbf{Z}$, označimo sa \underline{a} skup svih cijelih brojeva kongruentnih a modulo n , tj.

$$\underline{a} = \{b \in \mathbf{Z} | a \equiv b \pmod{n}\}.$$

Drugim riječima \underline{a} je klasa ekvivalencije relacije $\equiv \pmod{n}$ kojoj pripada cijeli broj a . Drugačije zapisan, taj je skup

$$\underline{a} = \{a + kn | k \in \mathbf{Z}\} = a + n\mathbf{Z}.$$

Taj se skup zato i zove **klasa ostataka po modulo n** .

- PROPOZICIJA 2.** (1) $\underline{a} = \underline{b} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$;
 (2) $\underline{a} \neq \underline{b} \Leftrightarrow \underline{a} \cap \underline{b} = \emptyset$;
 (3) Postoji točno n klasa ostataka po modulo n .

Dokaz. (1) Ako je $\underline{b} = \underline{a}$, onda je $a \in \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$. Obratno, ako je $a \equiv b \pmod{n}$, onda je $a \in \underline{b}$. Ako je $c \in \underline{a}$, onda $c \equiv a \pmod{n} \Rightarrow c \equiv b \pmod{n}$, pa je $c \in \underline{b}$, tj. pokazali smo $\underline{a} \subseteq \underline{b}$. Zbog $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$ slijedi $\underline{b} \subseteq \underline{a}$. Dakle $\underline{a} = \underline{b}$.

(2) Neka je $\underline{a} \cap \underline{b} \neq \emptyset$. Neka je $c \in \underline{a} \cap \underline{b}$. Tada je $c \equiv a \pmod{n} \ \& \ c \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{n} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \underline{a} = \underline{b}$.

(3) Pokažimo da su $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{n-1}$ međusobno različiti i da čine sve moguće klase ostataka modulo n . Njih očito ima n . Neka je $0 \leq k < l < n$. Tada $k \neq l$ povlači $k \not\equiv l \pmod{n}$, tj. $n \nmid k - l$. Zbog $0 < l - k < n$, to je nemoguće. Dakle, $\underline{k} \neq \underline{l}$. Neka je sada $a \in \mathbf{Z}$. Tada (prema Lemi o dijeljenju) postoje cijeli brojevi q i r takvi da je $a = qn + r$, $0 \leq r < n$. Stoga je $a \equiv r \pmod{n}$, pa je $\underline{a} = \underline{r}$. ■

Skup svih klasa ekvivalencije, tj. kvocijentni skup po relaciji ekvivalencije $\equiv \pmod{n}$ se označava sa $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Dakle

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \{\underline{0}, \underline{1}, \dots, \underline{n-1}\}.$$

Neka su $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \dots, \underline{a_n}$ sve klase ekvivalencije po modulu n . Tada se svaki takav skup $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}$ zove **potpun sistem ostataka po modulu n** .

Na primjer, $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{4, 9, 14, -1\}$, $\{0, 1, -2, -1\}$, $\{8, 13, 82, 63\}$ čine potpun sistem ostataka po modulu 4.

U kvocijentni skup $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se na prirodan način mogu uvesti operacije zbrajanja i množenja, i to zahvaljujući narednoj Propoziciji.

PROPOZICIJA 3. (1) $a \equiv c \pmod{n}$ & $b \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a + b \equiv c + d \pmod{n}$,
(2) $a \equiv c \pmod{n}$ & $b \equiv d \pmod{n} \Rightarrow ab \equiv cd \pmod{n}$.

Dokaz. (1) $n|c - a$ & $n|d - b \Rightarrow n|(c - a) + (d - b) = (c + d) - (a + b)$.

Dakle, $a + b \equiv c + d \pmod{n}$.

(2) Zbog $cd - ab = c(d - b) + b(c - a)$ slijedi da $n|cd - ab$, tj. $ab \equiv cd \pmod{n}$. ■

Neka su $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dvije klase ekvivalencije. Tada definiramo zbrajanje i množenje klasa ovako:

$$\underline{a} + \underline{b} := \underline{a + b} \text{ i } \underline{a} \cdot \underline{b} := \underline{ab}.$$

Na prvi pogled bi se moglo učiniti da rezultati ovih operacija ovise o a i b . Pokažimo, međutim, da rezultati ovise samo o klasama ostataka određenih sa a i b . Zaista, pretpostavimo da je $\underline{c} = \underline{a}$ i $\underline{d} = \underline{b}$. Pokažimo da je tada $\underline{a + b} = \underline{c + d}$ i $\underline{ab} = \underline{cd}$. Zbog prethodnih dviju Propozicija, imamo ovaj niz zaključaka:

$$\underline{a} = \underline{c} \text{ & } \underline{b} = \underline{d} \Leftrightarrow a \equiv c \pmod{n} \text{ & } b \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a + b \equiv c + d \pmod{n} \Leftrightarrow \underline{a + b} = \underline{c + d}.$$

Slično zaključujemo za produkt.

Na taj način skup $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ s tim operacijama zbrajanja i množenja postaje prsten (provjerite to!). Na primjer, u $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ imamo ove tablice (crtice ispod brojeva su ispuštene)

Zbrajanje				Množenje			
+	0	1	2	·	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0
1	1	2	0	1	0	1	2
2	2	0	1	2	0	2	1

Skraćivanje kod kongruencija općenito ne vrijedi, nego vrijedi

PROPOZICIJA 4. Neka su $d, n \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi. Tada vrijedi $ad \equiv bd \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$.

Dokaz prepuštamo čitatelju.

Primjer 1. a) Neka je $(a_n a_{n-1} \dots a_0)_{10}$ dekadski zapis prirodnog broja a . Dokažite ova pravila djeljivosti sa 9, odnosno s 11:

$$a \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{9} \quad \text{i} \quad a \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n \pmod{11}.$$

b) Koristeći a), provjerite da li je ovaj račun točan $54321 \cdot 98765 = 5363013565$.

Rješenje. a) Iz definicije dekadskog sustava imamo

$$\begin{aligned} a - (a_0 + a_1 + \dots + a_n) &= (a_0 + 10a_1 + \dots + 10^n a_n) - (a_0 + a_1 + \dots + a_n) = \\ &= (10^1 - 1)a_1 + \dots + (10^n - 1)a_n. \end{aligned}$$

Kako je za svako $k \in \mathbf{N}$, $10^k - 1 = (99 \dots 9)_{10} = 9 \cdot (11 \dots 1)_{10}$, slijedi da 9 dijeli $a - (a_0 + a_1 + \dots + a_n)$, što smo i htjeli. Slično se dokazuje i druga tvrdnja u a).

b) Označimo $S(a) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Iz a) slijedi $S(a) \equiv a \pmod{9}$. Iz Propozicije 3(2), imamo da je $S(a)S(b) \equiv ab \pmod{9}$. Stoga, ako je $ab = c$, onda bi bilo $S(a)S(b) \equiv S(c) \pmod{9}$. U našem je slučaju $S(54321) = 15$, $S(98765) = 35$, $S(5363013565) = 37$, te $S(15) = 6$, $S(35) = 8$, $S(37) = 10$. Kako $6 \cdot 8 \not\equiv 10 \pmod{9}$, slijedi da $15 \cdot 35 \not\equiv 37 \pmod{9}$, pa stoga $54321 \cdot 98765 \not\equiv 5363013565 \pmod{9}$ i zato navedeni račun nije točan. ■

Primjer 2. Neka je $p(x) \in \mathbf{Z}[x]$ polinom s cijelim koeficijentima. Ako je $a \equiv b \pmod{n}$, onda je $p(a) \equiv p(b) \pmod{n}$. Nadalje, ako su $p(0)$, $p(1)$ oba neparna, onda $p(x)$ nema cjelobrojnih korijena.

Rješenje. $a \equiv b \pmod{n}$ povlači $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$, $a^3 \equiv b^3 \pmod{n}$ i općenito $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ što slijedi iz Propozicije 3 (2). Stoga slijedi opet iz Propozicije 3 da je $p(a) \equiv p(b) \pmod{n}$. Npr., za $n = 2$, $a \in \mathbf{Z}$ je kongruentno 0 ili 1 (mod 2), pa je $p(a) \equiv p(0) \pmod{2}$ ili $p(a) \equiv p(1) \pmod{2}$. Ako je $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, onda je $p(0) = a_n$, $p(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Stoga dobivamo ovaj rezultat: za $p(x) \in \mathbf{Z}[x]$, ako su oba broja $p(0)$ i $p(1)$ neparna, onda $p(x)$ nema cjelobrojnih nultočaka. Npr., polinom $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 3$ nema cjelobrojnih nultočaka. ■

Primjer 3. Nadite posljednje dvije cifre broja 9^{9^9} .

Rješenje. Vrijede sljedeće kongruencije modulo 100:

$$9^2 \equiv 81, \quad 9^4 \equiv 81^2 \equiv 61, \quad 9^8 \equiv 61^2 \equiv 21, \quad 9^9 \equiv 21 \cdot 9 \equiv 89, \quad 9^{10} \equiv 89 \cdot 9 \equiv 1.$$

Stoga je $9^9 \equiv 9 \pmod{10}$, pa je $9^9 \equiv 10k + 9$ za neko $k \in \mathbf{N}$. Tada, budući je $9^{10} \equiv 1 \pmod{100}$, slijedi da je $9^{9^9} \equiv 9^{10k+9} \equiv 9^9 \equiv 89 \pmod{100}$. Dakle, posljednje dvije cifre traženog broja su 89.

Dokažite da i broj $9^{9^{9^9}}$ ima posljednje dvije cifre 89. ■

3.1. Kongruencija $ax \equiv b \pmod{n}$.

Rješenje kongruencije $ax \equiv b \pmod{n}$ je svaki cijeli broj x koji je zadovoljava. Ako je x neko rješenje ove kongruencije, a $x \equiv x' \pmod{n}$, onda je i x' rješenje (provjerite to). Dva rješenja x, x' smatramo **ekvivalentnim**, ako je $x \equiv x' \pmod{n}$. **Broj rješenja** te kongruencije je broj neekvivalentnih rješenja. Slično se definira i rješenje bilo koje **kongruencije** oblika $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{n}$, gdje je $f(x_1, \dots, x_k)$ polinom od k varijabli s cijelim koeficijentima.

Vratimo se kongruenciji $ax \equiv b \pmod{n}$. Neka je $d = M(a, n)$ najveća zajednička mjera od a i n . Označimo $a' = a/d$, $n' = n/d$. Tada su a' i n' relativno prosti.

PROPOZICIJA 5. Kongruencija $ax \equiv b \pmod{n}$ ima rješenje ako i samo ako $d|b$. Ako $d|b$, onda imamo točno d rješenja. Ako je x_0 jedno rješenje, onda su $x_0 + n', x_0 + 2n', \dots, x_0 + (d-1)n'$ sva rješenja.

Dokaz. Neka je x_0 neko rješenje. Tada postoji $y_0 \in \mathbf{Z}$ tako da je $ax_0 - b = ny_0$, tj. $ax_0 - ny_0 = b$. Zbog $d|ax_0 - ny_0$ slijedi $d|b$. Obratno, neka $d|b$. Tada znamo da postoje $x'_0, y'_0 \in \mathbf{Z}$ takvi da je $ax'_0 - ny'_0 = d$. Stavimo $c = b/d$ i pomnožimo zadnju jednakost sa c . Dobivamo $a(x'_0c) - n(y'_0c) = b$. Stavimo li $x_0 = x'_0c$, slijedi

$ax_0 \equiv b \pmod{n}$. Tako smo pokazali da $ax \equiv b \pmod{n}$ ima rješenje ako i samo ako $d|b$.

Neka su x_0, x_1 dva rješenja, tj. $ax_0 \equiv b \pmod{n}$, $ax_1 \equiv b \pmod{n}$. Tada je $a(x_1 - x_0) \equiv 0 \pmod{n}$, pa imamo da $n|a(x_1 - x_0)$, te stoga $n'|a'(x_1 - x_0)$, odakle slijedi $n'|x_1 - x_0$, tj. $x_1 = x_0 + kn'$ za neko cijelo k . Odmah se vidi da je svaki broj oblika $x_0 + kn'$ rješenje i da su rješenja $x_0, x_0 + n', \dots, x_0 + (d-1)n'$ neekvivalentna. Neka je $x_1 = x_0 + kn'$ bilo koje rješenje. Tada postoje $r, s \in \mathbb{Z}$ takvi da je $k = rd + s$, $0 \leq s < d$. Stoga je $x_1 = x_0 + sn' + rn$, pa je x_1 ekvivalentno sa $x_0 + sn'$. ■

Primjer 4. Riješite kongruenciju $6x \equiv 3 \pmod{15}$.

Rješenje. Prvo rješavamo $6x - 15y = 3$. Dijeljenjem s 3, dobivamo $2x - 5y = 1$. Brojevi $x = 3, y = 1$ su rješenja. Dakle, $x_0 = 3$ je rješenje naše kongruencije $6x \equiv 3 \pmod{15}$. Tu je $n = 15, d = 3$, pa je $n' = 5$. Stoga su tri neekvivalentna rješenja $x \equiv 3 \pmod{15}, x \equiv 8 \pmod{15}$ i $x \equiv 13 \pmod{15}$. ■

KOROLAR 1. Ako su a i n relativno prosti, onda kongruencija $ax \equiv b \pmod{n}$ ima jedinstveno rješenje.

Dokaz. U ovom slučaju je $d = 1, d|b$, pa kongruencija ima $d = 1$ rješenja. ■

KOROLAR 2. Ako je p prost broj, $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, onda kongruencija $ax \equiv b \pmod{p}$ ima jedno jedino rješenje.

Dokaz. Slijedi odmah iz prethodnog korolara. ■

Kongruenciju $ax \equiv b \pmod{n}$ možemo interpretirati kao jednadžbu $\underline{a} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ u prstenu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Element $\underline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ je **invertibilan** (ili **jedinica**) u prstenu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ako dijeli jedinični element, tj. ako postoji $\underline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ takav da je $\underline{a} \cdot \underline{x} = \underline{1}$, tj. ako i samo ako je rješiva kongruencija $ax \equiv 1 \pmod{n}$. $ax \equiv 1 \pmod{n}$ je rješiva ako i samo ako $d|1$, tj. ako i samo ako je $M(a, n) = 1$. Dakle, \underline{a} je jedinica u prstenu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ako i samo ako je $M(a, n) = 1$. Prema tome u $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ima $\varphi(n)$ jedinica.

Ako je p prost broj i $\underline{0} \neq \underline{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, onda je $M(a, p) = 1$, pa je svaki ne-nul element iz $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jedinica. Stoga je $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ polje.

Ako je n složen broj, onda je $n = n_1 n_2, 0 < n_1, n_2 < n$, pa je $\underline{n_1} \neq \underline{0}, \underline{n_2} \neq \underline{0}$, ali $\underline{n_1} \cdot \underline{n_2} = \underline{n_1 n_2} = \underline{n} = \underline{0}$, pa $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nije polje. Odavde slijedi

PROPOZICIJA 6. Element $\underline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ je jedinica ako i samo ako je $M(a, n) = 1$. U prstenu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ima $\varphi(n)$ jedinica. Prsten $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ je polje ako i samo ako je n prost broj. ■

Nadalje, vrijedi ova opća algebarska lema.

LEMA 1. (1) U svakom komutativnom prstenu R s jediničnim elementom, skup $U(R)$ svih jedinica čini multiplikativnu grupu;

(2) Ako je G konačna (multiplikativna) grupa, onda je $a^{|G|} = 1, \forall a \in G$.

Dokaz. (1) Neka su $a_1, a_2 \in U(R)$. Tada postoje $x_1, x_2 \in R$ takvi da je $a_1 x_1 = 1, a_2 x_2 = 1$. No tada je $a_1 a_2 (x_1 x_2) = (a_1 x_1)(a_2 x_2) = 1 \cdot 1 = 1$, pa je

$a_1 a_2 \in U(R)$. Isto tako, ako je $a \in U(R)$, onda je $ax = 1$ za neko $x \in R$, pa je $x = a^{-1}$ i $a^{-1}x^{-1} = 1$, pa stoga $a^{-1} \in U(R)$.

(2) Neka je q najmanji prirodan broj za koji je $a^q = 1$. Tada je podgrupa $\langle a \rangle$ generirana sa a reda q . Red podgrupe dijeli red (konačne) grupe (to je Lagrangeov teorem), pa je $|G| = kq$ za neko $k \in \mathbb{N}$. Tada je $a^{|G|} = a^{kq} = (a^q)^k = 1^k = 1$. ■

KOROLAR 3 (Eulerov teorem). *Ako je $M(a, n) = 1$, onda je*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Dokaz. Grupa jedinica $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ prstena $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ima red $\varphi(n)$. Kako je $M(a, n) = 1$, to je $\underline{a} \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Stoga je $\underline{a}^{\varphi(n)} = \underline{1}$, tj. $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. ■

KOROLAR 4 ("mali Fermatov teorem", 1640). *Ako je p prost broj i $p \nmid a$, onda je $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Dokaz. Kako $p \nmid a$, to je $M(a, p) = 1$. Stoga je $a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$. Ako je p prost broj, onda je $\varphi(p) = p - 1$, pa slijedi tvrdnja. ■

KOROLAR 5. *Za svako $a \in \mathbb{Z}$ i p prost vrijedi $a^p \equiv a \pmod{p}$.*

Dokaz. Ako je $M(a, p) = 1$, naprosto pomnožimo kongruenciju iz prethodnog Korolara sa a . Ako pak $p|a$, onda je $a^p \equiv 0 \equiv a \pmod{p}$. ■

Primjer 5. Odredite ostatak pri dijeljenju broja $2^{70} + 3^{70}$ s brojem 13.

Rješenje. Iz malog Fermatovog teorema imamo da je $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, a odavde $2^{60} \equiv 1 \pmod{13}$. Iz $2^5 \equiv 6 \pmod{13}$ slijedi $2^{10} \equiv -3 \pmod{13}$, pa je $2^{70} \equiv -3 \pmod{13}$. S druge strane iz $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ slijedi $3^{69} \equiv 1 \pmod{13}$, a odavde $3^{70} \equiv 3 \pmod{13}$. Prema tome je $2^{70} + 3^{70} \equiv -3 + 3 \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13}$, tj. traženi ostatak je 0, pa $13|2^{70} + 3^{70}$. ■

Primjer 6. Nađite sve proste brojeve p , takve da $p|2^p + 1$.

Rješenje. Jedini takav broj je $p = 3$. Naime, ako je p prost broj, onda iz malog Fermatovog teorema slijedi da $p|2^p - 2$, pa zbog $p|2^p + 1$ slijedi da p dijeli i njihovu razliku, tj. $p|3$. ■

Primjer 7. Dokažite da za svaki prirodan broj s postoji prirodan broj n čija je suma cifara u dekadskom sustavu jednaka s i koji je djeljiv brojem s .

Rješenje. Broj s možemo zapisati u obliku $s = 2^k \cdot 5^l \cdot t$, gdje su $k, l \in \mathbb{Z}$, $k, l \geq 0$, a prirodni broj t nije djeljiv ni sa 2 ni sa 5. Prema Eulerovom teoremu je $10^{\varphi(t)} \equiv 1 \pmod{t}$. Neka je

$$n = 10^{k+l} \cdot (10^{\varphi(t)} + 10^{2\varphi(t)} + \dots + 10^{s\varphi(t)}).$$

Broj n je djeljiv brojem s , jer $2^k \cdot 5^l | 10^{k+l}$, a vrijedi i da je $10^{\varphi(t)} + 10^{2\varphi(t)} + \dots + 10^{s\varphi(t)} \equiv s \equiv 0 \pmod{t}$, budući da $t|s$.

S druge strane, jasno je da je suma cifara broja n (u dekadskom sustavu) jednaka s . ■

Primjer 8. a) Dokažite da $n \nmid 2^n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 1$;

b) Dokažite da $n|2^n + 1$ za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n .

Rješenje. a) Pretpostavimo da $n|2^n - 1$, za neki $n > 1$. Neka je p najmanji prosti djeljitelj od n , a $d > 1$ najmanji prirodni broj tako da $p|2^d - 1$. Podijelimo n sa d , tj. napišimo $n = kd + r$, $0 \leq r < d$. Tada $2^n - 1 = 2^{kd+r} - 1$. Iz $p|2^d - 1$ imamo

$2^d \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 2^n - 1 \equiv 2^r - 1 \pmod{p}$, pa $p|2^n - 1 \Rightarrow p|2^r - 1$, suprotno izboru od d . Stoga mora biti $r = 0$, pa $d|n$. Mali Fermatov teorem povlači $p|2^{p-1} - 1$ (jer je $p > 2$). Zbog izbora od d slijedi $d \leq p - 1$, što povlači $1 < d < p$, a to je suprotno izboru prostog broja p .

b) Provjerite da tvrdnju zadovoljavaju brojevi $n = 3^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ ■

Primjer 9. Da li je $2^{3^2} + 1$ prost broj? (Fermat je smatrao da je $2^{2^2} + 1$ prost jer je znao da su $2^1 + 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5$, $2^4 + 1 = 17$, $2^8 + 1 = 257$, $2^{16} + 1 = 65537$ prosti).

Rješenje. Stavimo $a = 3$ u Fermatov teorem. Pretpostavimo da je $2^{3^2} + 1 = 4\,294\,967\,297$ prost broj. Tada bi imali $3^{2^{3^2}} \equiv 1 \pmod{2^{3^2} + 1}$, ako je $2^{3^2} + 1$ prost broj. Valjanost ove relacije je moguće "ručno" ispitati, ako startamo sa brojem 3 kvadrirajući ga 32 puta i zadržavajući samo ostatak modulo $2^{3^2} + 1$. Prvo imamo $3^2 = 9$, pa $3^{2^2} = 81$, $3^{2^3} = 6561$ itd. dok ne dođemo do

$$3^{2^{3^2}} \equiv 3029026160 \pmod{2^{3^2} + 1}.$$

Budući da rezultat nije 1, slijedi da $2^{3^2} + 1$ nije prost broj. Ova metoda ne daje načina da nađemo faktore toga broja (oni su 641 i 6700417), nego samo dokazuje da faktori postoje. (Da to nije prost broj i da je djeljiv sa 641 prvi je dokazao Euler.) Danas se ne zna ima li beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $2^N + 1$, $N \in \mathbb{N}$. Ustvari, ako bi N imao neparni divizor $k > 1$, onda je $N = kl$, pa $2^l + 1 | (2^k)^l + 1 = 2^N + 1$ i stoga je $2^N + 1$ složen. Prema tome, ako je $2^N + 1$ prost, onda N mora biti oblika $N = 2^n$, za neko $n \geq 0$. Prosti brojevi oblika $2^{2^n} + 1$ zovu se **Fermatovi prosti brojevi**. ■

Primjer 10. Riješite kongruenciju $6x \equiv 2 \pmod{10}$.

Rješenje. Jednadžba se može pisati kao $6x = 10y + 2$ za neko $y \in \mathbb{Z}$. Jedno rješenje je $x = 7$, $y = 4$. Nađimo ostala rješenja.

$$\left. \begin{array}{l} 6 \cdot 7 = 10 \cdot 4 + 2 \\ 6 \cdot x = 10 \cdot y + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 6(x - 7) = 10(y - 4),$$

tj. $x - 7 = \frac{5}{3}(y - 4)$. Stoga mora biti $y \equiv 1 \pmod{3}$, tj. $y_k = 3k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Za svaki takav y_k dobivamo jedno rješenje $6x_k = 10(3k + 1) + 2 = 30k + 12$, pa je $x_k = 5k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$, tj. $x \equiv 2 \pmod{5}$. ■

Primjer 11. Riješite kongruenciju $111x \equiv 75 \pmod{321}$.

Rješenje. $M(111, 321) = 3$, te $3|75$. Stoga kongruencija ima 3 rješenja. Podijelimo kongruenciju sa 3, dobijemo ekvivalentnu kongruenciju $37x \equiv 25 \pmod{107}$. Iz Eulerovog teorema $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ slijedi $ba^{\varphi(n)} \equiv b \pmod{n}$. U našem slučaju je $25 \cdot 37^{\varphi(107)} \equiv 25 \pmod{107}$, tj. $25 \cdot 37^{106} \equiv 25 \pmod{107}$, pa je $37 \cdot 25 \cdot 37^{105} \equiv 25 \pmod{107}$. Da nađemo jedno rješenje, odredimo $25 \cdot 37^{105} \pmod{107} = 25 \cdot 37^{3 \cdot 5 \cdot 7} \pmod{107}$. Imamo redom $37^3 \equiv 42 \pmod{107} \Rightarrow 37^{3 \cdot 5} \equiv 42^5 \equiv 41 \pmod{107} \Rightarrow 37^{3 \cdot 5 \cdot 7} \equiv 41^7 \equiv 81 \pmod{107} \Rightarrow 25 \cdot 81 \equiv 99 \pmod{107}$. Dakle, jedno rješenje je $x \equiv 99 \pmod{107}$. Prema tome sva rješenja su $x \equiv 99; 99 + 107; 99 + 2 \cdot 107 \pmod{321}$, tj. $x \equiv 99 \pmod{321}$, $x \equiv 206 \pmod{321}$, $x \equiv 313 \pmod{321}$. ■

Primjer 12. Dokazite da za neparne n vrijedi $n|2^n - 1$.

Rješenje. Kao prvo, uočimo da za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\varphi(n)|n!$, gdje je, Eulerova funkcija. To je naprosto zbog toga što je $\varphi(n) \leq n$.

Ako je n neparan broj, onda prema Eulerovom teoremu imamo $n|2^{\varphi(n)} - 1$, pa dakle $n|2^{n!} - 1$. ■

Primjer 13. (Liouvilleov¹² teorem) Ako je $p > 5$ prost broj, onda je $(p-1)! + 1 \neq p^k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Pretpostavimo da je za neko $k \in \mathbb{N}$, $(p-1)! + 1 = p^k$. Kako je $p > 5$ prost broj, to je $2 < \frac{p-1}{2} < p-1$, odakle slijedi $(p-1)^2 = 2 \cdot \frac{p-1}{2} (p-1)!$. Odavde i iz naše pretpostavke dobivamo tada $(p-1)^2 | p^k - 1$. Podijelimo li ovo s $p-1$, slijedi $p-1 | p^{k-1} + p^{k-2} + \dots + p + 1$. No, $p-1 | p^n - 1, n = 0, 1, 2, \dots$. Odavde slijedi da je $p^{k-1} + p^{k-2} + \dots + p + 1 \equiv k \pmod{p-1}$. Stoga $p-1 | k$. To povlači $k \geq p-1 \Rightarrow p^k \geq p^{p-1} > (p-1)^{p-1} > (p-1)!$, tj. $p^k > (p-1)!$, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom.

Na osnovu svih dosadašnjih rezultata navedimo sada algoritam za rješavanje kongruencije $ax \equiv b \pmod{n}$. Kao što znamo, dovoljno je promotriti slučaj $M(a, n) = 1$. Iz Eulerova teorema znamo da je tada $x \equiv ba^{\varphi(n)-1} \pmod{n}$. Tako smo i postupili u rješenju Primjera 11 i dobili rješenje u obliku $x \equiv x_0 \pmod{n}$, gdje je $0 \leq x_0 < n$.

Neka su sada $q_i, i = 1, 2, \dots, k$ svi kvocijenti iz Euklidova algoritma pri nalaženju $M(a, n)$, tj. podijelimo n sa a i napišimo to u obliku

$$\frac{n}{a} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_k}}}} \quad (*)$$

Definirajmo sada nizove P_i, Q_i na sljedeći način.

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & P_1 &= q_1, & P_i &= q_1 P_{i-1} + P_{i-2}; \\ Q_0 &= 0, & Q_1 &= 1, & Q_i &= q_i Q_{i-1} + Q_{i-2}. \end{aligned}$$

Drugim riječima, gledamo tzv. konvergente verižnog (neprekidnog) razlomka (*), tj. izraze

$$\frac{P_1}{Q_1} = q_1, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \dots, \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}, \quad \frac{P_k}{Q_k} = \frac{n}{a}.$$

Tada je rješenje kongruencije $ax \equiv b \pmod{n}$ dano sa

$$x \equiv (-1)^{k-1} P_{k-1} b \pmod{n}.$$

Tako se kongruencija $111x \equiv 75 \pmod{321}$ iz Primjera 11, zbog $M(111, 321) = 3$ svodi na rješavanje kongruencije $37x \equiv 25 \pmod{107}$. Ispišimo samo kvocijente Euklidova algoritma:

$$\begin{aligned} 107 &: 37 = 2 \dots \\ 37 &: 33 = 1 \dots \\ 33 &: 4 = 8 \dots \\ 4 &: 1 = 4 \dots \end{aligned}$$

¹² Joseph Liouville (1809 - 1882), francuski matematičar.

te formiramo tablicu

q_i		2	1	8	4
P_i	1	2	3	26	107

Tu je $k = 4$, $P_{k-1} = 26$, $b = 25$, pa je $x \equiv -26 \cdot 25 \equiv 99 \pmod{107}$. Stoga su sva rješenja kongruencije $111x \equiv 75 \pmod{321}$ (kao i prije) dana sa $x \equiv 99, 206, 313 \pmod{321}$.

Osnovni teorem o sustavu linearnih kongruencija je naredni "kineski teorem o ostacima". Starokineski matematičari su se služili njime za predviđanje zajedničkog perioda nekoliko astronomskih ciklusa. Za dokaz tog teorema trebamo prvo dvije leme.

LEMA 2. *Ako su $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ i $M(a_i, n) = 1$, $i = 1, 2, \dots, l$, onda je i $M(a_1 a_2 \dots a_l, n) = 1$.*

Dokaz I. Kako je $M(a_i, n) = 1$, to je $\underline{a_i} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ jedinica u $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Stoga je i $\underline{a_1 a_2 \dots a_l} = \underline{a_1} \underline{a_2} \dots \underline{a_l}$ jedinica. Znamo da je $\underline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ jedinica ako i samo ako je $M(a, n) = 1$. Stoga je $a_1 a_2 \dots a_l$ relativno prost sa n .

Dokaz II. Kad $a_1 a_2 \dots a_l$ ne bi bio relativno prost sa n , postojao bi prost broj p koji ih oba dijeli. Zbog $p | a_1 a_2 \dots a_l$ slijedi $p | a_i$ za neko i . Tada je $M(a_i, n) \neq 1$, suprotno pretpostavci. ■

LEMA 3. *Pretpostavimo da brojevi a_1, a_2, \dots, a_t dijele n , te da je $M(a_i, a_j) = 1$ za $i \neq j$. Tada $a_1 a_2 \dots a_t$ dijeli n .*

Dokaz. Indukcijom po t . Za $t = 1$ nemamo što dokazivati. Neka je $t > 1$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $t - 1$. Tada $a_1 a_2 \dots a_{t-1} | n$. Lema 2 povlači da je a_t relativno prost sa $a_1 a_2 \dots a_{t-1}$. Stoga postoje $r, s \in \mathbb{Z}$, tako da je $ra_t + sa_1 a_2 \dots a_{t-1} = 1$. Pomnožimo li ovu jednakost sa n , vidimo da je lijeva strana djeljiva sa $a_1 a_2 \dots a_t$, pa je stoga i desna strana. Time je induktivni dokaz gotov. ■

TEOREM 1 ("Kineski teorem o ostacima", Sun Tsu, 350. g.). *Neka su $n_1, n_2, \dots, n_t \in \mathbb{N}$, $n = n_1 n_2 \dots n_t$ i $M(n_i, n_j) = 1$, za $i \neq j$. Neka su $b_1, b_2, \dots, b_t \in \mathbb{Z}$. Tada sustav kongruencija*

$$x \equiv b_1 (\cdot n_1), \quad x \equiv b_2 (\cdot n_2), \dots, \quad x \equiv b_t (\cdot n_t)$$

ima rješenje i svaka dva rješenja se razlikuju za višekratnik od n .

Dokaz. Neka je $m_i = n/n_i$. Prema Lemi 2, $M(n_i, m_i) = 1$. Zato postoje $r_i, s_i \in \mathbb{Z}$ takvi da je $r_i n_i + s_i m_i = 1$. Neka je $e_i = s_i m_i$. Tada je $e_i \equiv 1 \pmod{n_i}$, $e_i \equiv 0 \pmod{n_j}$ za $i \neq j$. Stavimo

$$x_0 = b_1 e_1 + \dots + b_t e_t = \sum_{i=1}^t b_i e_i.$$

Tada je $x_0 \equiv b_i e_i \pmod{n_i}$, pa je $x_0 \equiv b_i \pmod{n_i}$, pa je x_0 rješenje sustava.

Neka je x_1 neko drugo rješenje. Tada je $x_1 - x_0 \equiv 0 \pmod{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, t$. Tada svi brojevi n_1, n_2, \dots, n_t dijele $x_1 - x_0$. Prema Lemi 3 tada i broj $n = n_1 n_2 \dots n_t$ dijeli $x_1 - x_0$. ■

Katkad se kineski teorem o ostacima formulira tako da uz iste uvjete kao u teoremu postoje cijeli brojevi x_1, \dots, x_t tako da je

$$n_1 x_1 + b_1 = n_2 x_2 + b_2 = \dots = n_t x_t + b_t.$$

Primjer 14. Riješite sustav $x \equiv b_1 \pmod{4}$, $x \equiv b_2 \pmod{5}$, $x \equiv b_3 \pmod{7}$.

Rješenje. Ovdje je $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 7$, pa je $n = 4 \cdot 5 \cdot 7 = 35 \cdot 4 = 28 \cdot 5 = 20 \cdot 7$. Stoga je $m_1 = 35$, $m_2 = 28$, $m_3 = 20$. Sada treba naći s_1, s_2, s_3 , tako da je $35s_1 \equiv 1 \pmod{4}$, $28s_2 \equiv 1 \pmod{5}$, $20s_3 \equiv 1 \pmod{7}$. No $35s_1 \equiv (8 \cdot 4 + 3)s_1 \equiv 3s_1 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow s_1 \equiv 3 \pmod{4}$ i slično $s_2 \equiv 2 \pmod{5}$, $s_3 \equiv 6 \pmod{7}$. Tada je $e_1 = 3 \cdot 35 = 105$, $e_2 = 2 \cdot 28 = 56$, $e_3 = 6 \cdot 20 = 120$, pa je $x_0 = 105b_1 + 56b_2 + 120b_3$. Zato je skup svih rješenja dan sa

$$x \equiv 105b_1 + 56b_2 + 120b_3 \pmod{140}.$$

Tako, npr., sustav $x \equiv 3 \pmod{4}$, $x \equiv 2 \pmod{5}$, $x \equiv 6 \pmod{7}$ ima za skup rješenja $x \equiv 105 \cdot 3 + 56 \cdot 2 + 120 \cdot 6 \equiv 27 \pmod{140}$. ■

Iz kineskog teorema sada odmah slijedi

KOROLAR 6. Sustav kongruencija

$$x \equiv b_1 \pmod{n_1}, \quad x \equiv b_2 \pmod{n_2}, \dots, \quad x \equiv b_t \pmod{n_t}$$

ima rješenje ako i samo ako $M(n_i, n_j) | b_i - b_j$, za sve i, j , $i \neq j$. U tom se slučaju svaka dva rješenja razlikuju za višekratnik broja $v(n_1, n_2, \dots, n_t)$, gdje je $v(n_1, n_2, \dots, n_t)$ najmanji zajednički višekratnik brojeva n_1, n_2, \dots, n_t . ■

Iz dokaza kineskog teorema slijedi, dakle, ovaj algoritam za rješavanje sustava kongruencija $x \equiv b_1 \pmod{n_1}, \dots, x \equiv b_t \pmod{n_t}$, $M(n_i, n_j) = 1$ za $i \neq j$. Uz oznake (malo sugestivnije nego u dokazu) $N = n_1 n_2 \dots n_t$, $M_i = N/n_i$, prvo riješimo kongruencije $M_i M'_i \equiv 1 \pmod{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, t$ (tj. nađimo bilo koja rješenja M'_1, M'_2, \dots, M'_t). Stavimo nadalje

$$x_0 = M_1 M'_1 b_1 + M_2 M'_2 b_2 + \dots + M_t M'_t b_t.$$

Tada je skup svih rješenja dan sa $x \equiv x_0 \pmod{N}$.

Prvotni problem u drevnoj Kini glasio je ovako. Koji je to broj koji podijeljen sa 3 daje ostatak 2, podijeljen sa 5 daje ostatak 3, podijeljen sa 7 daje ostatak 2? Taj problem je ekvivalentan problemu rješavanja sustava kongruencija

$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x \equiv 3 \pmod{5}, \quad x \equiv 2 \pmod{7}.$$

Kako je $v(3, 5, 7) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, lako se vidi da je rješenje tog sustava $x \equiv 23 \pmod{105}$.

Primjer 15. Dokažite da svaki rastući aritmetički niz u skupu N ima po volji dugački segment čiji su svi članovi složeni brojevi.

Rješenje. Svaki takav aritmetički niz je oblika $a + kd$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Neka je $N > 1$ neki prirodan broj i odaberimo proste brojeve p_i , $i = 1, 2, \dots, N$ tako da je $d < p_1 < p_2 < \dots < p_N$.

Iz kineskog teorema o ostacima slijedi da postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $dx \equiv -a - dj \pmod{p_j^2}$, za $j = 1, 2, \dots, N$. Prema tome $p_j^2 | a + (x + j)d$ za $j = 1, 2, \dots, N$. Stoga N uzastopnih članova $a + (x + j)d$, $j = 1, 2, \dots, N$, čine složene brojeve. ■

3.2. Kongruencije višeg stupnja

Sada ćemo podrobnije proučiti kongruencije tipa $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$; gdje je $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom stupnja ≥ 1 .

Primjer 16. Riješite kongruenciju $x^4 - 3x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$.

Rješenje. Moramo naći koji od brojeva 0, 1, 2, 3, 4 zadovoljavaju ovu kongruenciju. Uvrstimo li 0, vidimo da je ne zadovoljava, a 1 zadovoljava. Lako se vidi da 2 nije rješenje. Za broj 3 postupimo ovako $3^4 - 3 \cdot 3 + 2 \equiv 3 - 3 \cdot 3 + 2 \equiv -4 \equiv 1 \pmod{5}$, pa 3 nije rješenje. Za broj 4, uočimo $4 \equiv -1 \pmod{5}$, pa je $4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1 \pmod{5}$ i zato $4^4 - 3 \cdot 4 + 2 \equiv 1 - 3 \cdot 4 + 2 \equiv -9 \equiv 1 \pmod{5}$. Stoga je $x \equiv 1 \pmod{5}$ jedino rješenje, tj. svi brojevi oblika $5k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

PROPOZICIJA 7. Neka je p prost broj, a $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Kongruencija

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{p} \quad (*)$$

je ekvivalentna kongruenciji stupnja najviše $p - 1$.

Dokaz. Podijelimo polinom $f(x)$ sa $x^p - x$. Dobivamo

$$f(x) = (x^p - x)q(x) + r(x),$$

gdje je $\text{st } r(x) \leq p - 1$. Kako je $x^p - x \equiv 0 \pmod{p}$ (Fermatov teorem), to je $f(x) \equiv r(x) \pmod{p}$, a odavde slijedi tvrdnja. ■

PROPOZICIJA 8. Ako kongruencija (*) ima više od n rješenja, onda su joj svi koeficijenti višekratnici od p .

Dokaz. Neka (*) ima barem $n + 1$ rješenja $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ (u stvari ostaci mod p). Napišimo tada $f(x)$ u obliku

$$\begin{aligned} f(x) &= b_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n) + \\ &+ b_1(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) + \\ &+ b_2(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-2}) + \\ &+ \dots \\ &+ b_{n-1}(x - x_1) + \\ &+ b_n. \end{aligned}$$

Da se to učini, izvršimo sva naznačena množenja, tj. riješimo se zagrada. Tada je $b_0 = a_0$, pa odaberemo b_1 , tako da suma koeficijenata od x^{n-1} u prva dva sumanda

bude jednaka a_1 . Nakon toga odaberemo b_2 tako da suma koeficijenata kod x_{n-2} prva tri sumanda bude jednak a_2 itd. Stavimo li tu redom $x = x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, dobivamo da su svi koeficijenti $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ djeljivi s p . Stoga su i koeficijenti a_0, a_1, \dots, a_n djeljivi s p kao suma brojeva djeljivih s p . ■

→ **TEOREM 2 (Wilson¹³).** *Prirodni broj $p > 1$ je prost ako i samo ako je*

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Dokaz. Dovoljnost. Ako $p > 1$ nije prost, onda ima prost divizor q koji se javlja kao faktor u $(p-1)!$, pa stoga $(p-1)! \not\equiv -1 \pmod{p}$, jer bi inače bilo i $(p-1)! \equiv -1 \pmod{q}$, što nije, jer je tada $(p-1)! \equiv 0 \pmod{q}$.

Nužnost. Ako je $p = 2$, tvrdnja je trivijalna. Ako je $p > 2$, promotrimo kongruenciju

$$(x-1)(x-2) \cdots (x-(p-1)) - (x^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ta kongruencija je stupnja $\leq p-2$, a ima $p-1$ rješenja $1, 2, \dots, p-1$ (zbog Fermatovog teorema). Iz prethodne Propozicije slijedi da su joj svi koeficijenti djeljivi s p , pa stoga i slobodni koeficijent, iz čega slijedi tvrdnja. ■

Wilsonov teorem je samo teorijski rezultat, jer ne može poslužiti kao efikasan test za određivanje da li je dani broj prost. Wilsonov teorem i činjenica da za $p > 2$ vrijedi $(p-1)! = (p-2)!(p-1) \equiv -(p-2)! \pmod{p}$ povlače odmah

KOROLAR 7 (Leibniz). *Prirodni broj $p > 1$ je prost ako i samo ako je $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$.* ■

Primjer 17. Za prost broj p i svako $a \in \mathbb{Z}$ vrijedi $p|a^p + (p-1)a$. Dokažite.

Rješenje. Prema Wilsonovom teoremu je $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, pa je $a^p + (p-1)a \equiv a^p - a \pmod{p}$, a prema Korolaru 5 je $a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$. Odatle odmah slijedi tvrdnja. ■

Primjer 18. Neka je $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ (tj. f je polinom s cijelim koeficijentima)

stupnja $n \geq 1$. Dokažite da kongruencija $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ ima rješenje za beskonačno mnogo prostih brojeva p .

Rješenje. Ako je slobodni član $a_0 = 0$, onda je $f(0) = 0$, pa kongruencija $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ ima rješenje za svako p . Stoga pretpostavimo $a_0 \neq 0$. Kako je $f(a_0 x) = a_0 f_1(x)$, gdje je $f_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$ čiji je slobodni član 1, to je tvrdnju dovoljno dokazati za takve polinome.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ bilo koji broj. Očito $n!|f_1(n!) - 1$, pa je $f_1(n!) = nk + 1$ za neko $k \in \mathbb{Z}$. Apsolutna vrijednost polinoma $f(x)$ (stupnja ≥ 1) je za dovoljno veliki x strogo rastuća funkcija. Stoga je za dovoljno veliki n , $|f_1(n!)| = |nk + 1| > 1$ i broj $n!k + 1$ ima prost djelitelj p . Iz $p|n!k + 1$ slijedi $p > n$, a iz $p|f_1(n!)$ slijedi da kongruencija $f_1(x) \equiv 0 \pmod{p}$ ima rješenje za neki prost broj (vidi izbor tog broja!) $p > n$. No, $n \in \mathbb{N}$ je proizvoljan dovoljno velik broj, te stoga i $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ ima rješenje za beskonačno mnogo prostih brojeva p . ■

¹³ John Wilson (1741 - 1793), engleski matematičar. Zapravo je taj teorem dokazao njegov učitelj; Edward Waring (1734 - 1798), također engleski matematičar.

Primjer 19. Koliko različitih rješenja ima kongruencija $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$? (Podsjetimo da rješenja x i x' smatramo istim, ako je $x \equiv x' \pmod{n}$.)

Rješenje. Prvo pogledajmo slučaj da je $n = p^k$, p prost, $k > 0$. Tada $x^2 \equiv 1 \pmod{p^k} \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0 \pmod{p^k}$. Stoga p dijeli $x-1$ i $x+1$ ili oba. No, p ne može dijeliti $x-1$ i $x+1$ osim za $p=2$. Promotrimo prvo slučaj $p > 2$. Tada $p^k | (x-1)(x+1) \Leftrightarrow p^k | x-1$ ili $p^k | x+1$, pa, prema tome, imamo točno dva rješenja $x \equiv +1$, $x \equiv -1 \pmod{p^k}$.

Slučaj $p=2$ je malo drukčiji. Ako $2^k | (x-1)(x+1)$, onda je ili $x-1$ ili $x+1$ djeljiv sa 2, ali ne sa 4, pa onaj drugi mora biti djeljiv sa 2^{k-1} . To znači da imamo četiri rješenja za $k > 3$; naime $x \equiv \pm 1$ i $x \equiv 2^{k-1} \pm 1$ (npr. za $p^k=8$, rješenja su $x \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod{8}$); često je korisno znati da je kvadrat neparnog broja $8r+1$.

Neka je sada $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ kanonski zapis od n . Tada je očito

$$x^2 \equiv 1 \pmod{n} \Leftrightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{p_i^{a_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Svaki prost broj p_i je relativno prost s ostalima, pa imamo točno dva rješenja za svaki $x \pmod{p_i^{a_i}}$, osim kada je $p_i=2$. Prema tome ako imamo točno k različitih prostih divizora od n , onda je broj rješenja od $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$ jednak 2^k , ako je k neparan. Ako je n paran, imamo malu korekciju; pa je tražen broj $2^{k+\delta}$, gdje je $\delta \in \{-1, 0, 1\}$. $\delta = -1$, za $8 \nmid n$, $4 \nmid n$, $2 \nmid n$, $\delta = 0$ za $8 \nmid n$, $4 \mid n$, $2 \mid n$, te $\delta = 1$, za $8 \mid n$, $4 \mid n$, $2 \mid n$. Npr., za $n=12$, imamo četiri "kvadratna korijena iz jedinice modulo 12"; to su $1, 5, 7, 11 \pmod{12}$, a za $n=24$, to su $1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \pmod{24}$. ■

Sada ćemo opisati kako se, u principu, rješavaju kongruencije tipa $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$, gdje je $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Napišimo prvo n u kanonskom obliku $n = p_1^{a_1} \dots p_t^{a_t}$. Ako za neko i , $1 \leq i \leq t$, kongruencija $f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{a_i}}$ nema rješenja, onda očito ni $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ nema rješenja. Pretpostavimo sada da za svako j , $1 \leq j \leq t$, imamo rješenja kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{p_j^{a_j}}$ i neka su to $x_1^j, x_2^j, \dots, x_{r_j}^j$. Točnije rečeno, neka je $R_j = \{x_1^j, \dots, x_{r_j}^j\}$ potpun sistem ostataka skupa svih rješenja te kongruencije. Opišimo kako se pomoću $R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_t$ dobiju sva rješenja od $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$.

Označimo $n_j = n/p_j^{a_j}$. Brojevi n_1, \dots, n_t su relativno prosti pa postoje cijeli brojevi s_1, \dots, s_t tako da je $s_1 n_1 + \dots + s_t n_t = 1$ (te brojeve nađemo npr. Euklidovim algoritmom). Neka je $e_i = s_i n_i$. Tada je $e_j \equiv 0 \pmod{p_i^{a_i}}$ za $j \neq i$ te $e_j \equiv 1 \pmod{p_j^{a_j}}$. Tada su sva rješenja od $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ dana sa

$$x \equiv \sum_{i=1}^t e_i x_i^{a_i} \pmod{n}. \quad (*)$$

Sva su ta rješenja međusobno različita, ima ih $r_1 r_2 \dots r_t$ i zapravo čine potpun sistem ostataka skupa svih rješenja.

Doista. Označimo desnu stranu (*) sa u . Tada je $u \equiv x_i^{a_i} \pmod{p_i^{a_i}}$ za svako $i = 1, \dots, t$. Tada je $f(u) \equiv f(x_i^{a_i}) \equiv 0 \pmod{p_i^{a_i}}$ za $i = 1, \dots, t$. Odavde odmah slijedi $f(u) \equiv 0 \pmod{n}$. Dakle, svaki broj u tog oblika je rješenje kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$. Obrnuto, neka je $f(v) \equiv 0 \pmod{n}$. Tada slijedi da je $f(v) \equiv 0 \pmod{p_i^{a_i}}$, $i = 1, 2, \dots, t$. Kako su skupovi R_1, \dots, R_t potpuni sistemi ostataka

rješenja (R_i za modulo $p_i^{a_i}$, $i = 1, \dots, t$), slijedi da je $v \equiv x_i^{j_i} \pmod{p_i^{a_i}}$, za neko j_i . Zbog načina kako su izabrani e_i , tada imamo

$$v \equiv \sum_{i=1}^t e_i x_i^{j_i} \pmod{p_i^{a_i}},$$

za svako i . Stoga je

$$v \equiv \sum_{i=1}^t e_i x_i^{j_i} \pmod{n}.$$

Dakle i svako rješenje je oblika (*). Lako se pokazuje da su i međusobno različita.

Prema tome, kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ svode se na rješavanje kongruencija tipa $f(x) \equiv 0 \pmod{p^s}$, gdje je p prost broj, a $s \in \mathbf{N}$. Prvo imamo ovu lemu.

LEMA 4. $(x + vp^{s-1})^n \equiv x^n + nx^{n-1}vp^{s-1} \pmod{p^s}$, za svako $x, v \in \mathbf{Z}$, $n, s \in \mathbf{N}$, $s > 1$ i prost broj p .

Dokaz. Indukcijom po n . Za $n = 1$ obje strane kongruencije su jednake pa je baza indukcije istinita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbf{N}$. To znači da je $(x + vp^{s-1})^n = x^n + nx^{n-1}vp^{s-1} + qp^s$ za neko $q \in \mathbf{Z}$. No tada imamo $(x + vp^{s-1})^{n+1} = (x + vp^{s-1})(x^n + nx^{n-1}vp^{s-1} + qp^s) = x^{n+1} + (n+1)x^n vp^{s-1} + (nq + nx^{n-1}v^2 p^{s-2} + vp^{s-1}q)p^s \equiv x^{n+1} + (n+1)x^n p^{s-1} \pmod{p^s}$. ■

Neka je $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbf{Z}[x]$. Prema Lemi tada znamo da je

$$(x + vp^{s-1})^i \equiv x^i + ix^{i-1}vp^{s-1} \pmod{p^s}$$

za sve $i = 0, 1, \dots, n$, pa množenjem i -te kongruencije sa a_i i zbrajanjem po i dobivamo

$$\sum_{i=0}^n a_i (x + vp^{s-1})^i \equiv \sum_{i=0}^n a_i x^i + \left(\sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1} \right) vp^{s-1} \pmod{p^s}.$$

Znamo da je izraz u zagradi na desnoj strani derivacija $f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$. Tako smo dokazali

PROPOZICIJA 9. Za svaki polinom $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ i za sve $x, v \in \mathbf{Z}$, $s \in \mathbf{N}$, $s > 1$, i prost broj p vrijedi

$$f(x + vp^{s-1}) \equiv f(x) + f'(x)vp^{s-1} \pmod{p^s}. \quad \blacksquare$$

Sada konačno formulirajmo (i dokažimo) teorem kojim se problem rješavanja kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ svodi na rješavanje kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ i na rješavanje kongruencija prvog stupnja koje (barem u principu) znamo rješavati.

TEOREM 3. Neka je u rješenje kongruencije

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^{s-1}} \quad (\text{za } s > 1)$$

i neka je v rješenje kongruencije

$$f'(u)x \equiv -\frac{f(u)}{p^{s-1}} \pmod{p}.$$

Tada je $u + vp^{s-1}$ rješenje kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{p^s}$. Nadalje, svako rješenje kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{p^s}$ može se dobiti na taj način. Konačno, ako krećemo od različitih rješenja kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{s-1}}$ ili ako v uzimamo iz različitih rješenja kongruencije $f'(u)x \equiv -\frac{f(u)}{p^{s-1}} \pmod{p}$, dobit ćemo različita rješenja kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{p^s}$.

Dokaz. 1. Ako je $f(u) \equiv 0 \pmod{p^{s-1}}$, onda je $-\frac{f(u)}{p^{s-1}} \in \mathbf{Z}$, pa možemo tražiti $v \in \mathbf{Z}$ za koji je $f'(u)v \equiv -\frac{f(u)}{p^{s-1}} \pmod{p}$. Tada je očito $f(u) + f'(u)vp^{s-1} \equiv 0 \pmod{p^s}$. Prema gornjoj Propoziciji imamo $f(u + vp^{s-1}) \equiv f(u) + f'(u)vp^{s-1} \pmod{p^s}$, pa slijedi da je $f(u + vp^{s-1}) \equiv 0 \pmod{p^s}$, što znači da je $u + vp^{s-1}$ zaista rješenje kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{p^s}$.

2. Neka je w rješenje kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{p^s}$. Tada je očito i $f(w) \equiv 0 \pmod{p^{s-1}}$. Podijelimo w sa p^{s-1} i neka je $w = vp^{s-1} + u$, gdje je $v \in \mathbf{Z}$ kvocijent, a u ostatak. Tada je očito $f(u) \equiv 0 \pmod{p^{s-1}}$. Dalje je $f(u) + f'(u)vp^{s-1} \equiv f(w) \equiv 0 \pmod{p^s}$, pa kako je $f(u)$ djeljiv sa p^{s-1} slijedi $f'(u)v \equiv -\frac{f(u)}{p^{s-1}} \pmod{p}$. Time smo pokazali da se sva rješenja dobivaju na opisani način.

3. Ako je $u_1 + v_1p^{s-1} \equiv u_2 + v_2p^{s-1} \pmod{p^s}$, onda je $u_1 \equiv u_2 \pmod{p^{s-1}}$, čime smo pokazali da, krećući od različitih rješenja kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{s-1}}$, dolazimo do različitih rješenja kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{p^s}$. Ako je $u + v_1p^{s-1} \equiv u + v_2p^{s-1} \pmod{p^s}$, onda je $v_1 \equiv v_2 \pmod{p}$, što znači da krećući od različitih rješenja kongruencije $f'(u)x \equiv -\frac{f(u)}{p^{s-1}} \pmod{p}$, dolazimo do različitih rješenja kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{p^s}$. ■

Primjer 20. Riješite kongruenciju $f(x) = x^2 + x + 6 \equiv 0 \pmod{162}$.

Rješenje. Prvo je $162 = 2 \cdot 3^4$. Stoga treba riješiti $f(x) \equiv 0 \pmod{2}$ i $f(x) \equiv 0 \pmod{3^4}$. Da riješimo $f(x) \equiv 0 \pmod{2}$, izračunajmo $f(0)$ i $f(1)$. Dobivamo $f(0) \equiv 0 \pmod{2}$, $f(1) \equiv 0 \pmod{2}$. Dakle, $x \equiv 0 \pmod{2}$ i $x \equiv 1 \pmod{2}$ su rješenja kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{2}$. Riješimo sada kongruenciju $f(x) \equiv 0 \pmod{3^4}$. Treba nam $f'(x) = 2x + 1$. Računamo $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ i ustanovimo da su $x \equiv 0 \pmod{3}$ i $x \equiv 2 \pmod{3}$ sva rješenja kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{3}$. Kako je $f'(0) = 1$ i $f'(2) = 6$, riješimo kongruenciju $f'(0)x \equiv -\frac{f(0)}{3} \pmod{3}$. Njeno rješenje je $v \equiv 1 \pmod{3}$.

Stoga je $x = 0 + 3v \equiv 3 \pmod{3^2}$ rješenje kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{3^2}$. Analogno $f'(2) = 5$, $f(2) = 12$. Rješenje kongruencije $5x \equiv -\frac{12}{3} \pmod{3}$ je $v \equiv 1 \pmod{3}$, pa je

$x = 2 + 3v \equiv 5 \cdot 3^2$ drugo rješenje kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{3^2}$. Važno je da je skup $\{3, 5\} \subseteq \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ skup svih rješenja te kongruencije.

Dalje, $f(3) = 18$, $f'(3) = 7$. Rješenje kongruencije $7x \equiv -\frac{18}{3^2} \pmod{3}$ je $v \equiv 1 \pmod{3}$, pa je $x = 3 + 3^2v \equiv 12 \pmod{3^3}$ rješenje od $f(x) \equiv 0 \pmod{3^3}$.

$f(5) = 36$, $f'(5) = 11$. Rješenje od $11x \equiv -\frac{36}{3^2} \pmod{3}$ je $v \equiv 1 \pmod{3}$, pa je $x = 5 + 3^2v \equiv 14 \pmod{3^3}$ drugo rješenje od $f(x) \equiv 0 \pmod{3^3}$. Dakle, skup svih rješenja od $f(x) \equiv 0 \pmod{3^3}$ je $\{12, 14\} \subseteq \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$.

$f(12) = 162$, $f'(12) = 25$. Rješenje od $25x \equiv -\frac{162}{3^3} \pmod{3}$ je $v \equiv 0 \pmod{3}$, pa je $x = 12 + 0 \cdot 3^3 \equiv 12 \pmod{3^4}$ rješenje od $f(x) \equiv 0 \pmod{3^4}$. Dalje, $f(14) = 216$, $f'(14) = 29$, a rješenje od $29x \equiv -\frac{216}{3^3} \pmod{3}$ je $v \equiv 2 \pmod{3}$. Stoga je $x = 14 + 2 \cdot 3^3 \equiv 68 \pmod{3^4}$ drugo rješenje kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{3^4}$. Na taj smo način ustanovili da je skup svih rješenja kongruencije $f(x) \equiv 0 \pmod{3^4}$ jednak $\{12, 68\} \subseteq \mathbb{Z}/81\mathbb{Z}$, tj. $x \equiv 12 \pmod{3^4}$, $x \equiv 68 \pmod{3^4}$.

Za rješenje zadane kongruencije sada koristimo formulu (*). Pri tom je $t = 2$, $R_1 = \{x_1^1 = 0, x_1^2 = 1\}$, $R_2 = \{x_2^1 = 12, x_2^2 = 68\}$, $n_1 = 3^4 = 81$, $n_2 = 2$, $s_1 = 1$, $s_2 = -40$, $e_1 = 81$, $e_2 = -80$, pa je rješenje

$$x \equiv e_1 x_1^{s_1} + e_2 x_2^{s_2} \pmod{162}.$$

Prema tome, sva rješenja kongruencije $x^2 + x + 6 \equiv 0 \pmod{162}$ su:

$$x = 81 \cdot 0 - 80 \cdot 12 = -960 \equiv 12 \pmod{162},$$

$$x = 81 \cdot 0 - 80 \cdot 68 = -5440 \equiv 68 \pmod{162},$$

$$x = 81 \cdot 1 - 80 \cdot 12 = -879 \equiv 93 \pmod{162},$$

$$x = 81 \cdot 1 - 80 \cdot 68 = -5359 \equiv 149 \pmod{162}.$$

Iako je ovaj postupak relativno kompliciran, ipak ga je jednostavnije provesti nego izračunati $f(x)$ za 162 vrijednosti $x = 0, 1, 2, \dots, 161$. Njegova prednost je tim veća što je veći n . ■

§ 4. Diofantske jednadžbe

Mnogi problemi iz teorije brojeva mogu se svesti na ovaj opći problem: Zadan je polinom $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ jedne ili više varijabli. Ima li jednadžba $f = 0$ rješenja u cijelim brojevima i ako ima koja su? Posebne probleme te vrste razmatrao je već i starogrčki matematičar Diofant¹⁴, pa su po njemu te jednadžbe i dobile ime. **Diofantska jednadžba** je polinomska jednadžba oblika

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (*)$$

¹⁴Diofant iz Aleksandrije (oko 250. g.), grčki matematičar.

čiji su koeficijenti cijeli brojevi, i čija su rješenja također cijeli brojevi x_1, \dots, x_n . Najlakši slučaj takve jednadžbe u n varijabli je linearna diofantska jednadžba

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = m, \quad (1)$$

pri čemu su $a_1, a_2, \dots, a_n, m \in \mathbf{Z}$ dani brojevi.

TEOREM 1. *Diofantska jednadžba (1) ima cjelobrojno rješenje ako i samo ako $M(a_1, a_2, \dots, a_n) | m$.*

Za dokaz ovog teorema treba samo generalizirati metodu koju ćemo opisati u sljedećem teoremu u slučaju $n = 2$, tj. promatrati jednadžbu

$$ax + by = c. \quad (2)$$

TEOREM 2. (i) *Diofantska jednadžba $ax + by = c$, gdje su $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $a^2 + b^2 \neq 0$ ima cjelobrojna rješenja ako i samo ako $M(a, b) | c$.*

(ii) *Nadalje, ako su x_0, y_0 rješenja te jednadžbe, onda su sva rješenja oblika $x = x_0 + t(b/d)$, $y = y_0 - t(a/d)$, $t \in \mathbf{Z}$, gdje je $d = M(a, b)$.*

Dokaz. (i) Neka su x_0, y_0 rješenja te jednadžbe, tj. $ax_0 + by_0 = c$. Podijelimo li ovu jednakost sa d , dobivamo (uz $a' = a/d$, $b' = b/d$)

$$a'x_0 + b'y_0 = \frac{c}{d}. \quad (3)$$

Kako je lijeva strana cijeli broj, mora biti i desna, tj. slijedi $d | c$. Obratno, neka $d | c$, tj. $c = dc'$ za neko $c' \in \mathbf{Z}$. Uz gornje oznake našu jednadžbu možemo pisati u obliku

$$a'x + b'y = c'.$$

Kako je $M(a', b') = 1$, to postoje $x_0, y_0 \in \mathbf{Z}$ tako da je $a'x_0 + b'y_0 = 1$, pa je $a'(x_0c') + b'(y_0c') = c' \Rightarrow a(x_0c') + b(y_0c') = c$. Stoga su x_0c', y_0c' rješenja naše diofantske jednadžbe.

(ii) Neka je prvo $d = 1$, a (x_0, y_0) te (x, y) dva para rješenja od (2). Iz $ax_0 + by_0 = c$ i $ax + by = c$ slijedi oduzimanjem $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, a odavde, zbog $M(a, b) = 1$, slijedi $x \equiv x_0 \pmod{b}$, tj. $x = x_0 + bt$ za neki $t \in \mathbf{Z}$, pa uvrštavanjem u gornju jednakost slijedi $y = y_0 - at$. U općem slučaju ($d \neq 1$) primijeni se isti argument na jednadžbu $a'x + b'y = \frac{c}{d}$, $M(a', b') = 1$. ■

Na taj smo način apsolvirali slučaj $n = 2$. Napomenimo još jednom da nam Euklidov algoritam daje pravilo za rješavanje diofantske jednadžbe $a_1x_1 + a_2x_2 = d$, gdje je $d = M(a_1, a_2)$, a množenjem sa c/d dobivamo rješenje od (2). Za $n > 2$ ta se metoda može induktivno dalje produžiti koristeći jednakost

$$M(M(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n) = M(a_1, \dots, a_n).$$

Primjer 1. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $127x - 52y = -2$.

Rješenje. Euklidovim algoritmom dobivamo (uz $a = 127$, $b = 52$)

$$\begin{array}{rcl} 127 & = & 2 \cdot 52 + 23 \\ 52 & = & 2 \cdot 23 + 6 \\ 23 & = & 3 \cdot 6 + 5 \\ 6 & = & 1 \cdot 5 + \boxed{1} \end{array} \quad \text{tj.} \quad \begin{array}{l} a = 2 \cdot b + r_1 \\ b = 2 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 = 3 \cdot r_2 + r_3 \\ r_2 = 1 \cdot r_3 + \boxed{r_4} \end{array}$$

pa je $M(127, 52) = r_4 = 1$. Odavde sukcesivnim uvrštavanjem slijedi

$$\begin{aligned} r_4 &= r_2 - r_3 = b - 2r_1 - (r_1 - 3r_2) = b - 3r_1 + 3r_2 = b - 3r_1 + 3(b - 2r_1) = \\ &= 4b - 9r_1 = 4b - 9(a - 2b) = -9a + 22b, \end{aligned}$$

tj. $a(-9) + b \cdot 22 = 1$, pa je jedno rješenje diofantske jednadžbe $127x - 52y = 1$ dano sa $x_1 = -9$, $y_1 = -22$. Stoga je jedno rješenje polazne jednadžbe $x_0 = 18$, $y_0 = 44$. Sva rješenja su stoga $x = 18 - 52t$, $y = 44 + 127t$, $t \in \mathbb{Z}$. ■

Primjer 2. Riješite u cijelim brojevima jednadžbu $7x + 12y - 5z = 100$.

Rješenje. Tu je $a_1 = 7$, $a_2 = 12$, $a_3 = -5$, $m = 100$ iz (1), pa kako je $M(7, 12, -5) = 1|100$, ta jednadžba ima cjelobrojna rješenja. Drugim riječima, jednadžba $7x + 12y = 100 + 5z$ ima cjelobrojna rješenja (x, y) za svaki $z \in \mathbb{Z}$. Možemo staviti $z = v$, $v \in \mathbb{Z}$. Tako dobivamo jednadžbu $7x + 12y = 100 + 5v$ koju treba riješiti u x i y uz varijabilno v . Nađimo partikularno rješenje ove jednadžbe oblika $x_0 = a_1 + b_1v$, $y_0 = a_2 + b_2v$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$. Uvrštavanje daje $7(a_1 + b_1v) + 12(a_2 + b_2v) = 100 + 5v \Rightarrow 7a_1 + 12a_2 + (7b_1 + 12b_2)v = 100 + 5v \Rightarrow 7a_1 + 12a_2 = 100$, $7b_1 + 12b_2 = 5$. Primjenom Euklidovog algoritma dobivamo partikularna rješenja a_1^0, a_2^0 i b_1^0, b_2^0 ovih dviju jednadžbi $a_1^0 = -500$, $a_2^0 = 300$ i $b_1^0 = -1$, $b_2^0 = 1$. Opće rješenje prve jednadžbe je stoga $a_1 = -500 + 12t$, $a_2 = 300 - 7t$, $t \in \mathbb{Z}$ pa za $t = 41$ dobivamo "manje" partikularno rješenje $a_1^0 = -8$, $a_2^0 = 13$. Dakle, jedno partikularno rješenje jednadžbe $7x + 12y = 100 + 5v$ je $x_0 = -8 - v$, $y_0 = 13 + v$, a njeno opće rješenje je $x = -8 + 12u - v$, $y = 13 - 7u + v$. Opće rješenje polazne jednadžbe je stoga dano sa $x = -8 + 12u - v$, $y = 13 - 7u + v$, $z = v$, gdje su $u, v \in \mathbb{Z}$ bilo koji cijeli brojevi. ■

Na drugom svjetskom kongresu matematičara održanom 1900 g. u Parizu, David Hilbert je održao predavanje "Matematički problemi", na kojem je iznio 23 problema za koja je smatrao da bi njihova rješenja bitno pridonijela razvoju matematike u 20. stoljeću. Deseti među Hilbertovim problemima glasio je ovako. Postoji li sustavni postupak (algoritam) pomoću kojega se nakon konačno mnogo koraka za svaku diofantsku jednadžbu (*) može ustanoviti ima li ona (cjelobrojnih) rješenja ili ne? Tek 1970 g. Matijasevič¹⁵ je pokazao da takav algoritam ne postoji. Međutim postoje mnoge posebne metode kojima se provjeravaju slučajevi kada (*) nema rješenja. Jedna od najjednostavnijih je ova. Ako (*) ima cjelobrojno rješenje, onda za svaki prost broj p postoji rješenje kongruencije

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}. \quad (4)$$

Stoga, ako uspijemo naći prost broj p , za koji kongruencija (4) nema rješenja, onda niti (*) nema rješenja.

¹⁵ Jurij V. Matijasevič (r. 1947), ruski matematičar.

Uočite da obrat ne vrijedi, jer npr. jednadžba $4x+2=0$ očito nema cjelobrojnih rješenja, ali kongruencija $4x+2 \equiv 0 \pmod{p}$ ima rješenje za svaki prost broj p i za $p=2$, svaki $x \in \mathbf{Z}$ je rješenje, a ako je p neparan, $p=2k+1$, $k \in \mathbf{N}$, rješenje je $x=k$. Pogledajmo još neke primjere.

Primjer 3. Dokazite da kongruencija $6x^2+5x+1 \equiv 0 \pmod{n}$ ima rješenje za svako $n \in \mathbf{N}$, iako jednadžba $6x^2+5x+1=0$ nema cjelobrojnih rješenja.

Rješenje. Napišimo n u obliku $n=2^k \cdot n_1$, $k \geq 0$, n_1 neparan broj. Kako je $M(2^k, n_1)=1$, to postoji $x \in \mathbf{N}$ takav da je $3x \equiv -1 \pmod{2^k}$, $2x \equiv -1 \pmod{n_1}$, pa $n=2^k n_1 | (3x+1)(2x+1) = 6x^2+5x+1$, pa je $6x^2+5x+1 \equiv 0 \pmod{n}$. ■

Primjer 4. Dokazite da jednadžba $15x^2-7y^2=9$ nema rješenja u cijelim brojevima.

Rješenje. Promotrimo kongruenciju $15x^2-7y^2-9 \equiv 0 \pmod{5}$. Kako je $15 \equiv 0 \pmod{5}$, $-7 \equiv 3 \pmod{5}$, $-9 \equiv 1 \pmod{5}$, to je ova kongruencija ekvivalentna s $3y^2+1 \equiv 0 \pmod{5}$. Međutim, lako je provjeriti da nijedan od brojeva 0,1,2,3,4 ne zadovoljava ovu kongruenciju, pa ona nema rješenja, pa stoga ni polazna kongruencija. Zato ni jednadžba $15x^2-7y^2-9=0$ nema cjelobrojnih rješenja. ■

Katkad se pod diofantskim jednadžbama razumijevaju i općenitije jednadžbe od (*), gdje f ne mora biti polinom. Rješenje takve diofantske jednadžbe je opet n -torka cijelih (ili prirodnih) brojeva koja ju zadovoljava.

Primjer 5. Nađite sva rješenja diofantske jednadžbe $x!+y! = z!$.

Rješenje. Možemo pretpostaviti da je $x \leq y$, pa stoga $z > y$, tj. $z \geq y+1$, što povlači $z! \geq (y+1)!$. No, $z! = x!+y! \leq 2y!$, pa je $2y! \geq (y+1)! = y!(y+1)$, odakle slijedi $y+1 \leq 2$, tj. $y=1$. Odavde je $y=1$, pa stoga $x=1$ i $z=2$. Prema tome, jednadžba $x!+y! = z!$ ima jedinstveno rješenje $x=1$, $y=1$, $z=2$ u prirodnim brojevima. ■

Primjer 6. Nađite sva rješenja diofantske jednadžbe $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ u prirodnim brojevima x, y, z .

Rješenje. Jednadžba je ekvivalentna s $(x+y)z = xy$. Dakle $x+y | xy$. Stavimo $d = M(x, y)$. Tada je $x = dm$, $y = dn$, za neke $m, n \in \mathbf{N}$, pri čemu je $M(m, n) = 1$, pa je i $M(m+n, mn) = 1$. Odavde onda slijedi $m+n | d$, pa je $d = k(m+n)$, za neko $k \in \mathbf{N}$. Stoga je $x = dm = k(m+n)m$, $y = dn = k(m+n)n$, $z = xy/(x+y) = kmn$. Lako je provjeriti da su ovo zaista i rješenja, pa su to i sva rješenja. ■

Sada ćemo se malo baviti kvadratnim diofantskim jednadžbama. Jedna od najjednostavnijih i odavno poznatih takvih (homogenih) jednažbi je **Pitagorina jednadžba**

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad (\clubsuit)$$

jer ona predstavlja algebarski zapis Pitagorinog poučka. Ta jednadžba očito ima cjelobrojna rješenja, npr. $a=0$, $b=0$, $c=0$ (trivijalno rješenje), pa $a=3$, $b=4$, $c=5$, zatim $a=5$, $b=-12$, $c=13$ itd.

Positivna rješenja (a, b, c) nazivamo **Pitagorinim trojkama**. Neke Pitagorine trojke su $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$, $(5, 12, 13)$, $(9, 12, 15)$, $(12, 16, 20)$, $(51, 140, 149)$ itd. Očito poznavanjem neke Pitagorine trojke, množenjem s nekim brojem dobivamo nove trojke. Isto važi i za cjelobrojna rješenja (koje zovemo **cjelobrojne Pitagorine trojke**). Vrijedi

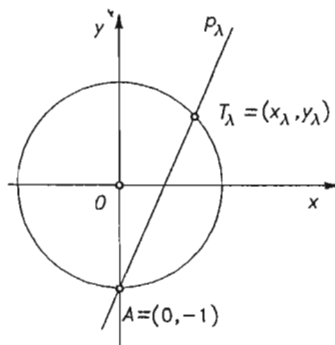
TEOREM 3 (Pitagora). Sva cjelobrojna rješenja (a, b, c) Pitagorine jednadžbe (\clubsuit) dana su sa $2mnt, (m^2 - n^2)t, (m^2 + n^2)t, m, n, t \in \mathbf{Z}$.

Dokaz. Da su ovo rješenja od (\clubsuit), lako se vidi neposrednim uvrštavanjem. Pokažimo sada da su to i *sva* rješenja. Ideja dokaza je geometrijska. Podijelimo (\clubsuit) sa c^2 . Označimo li $x = a/c$, $y = b/c$, dobivamo jednadžbu

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (1)$$

Tražimo, dakle, racionalna rješenja (x, y) jednadžbe (1). Svako racionalno rješenje (x, y) od (1) svođenjem na zajednički nazivnik $x = a/c$, $y = b/c$ daje cjelobrojnu Pitagorinu trojku (a, b, c) , pa time i beskonačno mnogo novih rješenja (ta, tb, tc) , $t \in \mathbf{Z}$.

Jednadžba (1) je jednadžba jedinične kružnice



Sl. 348.

Promotrimo pravac p_λ koji prolazi točkom $A = (0, -1)$ s koeficijentom smjera λ . Jednadžba tog pravca je

$$p_\lambda \dots y = \lambda x - 1. \quad (2)$$

Drugo sjecište tog pravca s jediničnom kružnicom je točka $T_\lambda = (x_\lambda, y_\lambda)$, čije koordinate dobivamo uvrštavanjem (2) u (1):

$$(\lambda^2 + 1)x^2 - 2\lambda x = 0, \quad (3)$$

odakle je

$$x_\lambda = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1}, \quad y_\lambda = \lambda x_\lambda - 1 = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}. \quad (4)$$

(Uvrštavanjem se odmah vidi da ovo jesu rješenja jednadžbe (1).)

Za racionalne λ , ta rješenja su očito racionalna. Obratno, ako je (x_0, y_0) racionalno rješenje od (1), a T_0 odgovarajuća točka na kružnici, onda je koeficijent smjera pravca kroz $(0, -1)$ i T_0 jednak $\lambda = (y_0 + 1)/x_0$ i očito je racionalan broj.

Prema tome, (x_0, y_0) je rješenje oblika (4). Dokazali smo, dakle, da su sva racionalna rješenja od (1) dana formulom (4) s racionalnim λ . Zapišemo li λ u

obliku razlomka $\lambda = m/n$, onda (4) postaje

$$x_\lambda = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \quad y_\lambda = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}. \quad (5)$$

Dakle, zaključujemo da su sve cjelobrojne Pitagorine trojke dane s $(2mnt, (m^2 - n^2)t, (m^2 + n^2)t)$, $m, n, t \in \mathbf{Z}$. ■

Za mnoge kvadratne diofantske jednačbe, a i one većeg stupnja, važnu ulogu ima pojam kvadratnog ostatka.

Neka je $M(a, n) = 1$. Broj a je kvadratni ostatak po modulu n , ako kongruencija $x^2 \equiv a \pmod{n}$ ima rješenje. Ako ova kongruencija nema rješenja, onda se a zove kvadratni neostatak po modulu n . Npr., 2 je kvadratni ostatak po modulu 7, a 3 nije, jer su $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ kongruentni redom $1, 4, 2, 2, 4, 1 \pmod{7}$.

Za prost broj $p > 2$, i $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, kongruencija $x^2 \equiv a \pmod{p}$ ima rješenje ako i samo ako je $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$. Općenito vrijedi ovaj

TEOREM 4. Neka je $n = 2^l p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_k^{l_k}$ kanonski rastav broja n , $M(a, n) = 1$. Tada $x^2 \equiv a \pmod{n}$ ima rješenje ako i samo ako vrijedi:

- (1) Ako je $l = 2$, onda je $a \equiv 1 \pmod{4}$, a za $l \geq 3$, $a \equiv 1 \pmod{8}$;
- (2) Za svako i je $a^{(p_i-1)/2} \equiv 1 \pmod{p_i}$.

Odavde se može izvesti ovaj

KOROLAR 1. $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ ima rješenje ako i samo ako je p oblika $4k + 1$.

Primjer 7. Dokažite da jednačba $y^2 = x^3 + 7$ nema cjelobrojnih rješenja.

Rješenje. Ako ima cjelobrojnih rješenja, onda x mora biti neparan, jer u protivnome redukcija modulo 4 daje da je 3 kvadratni ostatak po modulu 4, što nije. Zapišimo našu jednačbu u obliku

$$y^2 + 1 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = (x + 2)((x - 1)^2 + 3).$$

Broj $(x - 1)^2 + 3$ je tada oblika $4k + 3$, pa postoji prost broj p oblika $4k + 3$, $k \geq 0$ koji dijeli $(x - 1)^2 + 3$. Redukcija gornje jednačbe po modulu p povlači da je -1 kvadratni ostatak po modulu p , što je u kontradikciji s prethodnim Korolarom. ■

Primjer 8. Diofantska jednačba $x^2 - y^3 = (2t)^3 - 1$, $t \in \mathbf{N}$ neparan, nema rješenja. Dokažite to.

Rješenje. $x^2 + 1 = (2t)^3 + y^3 = (y + 2t)(y^2 - 2ty + 4t^2) = (y + 2t)[(y - t)^2 + 3t^2]$. Kako je $t^2 \equiv 1 \pmod{8}$, to je $3t^2 \equiv 3 \pmod{8}$. Ako je y neparan, onda je $y - t$ paran, a $(y - t)^2 + 3t^2$ je oblika $4k + 3$, pa ima prost djeljitelj tog oblika, pa ima i $x^2 + 1$, što je nemoguće. Ako je pak y paran, onda je $x^2 = (2t)^3 + y^3 - 1 \equiv -1 \pmod{8}$, što je nemoguće. ■

Jedan od velikih (donedavno?) neriješenih problema matematike je slijedeća slutnja, poznata pod nazivom "Veliki Fermatov teorem":

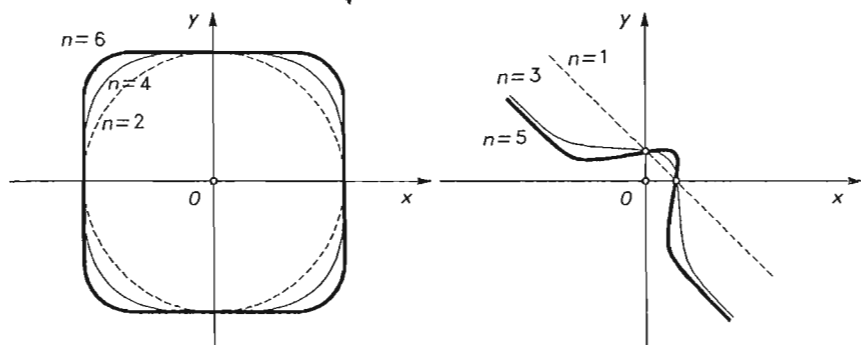
Jednadžba $x^n + y^n = z^n$, $n > 2$, nema cjelobrojnih rješenja, $xyz \neq 0^{16}$.

Nakon više od 350 godina bezuspješnih potraga za dokazom te slutnje, kao svjetska senzacija došla je u ljeto 1993. godine vijest da je "Veliki Fermatov teorem" dokazan. Međutim, kasnijom su analizom nađeni neki nedostaci u dokazu, pa je za sada teško o tome dati konačni sud.

Očito je da se taj problem svodi na nalaženje racionalnih rješenja jednadžbe

$$x^n + y^n = 1.$$

Krivulja \mathcal{F}_n s tom jednadžbom zove se **Fermatova krivulja** i ona je stupnja n , a pripada među tzv. eliptičke krivulje. Na slici su nacrtane neke Fermatove krivulje.



Sl. 349.

"Veliki Fermatov teorem" je stoga ekvivalentan s tvrdnjom da su na krivulji \mathcal{F}_n , $n > 2$, jedine točke s obje racionalne koordinate točke presjeka s koordinatnim osima. S tim je u vezi i čuvena **Mordellova**¹⁷ slutnja (1922): Na svakoj algebarskoj krivulji $\sum a_{ij} x^i y^j = 0$ ($a_{ij} \in \mathbf{Z}$) stupnja ≥ 4 postoji najviše konačno mnogo racionalnih točaka.

(Ovdje se izuzimaju degenerirane krivulje, kao npr., $x^2 + y^2 = 0$.)

Tu je slutnju dokazao njemački matematičar Gerd Faltings, koji je za to otkriće na Svjetskom kongresu matematičara 1986. godine dobio Fieldsovu medalju za matematiku (ekvivalent Nobelove nagrade). Navodno je i u ovom najnovijem pokušaju dokaza "Velikog Fermatovog teorema" osnovna ideja također geometrijske naravi i to u vezi s teorijom eliptičkih krivulja.

Mi ćemo sada dokazati "Veliki Fermatov teorem" za $n = 4$, jednom poznatom (i starom) metodom u matematici.

¹⁶ Čitajući oko 1640. godine Diofantovu knjigu "Aritmetica", Fermat je na margini knjige, zapisaó:

"... nemoguće je kub prikazati kao dva kuba, ili bikvadrat kao dva bikvadrata i općenito svaku potenciju osim kvadrata kao dvije potencije s istim eksponentom. Pronašao sam uistinu čudesan dokaz, ali mi to ne stane na marginu".

¹⁷ Louis J. Mordell (1888 - 1972), engleski matematičar.

TEOREM 5. *Jednadžba $x^4 + y^4 = z^2$ nema cjelobrojnih rješenja za koje je $xyz \neq 0$ i $z > 0$.*

Dokaz. Ideja je sljedeća (i zove se "metoda beskonačnog pada"). Pretpostavimo li da takvo rješenje postoji, konstruirat ćemo drugo rješenje s manjim z . (Ili ekvivalentno, ako uzmemo rješenje s najmanjim pozitivnim z konstruirat ćemo rješenje s manjim pozitivnim z).

To je, međutim, očito nemoguće, jer bi tako dobili beskonačan padajući niz prirodnih brojeva. Konstrukcija tog "manjeg" rješenja je sljedeća.

Pretpostavimo da je (x, y, z) rješenje naše jednadžbe, $z > 0$. Možemo pretpostaviti da je $M(x, y, z) = 1$ (jer skratimo s tom mjerom). Brojevi x, y ne mogu istovremeno biti neparni, jer bi u protivnome redukcija modulo 4 dovela do kongruencije $z^2 \equiv 2 \pmod{4}$, što je nemoguće. Neka je x neparan, y paran, pa stoga i z neparan. Napišimo $y^4 = (z - x^2)(z + x^2)$. Ako je p prost broj koji dijeli oba faktora na desnoj strani, onda $p|2z$ i $p|2x^2$. Zato mora biti $M(z - x^2, z + x^2) = 2$. No produkt ova dva faktora je četvrta potencija, pa stoga mora biti

$$\left\{ \begin{array}{l} z - x^2 = 2a^4, a > 0 \\ z + x^2 = 8b^4 \\ a \text{ neparan}, M(a, b) = 1 \end{array} \right\} \text{ ili } \left\{ \begin{array}{l} z - x^2 = 8b^4 \\ z + x^2 = 2a^4, a > 0 \\ a \text{ neparan}, M(a, b) = 1 \end{array} \right\}.$$

U prvom slučaju bismo imali $x^2 = -a^4 + 4b^4$, što je nemoguće, jer bi tada bilo $1 \equiv -1 \pmod{4}$. Stoga nastupa drugi slučaj. Tada dobivamo $z = a^4 + 4b^4$. Primijetimo da je $0 < a < z$. Eliminacijom z dobivamo $4b^4 = (a^2 - x)(a^2 + x)$. Kako je $M(a, b) = 1$, slijedi $M(a, x) = 1$, a istim zaključivanjem kao gore dobivamo da je $M(a^2 - x, a^2 + x) = 2$. Zapišemo li $a^2 - x = 2c^4$, $a^2 + x = 2d^4$, dobivamo $a^2 = c^4 + d^4$. Na taj smo način našli rješenje naše jednadžbe s manjim pozitivnim z , čime je dokaz završen. ■

KOROLAR 2. *Jednadžba $x^4 + y^4 = z^4$ nema cjelobrojnih rješenja, $xyz \neq 0$.* ■

Zanimljivo je da je slučaj $n = 4$ "Velikog Fermatovog teorema" jedini slučaj gdje je poznat relativno jednostavan elementarni dokaz. Već za $n = 3$ potrebno je razmatrati (kompleksne) brojeve oblika $a + b\sqrt{-3}$, $a, b \in \mathbf{Z}$, ali se time nećemo ovdje baviti. (Ustvari, za $n = 3$ poznat je elementarni, ali dosta zamršen dokaz.)

Umjesto toga dat ćemo jedan elementarni dokaz da diofantska jednadžba

$$x^p + y^p + z^p = 0 \quad (+)$$

nema cjelobrojnih rješenja x, y, z , za koja je $p \nmid xyz$, a $p > 2$ prost broj, za koji je $2p + 1 = q$ također prost broj. Taj je dokaz našla Sophie Germain¹⁸.

TEOREM 6 (S. Germain, 1823). *Neka je $p > 2$ prost broj za koji je $2p + 1 = q$ također prost broj. Tada jednadžba $x^p + y^p + z^p = 0$ nema cjelobrojnih rješenja takvih da vrijedi $p \nmid xyz$.*

¹⁸Sophie Germain (1776 - 1831), francuski matematičar. Jedna od utemeljitelja matematičke fizike.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno i neka su x, y, z takva rješenja za koja je $M(x, y, z) = 1$. Tada vrijedi

$$-x^p = (y+z)(z^{p-1} - z^{p-2}y + \dots + y^{p-1}). \quad (1)$$

Faktori na desnoj strani su relativno prosti. Zaista $p \nmid y+z$ i ako je $r \neq p$ bilo koji prost broj koji dijeli oba faktora, onda zbog $y \equiv -z \pmod{r}$ imamo

$$0 \equiv z^{p-1} - z^{p-2}y + \dots + y^{p-1} \pmod{r} \equiv py^{p-1} \pmod{r},$$

a odatle slijedi $r|y$. Odavde bi, zbog (+), slijedilo $r|z$, a to je u proturječju s pretpostavkom $M(x, y, z) = 1$.

Zbog jedinstvenosti rastava na proste faktore u \mathbf{Z} dobivamo stoga

$$y+z = A^p \quad (2)$$

$$z^{p-1} - z^{p-2}y + \dots + y^{p-1} = T^p \quad (3)$$

za neke cijele brojeve A i T . Analogno imamo

$$x+y = B^p, \quad (4)$$

$$x+z = C^p. \quad (5)$$

Kako je $p = (q-1)/2$, to redukcijom po modulu q iz (+) slijedi

$$x^{(q-1)/2} + y^{(q-1)/2} + z^{(q-1)/2} \equiv 0 \pmod{q}.$$

Ako $q \nmid xyz$, onda je svaki član na lijevoj strani kongruentan ± 1 po modulu q ("mali Fermat"!), a to je nemoguće zbog $q > 5$. Stoga, po simetriji možemo uzeti da $q|x$. Iz (2), (4) i (5) slijedi

$$B^p + C^p - A^p = 2x,$$

odakle dobivamo

$$B^{(q-1)/2} + C^{(q-1)/2} - A^{(q-1)/2} \equiv 0 \pmod{q}. \quad (6)$$

Odavde opet slijedi da $q|ABC$. No, kako $q|x$, to iz (4) i (5) slijedi da $q|BC$, što je nemoguće (zbog (4) i (5)). Zato je $q|A$. Iz (2) i (3) slijedi

$$T^p \equiv py^{p-1} \pmod{q}.$$

Iz (4) dobivamo $y \equiv B^p \pmod{q}$, a zbog $M(A, T) = 1$ slijedi $q \nmid T$. Odavde i zbog $p = (q-1)/2$ slijedi $\pm 1 \equiv \pm p \pmod{q}$, što je nemoguće. Time je dokaz gotov. ■

Tako, npr., odavde zaključujemo da za $p = 3$, $p = 11$, $p = 23$ Fermatova jednadžba nema rješenja takvih da $p \nmid xyz$. Nažalost, ne zna se da li ima beskonačno mnogo prostih brojeva p za koje je $2p+1$ prost broj (tzv. prostih brojeva "tipa Germain").

No, evo i direktnog dokaza za jednadžbu $x^3 + y^3 = z^3$ u tom slučaju.

Primjer 9. Dokazite da jednačba $x^3 + y^3 = z^3$ nema rješenja u cijelim brojevima koji nisu djeljivi s 3.

Rješenje. Dovoljno je dokazati da kongruencija

$$x^3 + y^3 \equiv z^3 \pmod{9}$$

nema rješenja u takvim brojevima. Pretpostavimo da ova kongruencija ima takva rješenja. Tada $x^3 + y^3 \equiv z^3 \pmod{3}$ povlači ("mali Fermat") da je $x + y \equiv z \pmod{3}$, tj. $z = x + y + 3u$, za neko $u \in \mathbb{Z}$. Stoga bi slijedilo $x^3 + y^3 \equiv (x + y + 3u)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 \pmod{9}$, a oдавde

$$0 \equiv x^2y + xy^2 = xy(x + y) \equiv xyz \pmod{3}.$$

To bi povlačilo da bar jedan od brojeva x, y, z mora biti djeljiv s 3, što je kontradikcija.

■

Sada ćemo razmotriti poznatu Pellovu¹⁹ jednačbu

$$x^2 - Dy^2 = 1, \quad (*)$$

gdje je D dani prirodni broj. Zanimaju nas samo rješenja u prirodnim brojevima x, y (uvijek postoje trivijalna rješenja $x = 1, y = 0$ i $x = -1, y = 0$). Nadalje, ako je $D = n^2$ potpun kvadrat, onda je Pellova jednačba nezanimljiva jer se tada može pisati u obliku

$$(x - ny)(x + ny) = 1,$$

pa mora biti $x + ny | 1$, što je nemoguće za prirodne brojeve x, y, n . Ako D nije potpun kvadrat, onda Pellova jednačba ima beskonačno mnogo parova rješenja. Kako se oni mogu naći? U izraz $1 + Dy^2$ uvrstavajmo redom za y prirodne brojeve $1, 2, 3, \dots$ i neka je u prvi za koji je $1 + Dy^2$ potpun kvadrat. Stavimo $1 + Dy^2 = t^2$. Tada je par (t, u) rješenje od (*) za koje su t, u najmanji prirodni brojevi, tj. ako su x, y rješenja, onda je $y > u$, pa stoga $x = \sqrt{1 + Dy^2} > \sqrt{1 + Du^2} = t$. U nekim posebnim slučajevima lako se nađe najmanje rješenje. Npr., za $D = a^2 - 1$ ($a > 1, a \in \mathbb{N}$), najmanje rješenje je $t = a, u = 1$. Za $D = a(a + 1)$ najmanje rješenje je $t = 2a + 1, u = 2$; za $D = a^2 + 1$ najmanje rješenje je $t = 2a^2 + 1, u = 2a$, a za $D = a^2 + 2$ najmanje rješenje je $t = a^2 + 1, u = a$.

Sva rješenja od (*) se dobiju na temelju sljedećeg teorema.

TEOREM 7. Neka je x_0, y_0 najmanje rješenje jednačbe $x^2 - Dy^2 = 1$ u prirodnim brojevima. Tada su sva rješenja $x_n, y_n, n \in \mathbb{N}$ dana sa

$$x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})^n, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ tj.}$$

$$x_{k+1} = 2x_0x_k - x_{k-1}, \quad y_{k+1} = 2x_0y_k - y_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

ili ekvivalentno

$$x_{n+1} = x_0x_n + Dy_0y_n, \quad y_{n+1} = y_0x_n + x_0y_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

¹⁹ John Pell (1610 - 1685), engleski matematičar. Djelovao u Nizozemskoj i Njemačkoj, a kao diplomat i u Švicarskoj. Zanimljivo je da se sam Pell nije bavio jednačbama koje su kasnije dobile njegovo ime, a stvar je u tome da se Euler u jednom članku zabunom pozvao na Pella umjesto na engleskog matematičara Williama Brounckera (1620 - 1684). Od 1660 do svoje smrti predsjednik kraljevskog učenog društva (Royal Society).

Dokaz. Ideja je geometrijska. Uočimo da Pellova jednadžba (*) predstavlja jednadžbu hiperbole, a rješenja Pellove jednadžbe su sve cjelobrojne točke na desnoj gornjoj grani H te hiperbole. U tu svrhu promotrimo tzv. **unimodularne transformacije** ravnine $(x, y) \mapsto (x', y')$

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\y' &= cx + dy,\end{aligned}\tag{1}$$

gdje su a, b, c, d zadani cijeli brojevi takvi da je $ad - bc = 1$. Lako se vidi da je unimodularno preslikavanje bijekcija ravnine i da skup svih unimodularnih transformacija čini grupu obzirom na kompoziciju. Pokažimo prvo da postoji unimodularna transformacija koja H prevodi u H , a trivijalno rješenje $(1, 0)$ u najmanje pozitivno rješenje (x_0, y_0) . Zbog $(1, 0) \mapsto (x_0, y_0)$ iz (1) slijedi $a = x_0, c = y_0$, pa je tražena transformacija oblika $x' = x_0x + by, y' = y_0x + dy$, i pri tom mora vrijediti $x_0d - y_0b = 1$. Ovom transformacijom se hiperbola (*) preslikava u

$$x^2 + 2(x_0b - Dy_0d)xy + (b^2 - Dd^2)y^2 = 1.$$

Hiperbola će se preslikati u samu sebe ako i samo ako vrijedi $x_0b - Dy_0d = 0, b^2 - Dd^2 = -D$. Iz svih ovih jednakosti lagano slijedi $b = Dy_0, d = x_0$. Stoga je tražena transformacija f

$$\begin{aligned}x' &= x_0x + Dy_0y \\y' &= y_0x + x_0y.\end{aligned}\tag{2}$$

Lako se vidi da transformacija f prevodi H u samu sebe. Sada pokažimo da se uzastopnim izvođenjem preslikavanja f određenog s (2) i primijenjenog na $A = (1, 0)$ i $T_0 = (x_0, y_0)$ dobiju sve cjelobrojne točke na H . Označimo sa C_H skup svih cjelobrojnih točaka na H . Formirajmo niz

$$A = (1, 0), \quad T_0 = f(A) = (x_0, y_0), \quad T_1 = f(T_0), \quad T_2 = f(T_1), \quad T_3 = f(T_2), \dots$$

Tvrdimo da je ovim nizom iscrpljen čitav skup C_H . Da to dokažemo, pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $T^* \in C_H$ koja ne pripada ovom nizu. Tada je T^* između dviju susjednih točaka $T_k = f^k(T_0)$ i $T_{k+1} = f^{k+1}(T_0)$. Lako se provjeri da f čuva uređaj na C_H . Tada bismo dobili da unimodularnom transformacijom f^{-1} , točka $f^{-1}(T^*) \in C_H$ leži između točaka $T_{k-1} = f^{k-1}(T_0)$ i $T_k = f^k(T_0)$. Nastavljajući taj postupak došli bismo na kraju do neke točke $T \in C_H$ koja je između točaka A i T_0 , a to je nemoguće, jer je po pretpostavci T_0 ona cjelobrojna točka desne gornje polugrane hiperbole koja je najbliža točki $A = (1, 0)$. Dobivena kontradikcija dokazuje tvrdnju. Dakle, opisanim se postupkom dobivaju sva rješenja jednadžbe (*).

Neka je $T_n = f^n(T_0) = (x_n, y_n), n \in \mathbb{N}$. Tada iz (2) i gornje diskusije slijedi da su x_n i y_n rješenja ovog sustava rekurzivnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}x_n &= x_0x_{n-1} + Dy_0y_{n-1} \\y_n &= y_0x_{n-1} + x_0y_{n-1}.\end{aligned}$$

Iz ovih jednadžbi eliminacijom x_n dobivamo

$$y_{n+2} - 2x_0 y_{n+1} + y_n = 0, \quad n \geq 0. \quad (3)$$

Ovo je rekurzija drugog reda. Kako se ona rješava vidite npr. u knjizi D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989. Karakteristična jednadžba te rekurzije glasi

$$t^2 - 2x_0 t + 1 = 0,$$

a njeni korijeni su

$$t_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 1}.$$

iz $x_0^2 - Dy_0^2 = 1$ odavde slijedi

$$t_1 = x_0 + y_0 \sqrt{D}, \quad t_2 = x_0 - y_0 \sqrt{D}.$$

Opće rješenje od (3) je oblika

$$y_n = C_1(x_0 + y_0 \sqrt{D})^n + C_2(x_0 - y_0 \sqrt{D})^n. \quad (4)$$

Iz početnih uvjeta za $n = 0$ i $n = 1$ dobivamo $y_0 = C_1 + C_2$ i $y_1 = C_1(x_0 + y_0 \sqrt{D}) + C_2(x_0 - y_0 \sqrt{D})$. No iz druge jednadžbe sustava rekurzije za $n = 1$ dobivamo $y_1 = 2x_0 y_0$, pa imamo

$$C_1(x_0 + y_0 \sqrt{D}) + C_2(x_0 - y_0 \sqrt{D}) = 2x_0 y_0.$$

Odavde i iz $y_0 = C_1 + C_2$ dobivamo

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{D}}(x_0 + y_0 \sqrt{D}), \quad C_2 = -\frac{1}{2\sqrt{D}}(x_0 - y_0 \sqrt{D}).$$

Ako ovo uvrstimo u (4) dobivamo

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left[(x_0 + y_0 \sqrt{D})^{n+1} - (x_0 - y_0 \sqrt{D})^{n+1} \right].$$

Sasvim analogno dobivamo

$$x_n = \frac{1}{2} \left[(x_0 + y_0 \sqrt{D})^{n+1} + (x_0 - y_0 \sqrt{D})^{n+1} \right].$$

Iz tih dviju formula slijedi odmah i prva formula u Teoremu. ■

Primjer 10. Riješite diofantsku jednadžbu $x^2 - Dy^2 = 1$ u prirodnim brojevima ako je a) $D = 2$, b) $D = 3$, c) $D = 5$, d) $D = 11$, e) $D = 13$.

Rješenje. a) Za $D = 2$ jednadžba je $x^2 - 2y^2 = 1$. Uvrstimo redom $y = 1, 2$ u izraz $1 + 2y^2$. Dobivamo vrijednosti 3 i 9, a ova druga je kvadrat. Stoga je najmanje (prirodno) rješenje $x = 3, y = 2$. Odavde iz prethodnog teorema dobivamo sva rješenja

$$x_1 = 3^2 + 2 \cdot 2^2 = 17, \quad y_1 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12, \quad x_2 = 99, \quad y_2 = 70, \quad x_3 = 577, \quad y_3 = 408, \dots$$

i općenito $x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n$, tj. desnu stranu razvijemo po binomnom teoremu i izjednačimo cjelobrojne dijelove i one uz $\sqrt{2}$.

b) Za $D = 3$ jednadžba je $x^2 - 3y^2 = 1$. Uvrštavajući redom u $1 + 3y^2$ prirodne brojeve, dobivamo već za $y = 1$ potpun kvadrat, pa je najmanje prirodno rješenje $x = 2, y = 1$, a odavde se lako dobiju sva rješenja.

c) Za $D = 5$ jednadžba je $x^2 - 5y^2 = 1$. Uvrštavanjem redom u $1 + 5y^2$ vrijednosti $y = 1, 2, 3, 4$, dobivamo redom 6, 21, 46, 81, a posljednja vrijednost je potpun kvadrat. Dakle, najmanje rješenje je $x = 9, y = 4$.

d) Za $D = 11$, tj. za jednadžbu $x^2 - 11y^2 = 1$, uvrštavamo $y = 1, 2, 3$ u $1 + 11y^2$ redom. Dobivamo vrijednosti 12, 45, 100, pa je najmanje rješenje $x = 10, y = 3$.

e) Za $D = 13$, tj. za jednadžbu $x^2 - 13y^2 = 1$ treba 180 pokušaja da se dobije najmanje rješenje $x = 649, y = 180$. Opće rješenje je dano sa

$$x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{13} = (649 + 180\sqrt{13})^n. \blacksquare$$

Opća metoda za nalaženje najmanjeg rješenja Pellove jednadžbe se dobije pomoću tzv. neprekidnih (veriznih) razlomaka, jer ovakvi pokušaji postaju preveliki. Na primjer, za jednadžbu $x^2 - 991y^2 = 1$ treba 10^{28} pokušaja da se dobije 30-cifreno najmanje rješenje. Upravo je već spomenuti Brouncker pomoću veriznih razlomaka dao postupak za nalaženje najmanjeg rješenja.

Prvi se Pellovim jednadžbama izgleda bavio već Diofant. Poznato je da je on aleksandrijskom zvjezdoznancu i matematičaru Erastotenu predložio da riješi tzv. "problema lovinum" (problem stoke). Taj je problem vodio na Pellovu jednadžbu $x^2 - 410\,286\,423\,278\,424y^2 = 1$. Prema nekim izvorima diofantskim jednadžbama se bavio i Arhimed. Zna se da je Diofant znao riješiti jednadžbe $x^2 - 26y^2 = 1$ i $x^2 - 30y^2 = 1$. Također je poznato da je hindus Bhaskara²⁰ opisao jedan ciklički algoritam za rješavanje Pellove jednadžbe. Obrazloženje tog algoritma dao je tek Lagrange kojih 600 godina kasnije. Već je Euler pokazao kako se rješavaju diofantske jednadžbe drugog stupnja u dvije varijable, tj. jednadžbe oblika $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, svodi na rješavanje Pellove jednadžbe.

§ 5. Još neke teme i primjeri iz elementarne teorije brojeva

5.1. Euklidov algoritam i neprekidni razlomci

U suvremenom je računarstvu od bitne važnosti znati kolika je kompleksnost algoritama, tj. koliko osnovnih operacija (zbrajanja, množenja, dijeljenja, uspoređivanja, ...) trebamo učiniti za provedbu algoritma u bilo kojem slučaju implementiranja ulaznih podataka. Ukoliko ne znamo točan broj operacija, korisno je dati neku ocjenu broja operacija (gornju ili donju među itd.). Analizirajmo malo Euklidov algoritam za nalaženje najveće zajedničke mjere. Prvo, jasno je da je taj algoritam konačan, tj. broj dijeljenja je konačan

²⁰Bhaskara (1114 - 1185?), indijski matematičar.

broj. Međutim, taj broj može biti po volji velik za pogodno odabrane brojeve a i b . U stvari vrijedi sljedeća

PROPOZICIJA 1. *Za svako $n \in \mathbb{N}$, postoje brojevi $a_n, b_n \in \mathbb{N}$, tako da primjenom Euklidovog algoritma za nalaženje $M(a_n, b_n)$ treba n dijeljenja.*

Dokaz. Uvodimo tzv. **Fibonaccijeve brojeve** $F_0 = 0, F_1 = 1$ i $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ za $n \geq 2$. Stoga je $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55, \dots$ Stavimo $a_n = F_{n+2}, b_n = F_{n+1}$. Primijenimo Euklidov algoritam za nalaženje $M(a_n, b_n) = M(F_{n+2}, F_{n+1})$, pa dobivamo sljedeći niz dijeljenja

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= 1 \cdot F_{n+1} + F_n \\ F_{n+1} &= 1 \cdot F_n + F_{n-1} \\ &\dots\dots\dots \\ F_4 &= 1 \cdot F_3 + F_2 \\ F_3 &= 2 \cdot F_2. \end{aligned}$$

Očito je broj koraka jednak n . Tako npr. za nalaženje $M(F_{12}, F_{11}) = M(144, 89)$ Euklidovim algoritmom treba 10 djeljenja. S druge strane, lako se vidi da su najmanji brojevi za koje treba točno n djeljenja s Euklidovim algoritmom za nalaženje najveće zajedničke mjere upravo brojevi F_{n+2}, F_{n+1} . ■

Vrijedi, međutim, sljedeći teorem, kojim se odozgo ocjenjuje efikasnost Euklidovog algoritma u terminima ulaznih podataka, tj. brojeva kojima treba naći najveću zajedničku mjeru.

TEOREM 1 (G. Lamé²¹, 1844). *Neka su $a < b$ prirodni brojevi. Tada broj koraka (tj. dijeljenja) u Euklidovom algoritmu za nalaženje $M(a, b)$ nije veći od 5 puta broj cifara od a u dekadskom zapisu.*

Dokaz. Prvo ćemo dokazati sljedeće svojstvo Fibonaccijevih brojeva

$$F_{n+5} > 10F_n, \quad n \geq 2 \tag{1}$$

Zaista, za $n = 2$ imamo $F_7 = 13 > 10F_2 = 10$. Za $n \geq 3$, a prema definiciji Fibonaccijevih brojeva imamo

$$F_{n+5} = F_{n+4} + F_{n+3} = 2F_{n+3} + F_{n+2} = 3F_{n+2} + 2F_{n+1} = 5F_{n+1} + 3F_n = 8F_n + 5F_{n-1}.$$

Budući da je niz (F_n) nepadajući, vrijedi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \leq 2F_{n-1}$, pa stoga $2F_n \leq 4F_{n-1}$ i, prema tome, $F_{n+5} = 8F_n + 5F_{n-1} > 8F_n + 4F_{n-1} \geq 10F_n$, što dokazuje (1).

Sada indukcijom po t nije teško pokazati da vrijedi

$$F_{n+5t} > 10^t F_n, \quad n \geq 2, \quad t \in \mathbb{N} \tag{2}$$

²¹ Gabriel Lamé (1795 - 1870), francuski matematičar.

Neka su $n_1 = a < b = n_0$ dani prirodni brojevi i neka je broj koraka u Euklidovom algoritmu za nalaženje $M(a, b)$ jednak k , tj.

$$\begin{aligned} n_0 &= q_1 n_1 + n_2 \\ n_1 &= q_2 n_2 + n_3 \\ &\dots\dots\dots \\ n_{k-2} &= q_{k-1} n_{k-1} + n_k \\ n_{k-1} &= q_k n_k. \end{aligned} \tag{3}$$

Očito je $q_k \geq 2$, jer $q_k = 1$ povlači $n_{k-1} = n_k$, što je nemoguće, jer je n_k ostatak pri dijeljenju n_{k-2} sa n_{k-1} . Stoga je $n_{k-1} = q_k n_k \geq 2n_k \geq 2 = F_3$. Odavde slijedi $n_{k-2} \geq n_{k-1} + n_k \geq F_3 + F_2 = F_4$; $n_{k-3} \geq n_{k-2} + n_{k-1} \geq F_4 + F_3 = F_5, \dots, n_1 \geq F_{k+1}$. Prema tome, ako je $k > 5t$, tj. $k \geq 5t + 1$, onda je $n_1 \geq F_{5t+2}$ pa zbog (2) (za $n = 2$) slijedi $n_1 > 10^t$. To znači da n_1 ima barem $t + 1$ cifara u dekadskom zapisu. Zbog toga, ako $n_1 = a$ ima t cifara, onda je $k \leq t$, što dokazuje teorem. (Za drugi dokaz vidi D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989, str. 206.) ■

Uočite da se (3) može zapisati i ovako. Za $i = 1, 2, \dots, k - 1$

$$\frac{n_{i-1}}{n_i} = q_i + \frac{1}{\frac{n_i}{n_{i+1}}}, \quad \frac{n_{k-1}}{n_k} = q_k.$$

Odatle dobivamo (neprekidnim ponavljanjem) neprekidni razlomak

$$\frac{n_0}{n_1} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \dots + \frac{1}{q_{k-1} + \frac{1}{q_k}}}}},$$

ili kraće

$$\frac{n_0}{n_1} = q_1 + \frac{1}{|q_2} + \frac{1}{|q_3} + \frac{1}{|q_4} + \dots + \frac{1}{|q_{k-1}} + \frac{1}{|q_k}.$$

Tako za Fibonaccijeve brojeve dobivamo (s $n - 1$ znakova $\frac{1}{|}$):

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \dots + \frac{1}{|1}.$$

Neprekidni razlomci imaju znatnih primjena, npr. kod rješavanja Pellove jednadžbe.

5.2. Prikaz broja kao sume kvadrata

Znamo da svih prostih brojeva ima beskonačno mnogo. Svaki prost broj > 2 je neparan, pa pri dijeljenju s 4 mora dati ostatak 1 ili 3, tj. mora biti oblika $4k + 1$ ili $4k + 3$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Pokažimo i da svake od ovih dviju vrsta ima beskonačno mnogo.

PROPOZICIJA 2. *Prostih brojeva oblika $4k + 3$ ima beskonačno mnogo.*

Dokaz. Pretpostavimo da prostih brojeva oblika $4k + 3$ ima samo konačno mnogo. Lista tih brojeva počinje sa: 3, 7, 11, 19, 23, ..., pa stavimo $p_1 = 7$, $p_2 = 11$, $p_3 = 19$ itd. Neka je p_m najveći takav broj. Promotrimo broj $N = 4p_1 p_2 \dots p_m + 3$. Broj N nije djeljiv ni s jednim od brojeva p_i , a oblika je $4l + 3$. No, uočimo da je produkt dvaju brojeva oblika $4k + 1$ opet tog oblika, jer imamo

$$(4k + 1)(4k' + 1) = 4(4kk' + k + k') + 1.$$

Stoga je svaki cijeli broj oblika $4l + 3$ nužno djeljiv s prostim brojem oblika $4l + 3$. Tako i broj N mora biti djeljiv s nekim prostim brojem p oblika $4l + 3$. Tada je $p > p_m$, što je u kontradikciji s izborom p_m . ■

S brojevima oblika $4k + 1$ je malo teže.

TEOREM 2. *Prostih brojeva oblika $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, ima beskonačno mnogo.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ bilo koji broj i stavimo $N = (n!)^2 + 1$. Broj $N > 1$ je neparan i neka je p najmanji prosti djelitelj od N . Očito je $p > n$ i kako je p neparan, to je oblika $4k + 1$ ili $4k + 3$. Potenciramo li kongruenciju $(n!)^2 \equiv -1 \pmod{p}$ brojem $(p - 1)/2$, dobivamo $(n!)^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. Kako $n!$ nije djeljiv brojem p , to mali Fermatov teorem povlači $(n!)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Stoga dobivamo

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Kad bi p bio oblika $p = 4k + 3$, onda bi gornja kongruencija povlačila

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1 \equiv 1 \pmod{p},$$

odakle slijedi $p|2$, što je nemoguće. Stoga p mora biti oblika $4k + 1$.

Prema tome, dokazali smo da za svako $n > 1$ postoji prost broj $p > n$ oblika $4k + 1$, pa ih ima beskonačno mnogo. ■

Napomena. Posljednja propozicija i teorem samo su posebni slučajevi jednog općeg Dirichletovog teorema iz 1837 g.: Neka su a i d prirodni brojevi. Nužan i dovoljan uvjet da aritmetički niz $ka + b$, $k = 1, 2, 3, \dots$ sadrži beskonačno mnogo prostih brojeva je da je $M(a, b) = 1$, tj. da su a i b relativno prosti.

Dokaz tog općeg teorema vrlo je težak. Ustvari, nužnost je gotovo trivijalna. Ako je, naime, $M(a, b) = d > 1$, onda nema prostih brojeva u nizu $ka + b$, $k = 1, 2, 3, \dots$, jer je tada $ka + b = d \left(\frac{ka}{d} + \frac{b}{d} \right)$, $\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \in \mathbb{N}$.

Promotrimo li prvih nekoliko prostih brojeva oblika $4k + 1$, tj. 5, 13, 17, 29, ..., vidimo da je svaki od njih suma dvaju kvadrata: $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, $29 = 2^2 + 5^2$, ..., $613 = 17^2 + 18^2$ itd. Sada ćemo dokazati da je to istina i općenito. U tu svrhu treba nam jedna opća lema.

LEMA 1. *Ako je $S \subset \mathbb{N}^3$ konačan skup i ako postoji involucija f na S (tj. $f \circ f = 1_S$) s jedinstvenom fiksnom točkom, onda je $|S|$ neparan i involucija g na S definirana s $g : (x, y, z) \mapsto (x, z, y)$ također ima fiksnu točku.*

Dokaz. Dokazimo općenitiju tvrdnju. Ako je $f : S \rightarrow S$ involucija konačnog skupa S , onda su $|S|$ i $|Fix(f)|$ iste parnosti, gdje je $Fix(f) = \{x \in S | f(x) = x\}$ skup svih fiksnih točaka od f . Zaista. Neka je $|S| = n$, a $|Fix(f)| = k$. f preslikava bijektivno $S \setminus Fix(f)$ na sama sebe i to bez fiksnih točaka. Stoga svaki $x \in S \setminus Fix(f)$ ima svoj par $f(x) \neq x$ u tom skupu (tj. imamo sparivanje $x \leftrightarrow f(x)$), pa $S \setminus Fix(f)$ ima parno mnogo elemenata i zato je $n - k$ paran broj, pa su zbog toga n i k iste parnosti, što dokazuje prvu tvrdnju iz Leme.

Preslikavanje $g : S \rightarrow S$, $g(x, y, z) = (x, z, y)$ je involucija. Kako je $|S|$ neparan, to je prema gornjemu i $|Fix(g)|$ neparan, pa je posebno $|Fix(g)| \geq 1$ i stoga postoji fiksna točka od g . ■

TEOREM 3. *Neka je p prost broj oblika $4k + 1$. Tada se p može prikazati kao suma dvaju kvadrata $a^2 + b^2$ cijelih brojeva a i b .*

Dokaz. Promotrimo skup $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 | x^2 + 4yz = p\}$. Očito je S konačan skup. Definirajmo preslikavanje $f : S \rightarrow S$ formulom

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z), & \text{ako je } x < y - z \\ (2y - x, y, x - y + z), & \text{ako je } y - z < x < 2y \\ (x - 2y, x - y + z, y), & \text{ako je } x > 2y. \end{cases}$$

Lako se provjeri da je ovo dobro definirano preslikavanje, tj. da ne može biti $x = y - z$ niti $x = 2y$, te da je zaista $f(x, y, z) \in S$, za sve $(x, y, z) \in S$. Isto tako, lako se provjeri da je f involucija, tj. $f \circ f = 1_S$. Konačno, zbog pretpostavke da je p prost broj oblika $4k + 1$, odmah se vidi da f ima jednu jedinu fiksnu točku (x, y, z) (tj. takvu da je $f(x, y, z) = (x, y, z)$) i da je to točka $(1, 1, k)$.

Prema Lemi, involucija $(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$ ima fiksnu točku, pa postoji točka $(x, y, z) \in S$ takva da je $(x, z, y) = (x, y, z)$, tj. $y = z$. No tada je $x^2 + (2y)^2 = p$ i teorem je dokazan. (Ovaj kratki i duhoviti dokaz je prema članku Đ. Zagier, A one-sentence proof that every prime $p \equiv 1 \pmod{4}$ is a sum of two squares, Amer. Math. Monthly, 97 (1990), No. 2, 144.) ■

Primjer 1. Dokazite da je svaki prost broj p oblika $4k + 1$ duljina hipotenuze pravokutnog trokuta s cjelobrojnim duljinama stranica.

Rješenje. Prema prethodnom teoremu postoje $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je $p = a^2 + b^2$. Brojevi a i b su različiti, jer je p neparan, pa je, recimo, $a > b$. No tada je $p^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$. Stoga su katete tog trokuta $a^2 - b^2$ i $2ab$. Tako je, npr., $5^2 = 3^2 + 4^2$, $13^2 = 5^2 + 12^2$, $17^2 = 15^2 + 8^2$, $29^2 = 21^2 + 20^2$ itd. ■

Naravno i razni drugi brojevi se mogu prikazati kao suma dvaju kvadrata, npr. $20 = 2^2 + 4^2$, a neki se brojevi ne mogu uopće prikazati kao suma dvaju kvadrata, takav je npr. $n = 15$. (Pokazuje se da se tako mogu prikazati samo brojevi koji u kanonskom rastavu ne sadrže prost broj oblika $4k + 3$ na neparni eksponent.) Dokaz prethodnog teorema ne daje konstruktivni način kako prikazati broj n kao sumu dvaju kvadrata. Jedan takav način je ovaj. Ako je $p = 4k + 1$ prost broj, onda uzmemo brojeve $x, y \in \mathbf{Z}$, tako da je

$$x \equiv \frac{(2k)!}{2(k!)^2} \pmod{p}, \quad y \equiv (2k)!x \pmod{p},$$

i $|x| < p/2$, $|y| < p/2$. Tada je $p = x^2 + y^2$. Dokaz je prilično težak. Postavlja se prirodno pitanje, kako naći sve moguće prikaze danog prirodnog broja n kao sume dvaju kvadrata, tj. kao

$$n = x^2 + y^2.$$

Tada je $n \geq x^2$ i $n \geq y^2$, pa je $|x| \leq \sqrt{n}$, $|y| \leq \sqrt{n}$. Odgovor na gornje pitanje je vrlo teško naći, pa je sljedeće prirodno pitanje da se odredi broj takvih prikaza. No, niti to nije lako naći, pa ćemo mi odrediti samo prosječan broj takvih prikaza za velike n . Označimo li sa $T(n)$ broj rješenja nejednadžbe $0 < x^2 + y^2 \leq n$ u cijelim brojevima, možemo postupiti ovako. Ako je $x = 0$, onda je $y^2 \leq n$, tj. $|y| \leq \sqrt{n}$. Takvih cijelih y -ova ima $2\lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Ako je $x = k \neq 0$, onda je $k^2 \leq n$, tj. $|k| \leq \sqrt{n}$ i $y^2 \leq n - k^2$, tj. $|y| \leq \sqrt{n - k^2}$. Broj takvih y -ova je $1 + 2\lfloor \sqrt{n - k^2} \rfloor$ (dodajemo broj 1, jer uključujemo slučaj $y = 0$). Broj k može biti bilo koji od brojeva $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, a predznak \pm ne utječe na k^2 . Stoga dobivamo

$$T(n) = 2\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (1 + 2\lfloor \sqrt{n - k^2} \rfloor) = 4 \sum_{k=0}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \lfloor \sqrt{n - k^2} \rfloor.$$

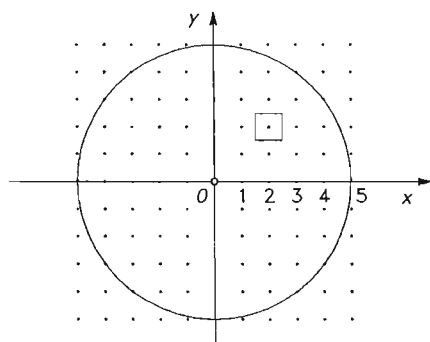
Geometrijsko značenje broja $T(n) + 1$ je da je to broj cjelobrojnih parova (x, y) , za koje je $x^2 + y^2 \leq n$, tj. to je broj točaka cjelobrojne mreže koji su unutar ili na rubu kružnice s centrom u ishodištu i radijusa \sqrt{n} . Tako je, npr., na sl. 350 broj tih točaka za $n = 25$ jednak $1 + T(5) = 81$, a za $n = 100$, broj cjelobrojnih točaka unutar (ili na rubu) kružnice $x^2 + y^2 \leq 100$ jednak je 317 (provjerite). Pomoću malih kvadratića (kao na slici) i površine kruga, nije teško pokazati da je $|T(n) - \pi n| < 6\sqrt{n}$, za sve $n \in \mathbf{N}$.

Označimo sa $t(k)$ broj (cjelobrojnih) rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 = k$. Tako je npr. $t(1) = 4$, $t(2) = 4$, $t(3) = 0$, $t(4) = 4$, $t(5) = 8$ itd. Tada je očito $T(n) = t(1) + t(2) + \dots + t(n)$. Iz gornje nejednakosti slijedi

$$\left| \frac{T(n)}{n} - \pi \right| < \frac{6}{\sqrt{n}}.$$

Stoga dobivamo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t(1) + t(2) + \dots + t(n)}{n} = \pi.$$



Sl. 350.

To znači da je srednja vrijednost funkcije $t(n)$ jednaka π . Drugim riječima, prosječno imamo π prikaza velikog prirodnog broja kao sume dvaju kvadrata. Tako npr. zbog $T(100) = 316$, slijedi da u prosjeku prirodni brojevi ≤ 100 imaju $T(100)/100 = 3,16$ prikaza u obliku sume dvaju kvadrata. Slično nalazimo $T(400)/400 = 1256/400 = 3,14$ i $T(1000)/1000 = 3148/1000 = 3,148$.

Drugi problem sličnog tipa su pitanja prikaza prirodnog broja kao sume triju odnosa četiriju kvadrata. Vrijedi

TEOREM 4 (Gauss). *Prirodni broj se može prikazati kao suma triju kvadrata cijelih brojeva ako i samo ako nije oblika $4k(8l+7)$, $k, l \geq 0$.*

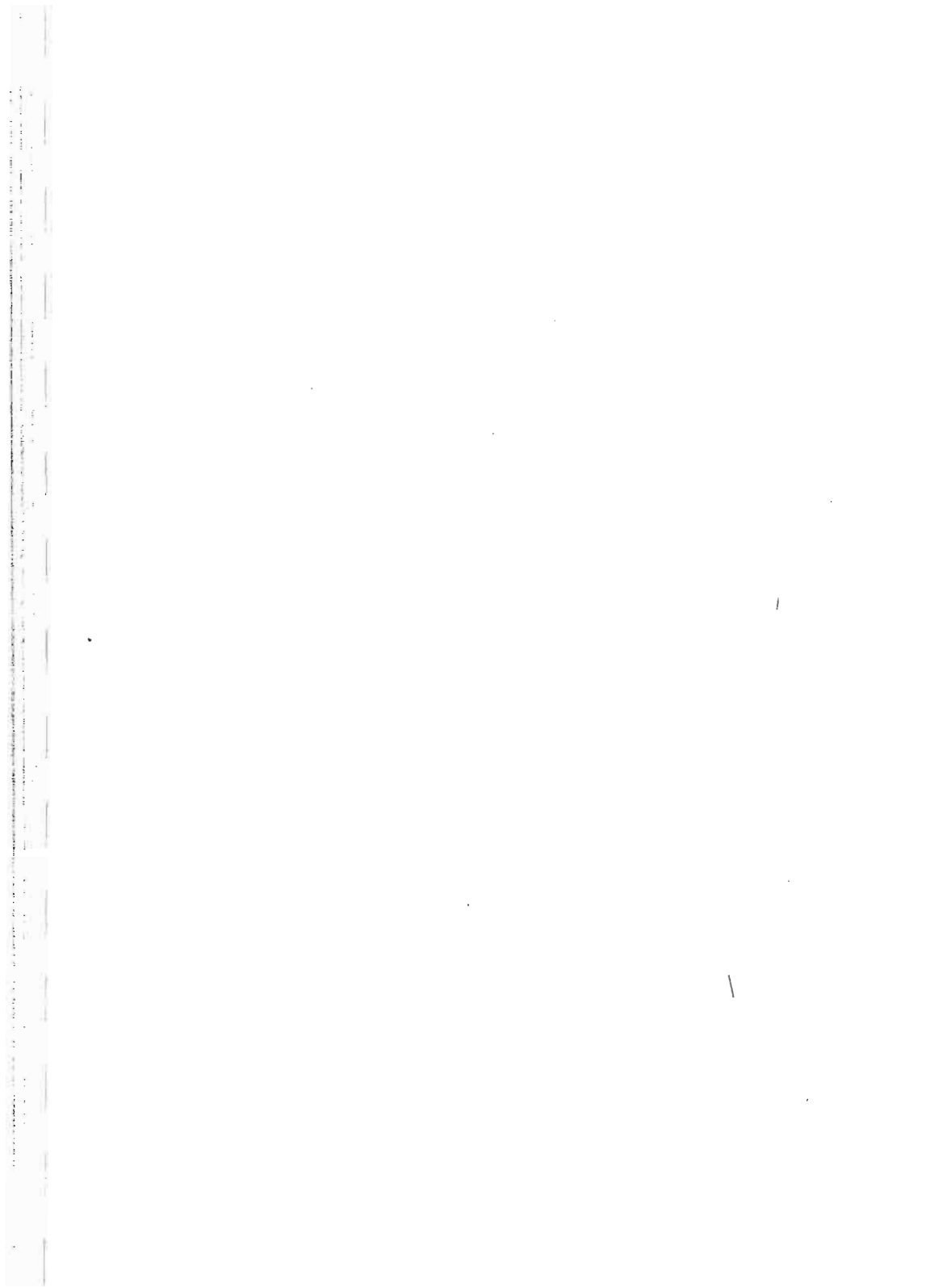
TEOREM 5 (Lagrange). *Svaki nenegativni cijeli broj je suma četiriju kvadrata cijelih brojeva*

Dokazi nisu jednostavni, pa ih izostavljamo.

Na kraju kažimo da se mnoge primjene teorije brojeva odnose na računarstvo, ali vrijedi i obrnuto. Superbrzi kompjuteri nam omogućuju da razriješimo neke vrlo stare probleme. Na primjer, L. Euler je naslutio još 1772 godine da je za sve prirodne brojeve $a^4 + b^4 + c^4 \neq d^4$. Međutim, tek je 1988. godine R. Frye, nakon iscrpnog kompjuterskog traganja, našao najmanje rješenje koje glasi

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

Dakle, i Euler je znao pogriješiti (iako malokad) u svojim prosudbama i slutnjama. Što li bi tek Euler napravio da je imao na raspolaganju današnju kompjutersku tehnologiju, čitatelj može samo kontemplirati.



IZBOR IZ PISMENIH ISPITA IZ ELEMENTARNE MATEMATIKE II

26.6.1991.

1. Neka su a, b, c pravci kroz točku P . Dokažite da je tada $s_a \circ s_b \circ s_c = s_c \circ s_b \circ s_a$. (s_a je osna simetrija s obzirom na pravac a)
2. Riješite sustav jednačnji:

$$\operatorname{tg}(y+x) = 4 \sin x + 2 \cos x$$

$$\operatorname{tg}(y-x) = 4 \sin x - 2 \cos x.$$

3. Zadana je kocka $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Neka je M polovište brida $A_1 B_1$, a N središte kvadrata $ABB_1 A_1$. Koliki je kut između pravaca MD i NC ?

4. Zadana je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$). Nađite skup središta svih tetiva elipse koje prolaze kroz desni fokus $F_2(c, 0)$.

5. Dokažite da među 39 uzastopnih prirodnih brojeva postoji barem jedan broj čija je suma znamenaka djeljiva sa 11. Nađite 38 uzastopnih prirodnih brojeva takvih da suma znamenaka niti jednog od njih nije djeljiva sa 11.

RJEŠENJA:

1. Dokazat ćemo da postoji pravac d kroz točku P takav da je $s_a \circ s_b \circ s_c = s_d$. Ako je $a = b$, onda je $d = c$. Ako je $a \neq b$, onda postoji $Q \in c$, $s_a s_b s_c(Q) = Q' \neq Q$. Neka je d simetrala dužine $\overline{QQ'}$. $s_a s_b s_c(P) = P \Rightarrow |PQ| = |PQ'| \Rightarrow P \in d$.

$$\left. \begin{aligned} s_a s_a s_b s_c(P) &= s_d(P) = P \\ s_a s_a s_b s_c(Q) &= s_d(Q') = Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

\Rightarrow ili je $s_d \circ s_a \circ s_b \circ s_c = s_c \Rightarrow s_a \circ s_b = s_d$, što je nemoguće,

ili je $s_d \circ s_a \circ s_b \circ s_c = 1_M \Rightarrow s_a \circ s_b \circ s_c = s_d$.

Sada je $1_M = s_d \circ s_d = s_a \circ s_b \circ s_c \circ s_a \circ s_b \circ s_c$, pa je $s_a \circ s_b \circ s_c = s_c \circ s_b \circ s_a$.

$$2. \quad \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x = \frac{\operatorname{tg}(y+x) - \operatorname{tg}(y-x)}{1 + \operatorname{tg}(y+x) \cdot \operatorname{tg}(y-x)} = \frac{4 \cos x}{1 + 16 \sin^2 x - 4 \cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x (1 + 16 \sin^2 x - 4 \cos^2 x) = 2 \cos x \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) (20 \sin^2 x + 14 \sin x + 4) = 0$$

$$\text{Dakle, } x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad y_1 = (-1)^{k-1} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + m\pi$$

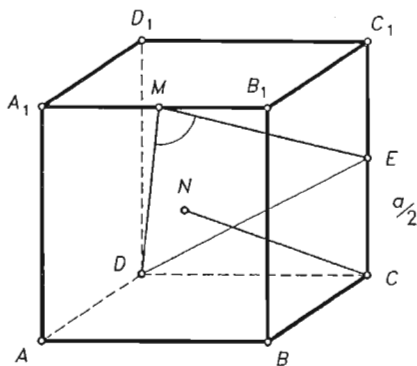
$$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad y_2 = \frac{\pi}{4} + m\pi; \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad y_3 = \frac{\pi}{4} + m\pi.$$

3. Traženi kut je $\varphi = \sphericalangle DME$.

$$MD^2 = A_1M^2 + A_1D_1^2 + D_1D^2 = \frac{9a^2}{4}, \quad ME^2 = EC_1^2 + MB_1^2 + B_1C_1^2 = \frac{6a^2}{4},$$

$$DE^2 = DC^2 + CE^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

$$\text{Po kosinusuovom poučku je } \cos \varphi = \frac{MD^2 + ME^2 - DE^2}{2 \cdot MD \cdot ME} = \frac{5\sqrt{6}}{18} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{5\sqrt{6}}{18}.$$



4. Jednadžbu pravca kroz desni fokus $y = k(x - c)$ uvrstimo u jednadžbu elipse. Dobivamo

$$x^2(b^2 + a^2k^2) - 2a^2k^2cx + a^2k^2c^2 - a^2b^2 = 0.$$

$$x_T = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2k^2c}{b^2 + a^2k^2}, \quad y_T = k(x_T - c) = -\frac{b^2kc}{b^2 + a^2k^2}.$$

Odavde eliminacijom parametra k dobivamo: $(x - \frac{c}{2})^2 \cdot b^2 + a^2y^2 = \frac{c^2b^2}{4}$, odnosno

$$\frac{(x - \frac{c}{2})^2}{(\frac{c}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{c \cdot b}{2a})^2} = 1, \text{ što je jednadžba elipse.}$$

5. Neka je dano 39 uzastopnih prirodnih brojeva: $n, n+1, \dots, n+38$. Postoji prirodan broj $m, n \leq m \leq n+19$, takav da mu je zadnja znamenka jednaka 0, a predzadnja različita od 9. Ako je zbroj znamenaka broja m jednak k , onda su zbrojevi znamenaka brojeva $m+1, m+2, \dots, m+9, m+19$ jednaki redom $k+1, k+2, \dots, k+9, k+10$. Jedan od brojeva $k, k+1, k+2, \dots, k+10$ je djeljiv sa 11.

38 brojeva 999981, 999982, ..., 1000018 imaju traženo svojstvo. Naizmjerno ih ovako: Neka je $m = 10^k$. Hoćemo da suma znamenaka broja $m - 1$ daje ostatak 10 pri djeljivosti sa 11. Dakle, $9 \cdot k \equiv 10 \pmod{11}$, što je ispunjeno npr. za $k = 6$. Brojevi $10^6 - 19, 10^6 - 18, \dots, 10^6 + 18$ su traženi.

18.9.1991.

1. Riješite jednačinu: $x^2 + 6x \sin(3xy) + 9 = 0$.

2. Dvije strane tetraedra su sukladni jednakostranični trokuti stranice a . Ostale dvije strane tetraedra su jednakokračni pravokutni trokuti. Koliki je radijus upisane kugle?

3. Zadana je elipsa $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ i kut φ između fokalnih radijusa $F_1 T$ i $F_2 T$ neke točke $T(x_0, y_0)$ na elipsi. Izrazite:

a) $\varrho_1 = d(F_1, T)$ i $\varrho_2 = d(F_2, T)$ u funkciji od a, b, φ ;

b) koordinate x_0, y_0 točke T u funkciji od a, b, φ .

4. Dokažite da je za sve $n \in \mathbb{N}$ broj $(n+1)(n+2) \dots (n+n)$ djeljiv sa 2^n , a nije djeljiv sa 2^{n+1} .

5. Dokažite da za svaki prost broj p postoje cijeli brojevi x i y takvi da je broj $x^2 + y^2 + 1$ djeljiv sa p .

RJEŠENJA:

$$1. \quad \sin(3xy) = -\frac{9+x^2}{6x} \Rightarrow -1 \leq -\frac{9+x^2}{6x} \leq 1.$$

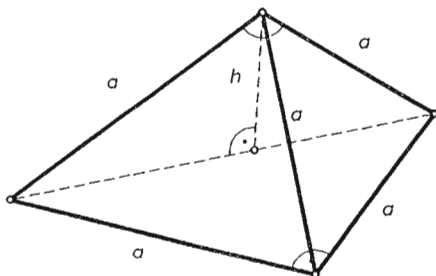
$$x > 0 \Rightarrow (x-3)^2 \leq 0 \Rightarrow x_1 = 3, \quad y_1 = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x < 0 \Rightarrow (x+3)^2 \leq 0 \Rightarrow x_2 = -3, \quad y_2 = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. $e = \frac{3V}{P}$, gdje je V volumen, a P oplošje tetraedra

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$P = 2 \cdot \frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow e = \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) a.$$



3. a) Iz $\Delta F_1 F_2 T$ je $4e^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1 \varrho_2 \cos \varphi$. Kod elipse je $\varrho_1 + \varrho_2 = 2a$, $e^2 = a^2 - b^2$. Slijedi: $\varrho_1^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2a\varrho_1 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + b^2 = 0$, odnosno

$$\varrho_1 = a \pm \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad \varrho_2 = a \mp \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

$$b) \left. \begin{array}{l} (x_0 + e)^2 + y_0^2 = \varrho_1^2 \\ (x_0 - e)^2 + y_0^2 = \varrho_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x_0 e = (\varrho_1 + \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_2) = \pm 2a \cdot 2 \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

$$\text{Dakle, } x_0 = \pm \frac{a}{e} \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad y_0 = \pm \frac{b^2}{e} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

$$4. \quad \begin{aligned} (n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+n) &= \frac{n!(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot 2n}{n!} = \\ &= \frac{(2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n)(1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1))}{n!} = 2^n \cdot (1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)). \end{aligned}$$

Budući je broj u zagradi neparan, tvrdnja zadatka je dokazana.

5. Za $p = 2$ možemo uzeti $x = 1$, $y = 2$. Neka je $p > 2$. Ako je $0 \leq a < b \leq \frac{p-1}{2}$, onda brojevi a^2 i b^2 daju različite ostatke pri djeljenu sa p . Zaista, ako bi bilo $a^2 = pq + r$, $b^2 = pt + r$, onda bi broj $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ bio djeljiv sa p . Međutim, $b+a < p$ i $b-a < p$, pa smo dobili kontradikciju. Dakle, brojevi $0^2, 1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ daju različite ostatke pri djeljenu sa p , a također i brojevi $-0^2 - 1, -1^2 - 1, -2^2 - 1, \dots, -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - 1$. Po Dirichletovom principu, između $p+1$ brojeva $-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - 1, -\left(\frac{p-3}{2}\right)^2 - 1, \dots, -2^2 - 1, -1^2 - 1, 0^2 - 1, 0, 1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ postoje dva koja daju iste ostatke pri dijeljenju sa p . Jedan od njih je oblika x^2 , a drugi $-y^2 - 1$. Tada je broj $x^2 + y^2 + 1$ djeljiv sa p .

28.9.1991.

1. Riješite jednažbu: $4 \cos x \cos 2x \cos 5x + 1 = 0$.

2. Zadana je kocka $ABCD A' B' C' D'$. Neka je P polovište dužine \overline{BC} , a Q središte kvadrata $CC' DD'$. Ravnina M koja sadrži točke A, P, Q dijeli zadanu kocku na dva dijela. Koliki je omjer volumena tih dvaju dijelova kocke?

3. Iz neke točke kružnice upisane u kvadrat vide se dijagonale tog kvadrata pod kutovima φ i ψ . Dokažite da je $\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \psi = 8$.

4. Neka je F fokus, a D bilo koja točka parabole $y^2 = 2px$ (različita od njezina tjemena). Neka je N nožište okomice spuštene iz D na direktrisu parabole. Dokažite da je tangenta parabole s diralištem u D simetrala kuta $\angle FDN$.

5. Dokažite da za svaki prirodan broj $n > 6$ postoje relativno prosti prirodni brojevi a i b , veći od 1, takav da je $n = a + b$.

RJEŠENJA:

$$1. \frac{2 \cos x \cos 2x}{\sin 2x} (\sin 3x - \sin 7x) = 1, \quad \frac{\cos x}{\sin 2x} (-\sin 9x - \sin 5x + \sin 5x + \sin x) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x} (\sin 9x + \sin x) = 0 \Rightarrow \frac{\sin 5x \cos 4x}{\sin x} = 0$$

$$1. \sin 5x = 0, \sin x \neq 0 \Rightarrow x_1 = \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}, 5 \nmid k.$$

$$2. \cos 4x = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2k+1}{8}\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

2. Neka je V_1 volumen krnje piramide $APCDST$, a V_2 volumen preostalog dijela kocke.

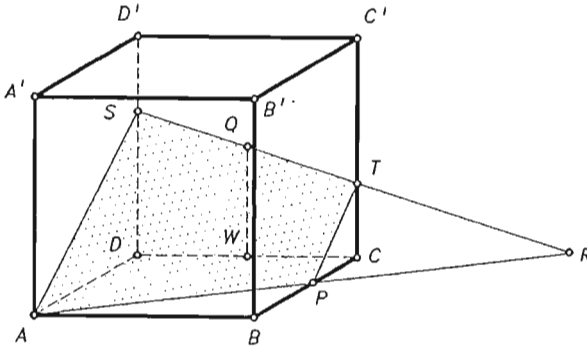
$$\triangle ARD \sim \triangle PRS \Rightarrow RC = DC = a$$

$$\triangle QWR \sim \triangle TCR \Rightarrow TC = \frac{2}{3}QW = \frac{a}{3}$$

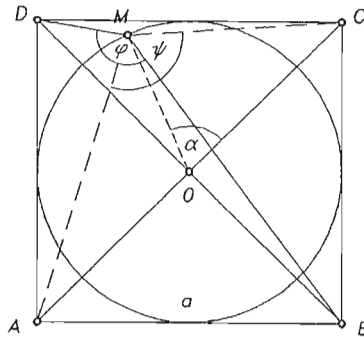
$$\triangle SDR \sim \triangle TCR \Rightarrow DS = 2TC = \frac{2a}{3}$$

$$V_1 = V_{ADSR} - V_{PSTR} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AD \cdot DS}{2} \cdot DR - \frac{1}{3} \cdot \frac{PC \cdot CT}{2} \cdot CR = \frac{7a^3}{36}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{7}{29}.$$



3. Neka je α kut između OM i AC . Kosinusov poučak primjenjen na $\triangle MOD$ i $\triangle MOB$ daje: $MD^2 = \frac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}\sin \alpha)$, $MB^2 = \frac{a^2}{4}(3 + 2\sqrt{2}\sin \alpha)$. Iz $\triangle BMD$ imamo: $\cos \varphi = \frac{MD^2 + MB^2 - BD^2}{2 \cdot MD \cdot MB} = -\frac{1}{\sqrt{9 - 8\sin^2 \alpha}}$, pa je $\operatorname{tg} \varphi = -2\sqrt{2}\cos \alpha$. Analogno dobivamo $\operatorname{tg} \psi = -2\sqrt{2}\sin \alpha$. Sada je $\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \psi = (-2\sqrt{2}\cos \alpha)^2 + (-2\sqrt{2}\sin \alpha)^2 = 8(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 8$.



4. Po definiciji parabole je $d(D, F) = d(D, N)$. Neka je S sjecište tangente s osi x . Iz jednadžbe tangente $yy_1 = p(x + x_1)$ slijedi: $S = (-x_1, 0)$ pa je $d(S, F) = \frac{p}{2} + x_1$.

$d(S, N) = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2} = x_1 + \frac{p}{2} \Rightarrow \triangle FDS \cong \triangle SDN \Rightarrow \sphericalangle FDS = \sphericalangle SDN$, što je i trebalo dokazati.

5. Svaki prirodan broj ima jedan od ovih oblika: $2k + 1, 4k, 4k + 2$. Za $n = 2k + 1, k > 2$, možemo uzeti $a = 2, b = 2k - 1$. U slučaju $n = 4k, k > 1$, traženi su brojevi $a = 2k - 1, b = 2k + 1$. Ako je pak $n = 4k + 2, k > 1$, onda su $a = 2k - 1, b = 2k + 3$.

23.10.1991.

1. Riješite jednadžbu: $\frac{\sin x + 2}{2 \cos x + 1} = \frac{\cos x + 2}{2 \sin x + 1}$.

2. U trostranoj piramidi (tetraedru) dva suprotna brida su 4 cm i 12 cm, a ostali bridovi su 7 cm. Izračunajte volumen piramide.

3. Zadana je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$). Nađite skup središta svih tetiva elipse koje prolaze kroz desni fokus $F_2(c, 0)$.

4. Odredite sve članove niza $a_n = 3^{2n-1} - 2^{n-1}$ koji su kvadrati nekog prirodnog broja.

5. Odredite sve cijele brojeve koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 3, pri dijeljenju sa 11 daju ostatak 2, dok pri dijeljenju sa 13 daju ostatak 1.

RJEŠENJA:

1. $2 \sin^2 x + 5 \sin x - 2 \cos^2 x - 5 \cos x = 0 \Rightarrow (\sin x - \cos x)(2 \sin x + 2 \cos x + 5) = 0$. Kako je $2 \sin x + 2 \cos x + 5 \geq -4 + 5 > 0$, mora biti $\sin x = \cos x$, tj. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Površina baze je $P = \frac{4 \cdot \sqrt{45}}{2} = 6\sqrt{5}$. Iz $\triangle CFB$ je $H^2 = 12^2 - (k + 3\sqrt{5})^2$, dok je iz $\triangle CFE$ $H^2 = (3\sqrt{5})^2 - k^2$. Izjednačavanjem dobivamo: $k = \frac{9}{\sqrt{5}}$, pa je $H = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

Dakle, $V = \frac{P \cdot H}{3} = \frac{6\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} = 24 \text{ cm}^3$.

$$2. \sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,$$

$$x_3 = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

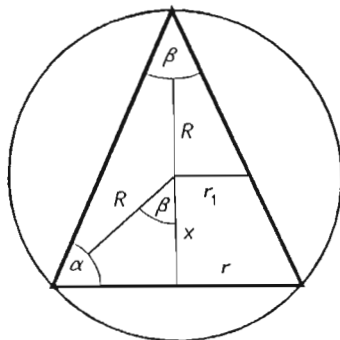
$$2. \frac{r^2 \pi(R+x)}{3} = 2 \cdot \frac{r_1^2 \pi \cdot R}{3} \Rightarrow r^2(R+x) = 2r_1^2 R.$$

$$\frac{r_1}{r} = \frac{R}{R+x} \Rightarrow r_1 = r \cdot \frac{R}{R+x}.$$

$$r^2(R+x) = 2r^2 \frac{R^3}{(R+x)^2} \Rightarrow (R+x)^2 = 2R^3 \Rightarrow x = R(\sqrt[3]{2} - 1).$$

$$\cos \beta = \frac{x}{R} = \sqrt[3]{2} - 1$$

$$\alpha = 90^\circ - \frac{1}{2} \arccos(\sqrt[3]{2} - 1) \approx 52^\circ 32'.$$



3. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Tangente u točkama $\left(\pm c, \pm \frac{b^2}{a}\right)$ su $\pm cx \mp ay = a^2$, pa su dvije i dvije paralelne. Njihova sjecišta su točke $T_1 = \left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$, $T_2 = (0, -a)$, $T_3 = \left(-\frac{a^2}{c}, 0\right)$,

$T_4 = (0, a)$. $d(T_1, T_2) = d(T_2, T_3) = d(T_3, T_4) = d(T_4, T_1) = \sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2 + a^2}$, pa tangente zatvaraju romb. $P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{c} \cdot 2a \cdot 1 = \frac{2a^3}{c} = \frac{2a^3}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

4. Neka je x najmanji od 8 uzastopnih brojeva. Tada je njihov produkt $P = x(x+1) \dots (x+7) = (x^2+7x)(x^2+7x+6)(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)$. Neka je $a = x^2+7x+6$. Tada je $P = (a-6)a(a+4)(a+6) = a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a = a^4 + 4a(a+3)(a-12)$. Pošto je $x \geq 1$, imamo $a = x^2+7x+6 \geq 14$, pa je $a-12 > 0$. Oдавде je $P > a^4$. Međutim, $P = a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a < a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 = (a+1)^4$. Dakle, $a^4 < P < (a+1)^4$, odakle slijedi tvrdnja zadatka.

5. Dokaz indukcijom. Za $n = 1$ imamo: $1 = 1$. Pretpostavimo da je $\sum_{d=1}^n \varphi(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \frac{n(n+1)}{2}$. Tada je $\sum_{d=1}^{n+1} \varphi(d) \left\lfloor \frac{n+1}{d} \right\rfloor = \sum_{d=1}^n \varphi(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor + \sum_{d|(n+1)} \varphi(d) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$$+ 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \text{ jer je za } d \nmid (n+1), \left\lfloor \frac{n+1}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \text{ i za } d \mid (n+1), \left\lfloor \frac{n+1}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor + 1, \text{ a } \sum_{d \mid n} \varphi(d) = n.$$

7.2.1992.

1. Neka su a, b, c pravci koji prolaze točkom P . Dokažite da postoji pravac d takav da je $s_a \circ s_b \circ s_c = s_d$. (s_a je osna simetrija s obzirom na pravac a)

2. Riješite jednadžbu: $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$.

3. U stožac je upisana kugla radijusa r . Nađite volumen stošca V ako je poznato da je ravnina koja dodiruje kuglu i okomita je na jednu izvodnicu udaljena od vrha stošca za d . Koliki je taj volumen ako je $r = 5$, $d = 17$?

4. U elipsu $x^2 + 2y^2 = 36$ upisan je jednakokrani trokut. Nađite koordinate njegovih vrhova ako mu osnovica leži na pravcu $y = -x + 6$.

5. Odredite sve cijele brojeve koji pri dijeljenju sa 4 daju ostatak 3, pri dijeljenju sa 13 daju ostatak 2, a pri dijeljenju sa 19 daju ostatak 5.

RJEŠENJA:

1. Ako je $a = b$, onda je $d = c$. Ako je $a \neq b$, onda postoji $Q \in c$, takva da je $s_a s_b s_c(Q) = Q' \neq Q$. Neka je d simetrala dužine $\overline{QQ'}$. $|PQ| = |PQ'|$ povlači da je $P \in d$. $s_d s_a s_b s_c(P) = s_d(P) = P$ i $s_d s_a s_b s_c(Q) = s_d(Q') = Q$. Odavde je ili $s_d \circ s_a \circ s_b \circ s_c = id \Rightarrow s_a \circ s_b \circ s_c = s_d$, ili je $s_d \circ s_a \circ s_b \circ s_c = s_c \Rightarrow s_a \circ s_b = s_d$, što ne može biti.

2. $\sin(\pi \cos x) - \cos(\pi \sin x) =$

$$= -2 \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \pi \cos x + \pi \sin x}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \pi \cos x - \pi \sin x}{2} = 0.$$

1. $\frac{\pi}{2} - \pi \cos x + \pi \sin x = 2k\pi, \quad \frac{1}{2} + \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 2k \Rightarrow k = 0,$

pa je $x_1 = \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + 2m\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$

2. $\frac{\pi}{2} - \pi \cos x - \pi \sin x = 2k\pi \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$

pa je $x_3 = -\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + 2m\pi, \quad x_4 = \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$

3. Četverokut $COFD$ je kvadrat sa stranicom r .

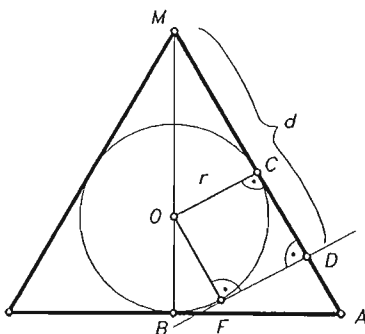
$$MB = OB + OM = r + \sqrt{r^2 + (d-r)^2}$$

$$\triangle ABM \sim \triangle OCM \Rightarrow \frac{AB}{OC} = \frac{MB}{MC}$$

$$AB = OC \cdot \frac{MB}{MC} = r \cdot \frac{r + \sqrt{r^2 + (d-r)^2}}{d-r}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi AB^2 \cdot MB = \frac{1}{3} \pi r^2 \frac{[r + \sqrt{r^2 + (d-r)^2}]^3}{(d-r)^2}$$

Za $r = 5$, $d = 17$ dobivamo: $V = \frac{675}{2}\pi$.



4. Presjek pravca $y = -x + 6$ i elipse $x^2 + 2y^2 = 36$ su točke $A = (6, 0)$ i $B = (2, 4)$. Simetrala dužine \overline{AB} je pravac $y = x - 2$. Treća točka trokuta mora ležati i na elipsi i na simetrali dužine \overline{AB} . Dobivamo dva rješenja: $C_1 = (-2, -4)$, $C_2 = \left(\frac{14}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

5. $x \equiv 3 \pmod{4}$, $x \equiv 2 \pmod{13}$, $x \equiv 5 \pmod{19}$

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 988 = 4 \cdot 247 = 13 \cdot 76 = 19 \cdot 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1 = 247, \quad M_2 = 76, \quad M_3 = 52$$

$$M_1 \cdot M'_1 \equiv 1 \pmod{4}, \quad M_2 \cdot M'_2 \equiv 1 \pmod{13}, \quad M_3 \cdot M'_3 \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M'_1 = 3, \quad M'_2 = 6, \quad M'_3 = 15$$

$$x_0 = 247 \cdot 3 \cdot 3 + 76 \cdot 6 \cdot 2 + 52 \cdot 15 \cdot 5 = 7035 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \equiv 119 \pmod{988}$$

7.3.1992.

1. Zadan je konveksan četverokut $ABCD$ i krugovi K_1, K_2, K_3, K_4 čiji su dijametri stranice četverokuta. Da li se svaka točka T četverokuta nalazi u barem jednom krugu? Obrazložite odgovor.

2. a) Koliko rješenja ima jednadžba $\sin \frac{\pi}{x} = 1$ na intervalu $(0.001, 0.002)$?

b) Riješite jednadžbu: $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0$.

3. U pravilnu četverostranu piramidu postavljene su dvije kugle. Veća kugla dodiruje osnovicu i pobočke piramide, a manja kugla dodiruje veću kuglu i pobočke piramide. Izračunajte volumen piramide ako su radijusi kugala $r_1 = 2$ i $r_2 = 1$.

4. Zadana je kružnica k sa središtem O i radijusom r . Neka je \overline{AB} jedan dijametar, a M jedna točka na kružnici. Točka Q je ortogonalna projekcija točke M na pravac AB , točka N je polovište dužine \overline{MQ} , a točka D presjek kružnice k i pravca AN . Odredite geometrijsko mjesto presjeka P pravaca BD i QM kada točka M prolazi kružnicom k .

5. Dano je k prirodnih brojeva $a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$, $k > \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Dokažite da postoje i, j takvi da je $a_i + a_j = n$.

RJEŠENJA:

1. Suma kuteva $\sphericalangle ATB$, $\sphericalangle BTC$, $\sphericalangle CTD$ i $\sphericalangle DTA$ je 360° , pa je barem jedan od njih $\geq 90^\circ$. No tada se po Talesovom poučku (kut nad promjerom je pravi) točka T nalazi u krugu nad stranicom kojoj odgovara taj kut.

2. a) $\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2}{1+4k}$. Tada je $0.001 < \frac{2}{1+4k} < 0.002$ ekvivalentno s $\frac{999}{4} \leq k \leq \frac{1999}{4}$, pa slijedi da ima 250 rješenja.

b)

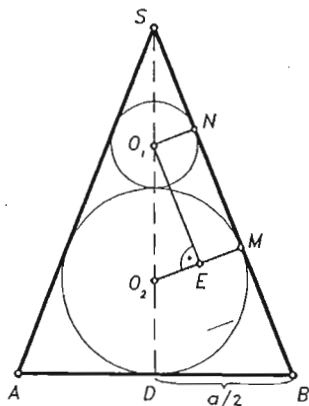
$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 4x) + (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x) = \frac{\sin 5x(\cos x \cos 4x + \cos 2x \cos 3x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x}$$

$$x_1 = \frac{k\pi}{5}, \quad x_{2,3} = \frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{17}}{\sqrt{8}} + 2k\pi, \quad x_{4,5} = -\frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} + 2k\pi.$$

3. $|MN| = 2\sqrt{2} \Rightarrow |O_1S| = 6 \Rightarrow H = 8$

$$\frac{a}{2} : 8 = 1 : 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$$

$$V = \frac{a^2 H}{3} = \frac{256}{3}$$



4. Smjestimo kružnicu u koordinatnu ravninu, tako da je O ishodište, a promjer \overline{AB} na osi x , tj. $A = (-r, 0)$, $B = (r, 0)$. Neka je $M = (a, \sqrt{r^2 - a^2})$. Tada redom imamo (nacrtajte sliku): $Q = (a, 0)$, $N = \left(a, \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - a^2}\right)$, $D = \left(\frac{r(3r+5a)}{3a+5r}, \frac{4r\sqrt{r^2 - a^2}}{3a+5r}\right)$, $P = (a, 2\sqrt{r^2 - a^2})$. Zbog uvjeta na P odavde slijedi $y_P^2 = 4(r^2 - a^2) = 4(r^2 - x_P^2)$, pa je traženo geometrijsko mjesto točke elipsa

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{(2r)^2} = 1.$$

5. Promatramo $2k - 1 > n$ brojeva

$$a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1, a_1, a_2, \dots, a_k.$$

Po Dirichletovom principu neka dva među njima moraju biti jednaki. Kako je $a_i \neq a_j$, slijedi da je $a_j - a_1 = a_i$, tj. $a_i + a_1 = a_j$ za neke i, j .

4.4.1992.

1. Riješite jednadžbu: $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right) = \frac{1}{x^2} + x^2$.

2. Baza piramide je pravokutnik sa stranicama a i b , ($a > b$). Kutevi pri vrhu piramide koji odgovaraju stranicama a i b odnose se kao 3:1. Odredite volumen piramide ako su joj svi bočni bridovi jednaki. Specijalno, izračunajte volumen za $a = 5$, $b = 2$.

3. Točka $M\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ je polovište tetive elipse $x^2 + 4y^2 = 25$. Odredite duljinu te tetive.

4. Odredite ostatak pri dijeljenju broja $2^{70} + 3^{70} + 4^{70}$ sa 13.

5. Odredite sve prirodne brojeve n takve da je broj $n^4 + 4$ prost.

RJEŠENJA:

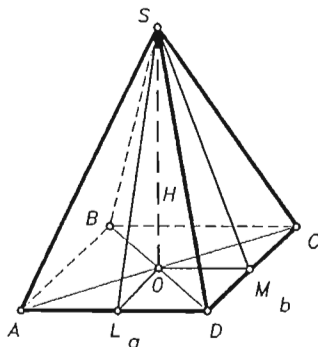
1. Budući je $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right) \leq 2$, a $\frac{1}{x^2} + x^2 = \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 + 2 \geq 2$, to mora biti $\frac{1}{x^2} + x^2 = 2$, odnosno $\frac{1}{x} - x = 0$, tj. $x = 1$ ili $x = -1$. Za $x = 1$ je $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right) = -2$, a za $x = -1$ je $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)\right) = 2$, pa je rješenje dane jednadžbe $x = -1$.

2. $V_{SABCD} = S_{ABCD} \cdot \frac{H}{3} = \frac{abH}{3}$, $\sphericalangle DSC = \alpha$, $\sphericalangle ASD = 3\alpha$

Iz $\triangle DSM$ je $SM = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, a iz $\triangle LSD$ je $SL = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{3\alpha}{2}$

Iz $\triangle SOM$ i $\triangle SOL$ je $SO^2 = \frac{b^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{3\alpha}{2} - \frac{b^2}{4}$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{\sin^2 \frac{3\alpha}{2}}$$



$$a \sin \frac{\alpha}{2} = b \sin \frac{\alpha}{2} \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3b-a}{4b} \Rightarrow \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{b+a}{3b-a}.$$

$$V(a, b) = \frac{ab}{6} \sqrt{\frac{a^3 - 3a^2b + ab^2 + b^3}{3b-a}}, \quad V(5, 2) = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

3. Jednadžbu tetive $y = k \left(x - \frac{3}{2} \right) + 1$ uvrstimo u jednadžbu elipse. Dobivamo: $x^2 + 4k^2 \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + 8k \left(x - \frac{3}{2} \right) + 4 = 25$. Iz $x_1 + x_2 = 3 = \frac{-8k + 12k^2}{1 + 4k^2}$ slijedi $k = -\frac{3}{8}$. Sada iz $4x^2 - 12x - 39 = 0$ dobivamo presječne točke tetive i elipse:

$$P = \left(\frac{3 - 4\sqrt{3}}{2}, \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2} \right), \quad Q = \left(\frac{3 + 4\sqrt{3}}{2}, \frac{4 - 3\sqrt{3}}{4} \right).$$

Stoga je duljina tetive $|PQ| = \frac{1}{2}\sqrt{219}$.

4. Prema malom Fermatovom poučku je

$$2^{70} = 2^{60} \cdot 2^{10} = (2^{15})^4 \cdot (32)^2 \equiv 1 \cdot 6^2 \equiv 10 \pmod{13}$$

$$3^{70} = 3^{69} \cdot 3 = (3^3)^{23} \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$4^{70} = (2^{70})^2 \equiv 100 \equiv 9 \pmod{13}$$

Prema tome, broj $2^{70} + 3^{70} + 4^{70}$ pri dijeljenju sa 13 daje ostatak 9.

5. Jedini takav broj je $n = 1$, jer je $1^4 + 4 = 5$ prost, a za $n \geq 2$ je broj $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 2) \cdot (n^2 + 2n + 2)$ složen.

25.6.1992.

1. a) Odredite sve realne brojeve a za koje jednadžba $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ ima realnih rješenja.

b) Riješite jednadžbu: $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

2. Zadana je četverostrana piramida čija je baza pravokutnik površine P . Pobočni bridovi piramide su jednaki i s ravninom baze zatvaraju kut od 45° . Kut među dijagonalama baze je 60° . Nađite volumen piramide.

3. Neka je $\triangle ABC$ pravokutni trokut s pravim kutem u vrhu C , D nožište visine iz vrha C , te k kružnica opisana trokutu ABC . Neka je O_1 središte kružnice koja dira dužine AD i CD i kružnicu k , O_2 središte kružnice koja dira dužine BD i CD i kružnicu k , a S polovište dužine O_1O_2 . Dokažite da je S središte upisane kružnice trokuta ABC .

4. Neka je $m \geq 2$ prirodan broj i neka je S m -član i podskup skupa $\{2, 3, 4, \dots, m^2\}$. Ako su elementi skupa S u parovima relativno prosti, onda S sadrži barem jedan prost broj. Dokazati!

5. Dokažite da je za bilo koje prirodne brojeve m i n broj $\frac{(m \cdot n)!}{(m!)^n \cdot n!}$ prirodan.

RJEŠENJA:

$$1. \ a) \quad \sin^4 x + \cos^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2x) =$$

$$= \frac{3 + \cos 4x}{4} = a \Leftrightarrow \cos 4x = 4a - 3.$$

Da bi ova jednadžba imala realnih rješenja nužno je i dovoljno da bude $|4a - 3| \leq 1$, odnosno $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x(1 - \sin x) + \cos^2 x(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x(1 - \sin x) = 0$ & $\cos^2 x(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x = 0, \cos x = 1)$ ili $(\sin x = 1, \cos x = 0) \Leftrightarrow x_1 = 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Neka je piramida $SABCD$, O središte baze, a x, y stranice baze. Tada je (nacrtajte sliku):

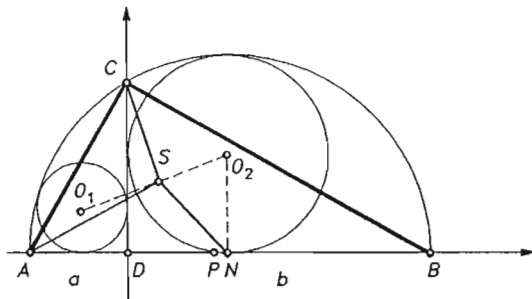
$$\sphericalangle SAO = \sphericalangle SBO = \sphericalangle SCO = \sphericalangle SDO = 45^\circ \Rightarrow AO = BO = CO = DO = SO = h.$$

$$\sphericalangle AOD = 60^\circ \Rightarrow h = x, (2x)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = x\sqrt{3}.$$

$$x \cdot y = P \Rightarrow x^2\sqrt{3} = P \Rightarrow x = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt[3]{3}}.$$

$$V = \frac{1}{3}Ph = \frac{1}{9}P\sqrt{P}\sqrt[3]{27}.$$

3. Zadatak ćemo riješiti analitički, tako da ishodište stavimo u D . Dakle, $D(0, 0)$, $A(-a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, \sqrt{ab})$, $P\left(\frac{b-a}{2}, 0\right)$,



$$O_1(-x, x), O_2(y, y), d(P, O_1) = d(P, A) - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b-a}{2} + x\right)^2 + x^2 = \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - (b+a)x + x^2 \Rightarrow x = -b + \sqrt{b^2 + ab}.$$

$$d(P, O_2) = d(P, B) - y \Rightarrow y = -a + \sqrt{a^2 + ab}$$

$$S\left(\frac{y-x}{2}, \frac{x+y}{2}\right), N(y, 0), \operatorname{tg}(\sphericalangle ANS) = \frac{\frac{x+y}{2}}{y - \frac{y-x}{2}} = 1 \Rightarrow \sphericalangle ANS = 45^\circ$$

$$d^2(A, C) = a^2 + ab = (a+y)^2 = d^2(A, N) \Rightarrow d(A, C) = d(A, N)$$

$$\frac{x+y}{y-x+2a} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{-y} = -\frac{\sqrt{a+b}(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b})}{\sqrt{a+b}(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a+b})} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}(-\sqrt{a} + \sqrt{a+b})} = -1$$

$$\Rightarrow AS \perp CN \Rightarrow d(S, C) = d(S, N) \Rightarrow \triangle ASC \cong \triangle ASN$$

$$\Rightarrow \sphericalangle SAN = \sphericalangle CAS \text{ i } \sphericalangle SCA = \sphericalangle ANS = 45^\circ.$$

Stoga je S sjecište simetrala kutova, pa je S središte upisane kružnice.

4. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq \{2, 3, 4, \dots, m^2\}$ i neka su svi a_i složeni. Neka je p_i najmanji prosti faktor od a_i . Tada je $p_i \leq \sqrt{a_i} \leq \sqrt{m^2} = m$. Stoga su p_1, p_2, \dots, p_m brojevi između 2 i m , pa po Dirichletovom principu među njima postoje dva jednaka, recimo p_j i p_k . No, tada a_j i a_k nisu relativno prosti. Kontradikcija.

5. Dovoljno je dokazati da je $K = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - n \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \geq 0$, za sve proste brojeve p . Neka su r, s odabrani tako da je $p^r \leq n < p^{r+1}$, $p^s \leq m < p^{s+1}$. Tada je

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=s+1}^{r+s} \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=r+s+1}^{\infty} \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^r \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - n \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor = \\ &= \sum_{i=1}^s \left(\left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \right) + \sum_{i=1}^r \left(\left\lfloor \frac{mn}{p^{s+i}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \right) + \sum_{i=r+s+1}^{\infty} \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^s \left(\left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \right) + \sum_{i=1}^r \left(\left\lfloor \frac{np^s}{p^{s+i}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \right) = \sum_{i=1}^s \left(\left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \right) \geq 0, \end{aligned}$$

jer je $\lfloor x \cdot y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor$.

4.9.1992.

1. Za koje realne brojeve m jednačba $\sin x \cos x - \sin x - \cos x + m = 0$ ima barem jedno realno rješenje?

2. Plašt uspravnog krnjeg stošca ima površinu 10 cm^2 . Izračunajte površinu osnog presjeka (trapez) tog stošca ako prikloni kut α izvodnice prema ravnini veće baze zadovoljava jednačbu $\cos \alpha - \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4} = 0$.

3. Odredite geometrijsko mjesto polovišta svih dužina \overline{AB} , gdje su A i B točke u kojima bilo koji pravac kroz ishodište siječe pravce $x + y - 1 = 0$ i $x - y + 1 = 0$. Koja je to krivulja?

4. Dva dvoznamenkasta broja zapisana jedan za drugim tvore četveroznamenkasti broj koji je djeljiv s njihovim produktom. Nađite sve parove brojeva s ovim svojstvom.

5. a) Riješite kongruenciju: $1296 \equiv 1105 \pmod{2413}$.

b) Riješite kongruenciju: $6x^3 + 27x^2 + 17x + 20 \equiv 0 \pmod{30}$.

RJEŠENJA:

1. Stavimo: $x = \frac{\pi}{4} + u$. Tada je $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin u + \cos u)$, $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos u - \sin u)$, pa dobivamo: $2 \cos^2 u - 2\sqrt{2} \cos u + 2m - 1 = 0$. Odavde je $(\cos u)_{1,2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 16m + 8}}{4} = \frac{\sqrt{2} \pm 2\sqrt{1-m}}{2}$. Prema tome, da bi dana jednačba imala rješenja nužno je i dovoljno da bude $\frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{1-m}}{2} \geq -1$, odnosno $2\sqrt{1-m} \leq 2 + \sqrt{2}$. Imamo najprije da je $m \leq 1$,

a nakon kvadriranja dobivamo i $m \geq -\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$. Dakle, $m \in \left[-\frac{2\sqrt{2}+1}{2}, 1\right]$.

2. Površina plašta je $P = (R+r) \cdot s\pi$, a površina osnog presjeka je $S = h \cdot (R+r)$, gdje je h visina, R i r polumjeri osnovica, a s duljina izvodnice krnjeg stošca.

$$\frac{S}{P} = \frac{h}{s\pi} = \frac{\sin \alpha}{\pi} \Rightarrow S = \frac{P \sin \alpha}{\pi}.$$

Uvrštavanjem $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ dobivamo $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} = 0$, odnosno $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$. Dakle, $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{12+2\sqrt{3}}$, pa je $S = \frac{10}{\pi} \cdot \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{12+2\sqrt{3}} \approx 1.145 \text{ cm}^2$.

3. $y = kx \Rightarrow A\left(\frac{1}{k+1}, \frac{k}{k+1}\right), B\left(\frac{1}{k-1}, \frac{k}{k-1}\right)$, pa su koordinate polovišta

$$x = \frac{k}{k^2-1}, \quad y = \frac{k^2}{k^2-1}. \text{ Eliminacijom parametra } k \text{ dobivamo:}$$

$$x = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2}-1} = \frac{yx}{y^2-x^2}, \text{ tj. } \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{1}{4}, \text{ što predstavlja hiperbolu.}$$

4. Neka su traženi brojevi x i y . Tada mora vrijediti da je $100x + y = kxy$, $k \in \mathbb{N}$. Odavde slijedi da je y djeljivo sa x , dakle $y = x \cdot u$, $u \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Uvrštavanjem dobivamo: $100 = u(kx - 1)$, što povlači da je $u \in \{1, 2, 4, 5\}$ i da je $k > 1$. Imajući ovo u vidu, dobivamo da za $u = 1$ i $u = 5$ nema rješenja, za $u = 2$ dobivamo $2kx = 102 \Rightarrow x = 17, y = 34$, dok za $u = 4$ dobivamo $4kx = 104 \Rightarrow x = 13, y = 52$. Dakle, sva rješenja su uređeni parovi $(17, 34)$ i $(13, 52)$.

5. a)

$$\begin{aligned} 1296x &\equiv -1308 \pmod{2413} \Leftrightarrow 324x \equiv -327 \pmod{2413} \Leftrightarrow 81x \equiv -685 \pmod{2413} \\ &\Leftrightarrow 81x \equiv 1728 \pmod{2413} \Leftrightarrow 3x \equiv 64 \pmod{2413} \Leftrightarrow x \equiv 1630 \pmod{2413} \end{aligned}$$

$$\text{b) } 6x^3 + 27x^2 + 17x + 20 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow x \equiv 0, 1 \pmod{2}$$

$$6x^3 + 27x^2 + 17x + 20 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv -1 \pmod{3}$$

$$6x^3 + 27x^2 + 17x + 20 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 0, 1, 2 \pmod{5}$$

Dakle, imamo 6 rješenja koja zadovoljavaju sustave $x \equiv 2, 5 \pmod{6}$, $x \equiv 0, 1, 2 \pmod{5}$, a to su: $x \equiv 2, 5, 11, 17, 20, 26 \pmod{30}$.

3.10.1992.

1. Neka su a, b, c, d pravci koji prolaze točkom P , te neka su r_1 i r_2 izometrije ravnine takve da je $r_1 = s_a \circ s_b$, $r_2 = s_c \circ s_d$. Dokažite da vrijedi: $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$.

2. Riješite jednačinu: $\text{tg } 5x - 2 \text{tg } 3x = \text{tg } 5x \cdot \text{tg}^2 3x$.

3. Baza trostrane piramide je jednakostraničan trokut stranice a , dok pobočni bridovi imaju duljinu b . Nadite (u funkciji od a i b) polumjer sfere koja dodiruje sve bridove piramide.

4. Zadana je elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ($a > b$) i točka D na njoj. Tangenta elipse s diralištem u točki D siječe os y u točki T , a normala kroz D os y u točki N . Dokažite da fokusi zadane elipse leže na kružnici koja prolazi točkama D , T , i N .

5. Neka je $k \in \mathbb{N}$ i $S = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = k\}$. Izračunajte: $\sum_{n \in S} \mu(n)$. Ovdje su φ i μ Eulerova, odnosno Möbiusova funkcija.

RJEŠENJA:

1. Treba dokazati da je $s_a \circ s_b \circ s_c \circ s_d = s_c \circ s_d \circ s_a \circ s_b$, tj. $s_a \circ s_b \circ s_c \circ s_d \circ s_b \circ s_a \circ s_d \circ s_c = 1_M$. Postoje pravci e i f kroz točku P takvi da je $s_a \circ s_b \circ s_c = s_e$ i $s_c \circ s_d \circ s_c = s_f$. Sada je: $s_a \circ s_b \circ s_c \circ s_d \circ s_b \circ s_a \circ s_d \circ s_c = s_e \circ s_f \circ s_e \circ s_f = 1_M$.

2. $\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x(1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x)$, $\operatorname{tg} 2x = \frac{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x}$ Budući je $1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x \neq 0$ (jer $1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 3x = -1$), dobivamo: $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 2x \Rightarrow 3x = 2x + k\pi \Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

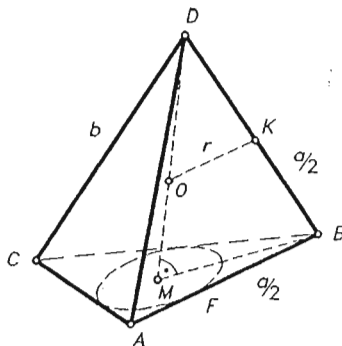
3. Neka je O središte te sfere. Tada uz oznake kao na slici imamo

$$\triangle DOK \sim \triangle DMB \Rightarrow \frac{OK}{MB} = \frac{DK}{DM}, \quad OK = r, \quad MB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$DK = DB - BK = DB - BF = b - \frac{a}{2}$$

$$DM = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$$

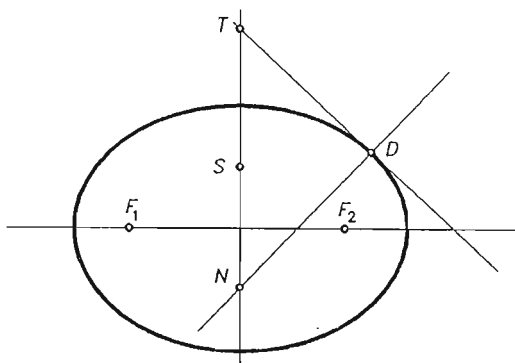
$$\text{Prema tome, } r = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}} = \frac{a(2b - a)}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}.$$



4. Ako su koordinate točke $D(p, q)$, onda su jednadžbe tangente i normale:

$$b^2px + a^2qy - a^2b^2 = 0, \quad y - q = \frac{a^2q}{b^2p}(x - p),$$

$$\text{pa je } T\left(0, \frac{b^2}{q}\right), \quad N\left(0, \frac{q}{b^2(b^2 - a^2)}\right).$$



Središte opisane kružnice pravokutnog $\triangle DTN$ je $S\left(0, \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{q} + \frac{q}{b^2}(b^2 - a^2)\right)\right)$.

Da bi fokusi elipse ležali na ovoj kružnici mora vrijediti:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{q} - \frac{q}{b^2}(b^2 - a^2)\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{q} + \frac{q}{b^2}(b^2 - a^2)\right)\right]^2 + (a^2 - b^2), \text{ odnosno}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2} + a^2 - b^2, \text{ što je očitó zadovoljeno.}$$

5. Dovoljno je promatrati samo one $n \in S$ koji nisu djeljivi s kvadratom prirodnog broja većeg od 1 (za ostale je $\mu(n) = 0$). Neka je $n_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m$, gdje su p_i različiti neparni prosti brojevi, te $\varphi(n_1) = k$. Tada je $\varphi(2n_1) = \varphi(2) \cdot \varphi(n_1) = \varphi(n_1) = k$. Vrijedi: $\mu(n_1) + \mu(2n_1) = (-1)^m + (-1)^{m+1} = 0$. Prema tome je $\sum_{n \in S} \mu(n) = 0$.

5.12.1992.

1. a) Riješite jednadžbu: $3 \sin^2 x = 2 \sin 2x - 1$.

b) Riješite jednadžbu: $\cos(\sin x) = \sin(\cos x)$.

2. Među piramidama koje imaju sve bridove jednake a , nađite volumen one koja ima najveći broj bridova.

3. Odredite koordinate vrhova trokuta ABC ako je poznata jednadžba pravca na kojem leži stranica AB $3x - 5y + 3 = 0$, polovište $P(1, 5)$ stranice \overline{BC} i jednadžba simetrale kuta γ $5x + y + 3 = 0$.

4. Odredite sve proste brojeve p takve da je zbroj svih prirodnih djelitelja broja p^4 jednak kvadratu nekog prirodnog broja.

5. a) Riješite kongruenciju $1215x \equiv 560 \pmod{2755}$.

b) Riješite sustav kongruencija: $x \equiv 3 \pmod{4}$, $x \equiv 5 \pmod{13}$, $x \equiv 4 \pmod{19}$.

RJEŠENJA:

1. a) $4 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0 \Rightarrow 4 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } & \cos(\sin x) - \sin(\cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) - \sin(\cos x) = \\ & = 2 \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \sin x + \cos x}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x}{2} > 0, \text{ jer je } \sin x + \cos x \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}, \text{ pa stoga} \\ & \text{jednadžba nema rješenja.} \end{aligned}$$

2. Ako je baza pravilni n -terokut, onda uz $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$ imamo:

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n \cdot \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}\right)^2}{2} \cdot \sin \varphi \cdot a \sqrt{1 - \frac{1}{\left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2}}.$$

Da bi takva piramida postojala mora biti: $2 \sin \frac{\varphi}{2} > 1 \Leftrightarrow \frac{\varphi}{2} > 30^\circ \Leftrightarrow \frac{360^\circ}{n} > 60^\circ \Leftrightarrow n \leq 5$. Dakle, za $n = 5$,

$$V = \frac{5}{24} a^3 \cdot \frac{\cos 36^\circ}{\sin^2 36^\circ} \sqrt{4 \sin^2 36^\circ - 1} = \frac{5 + \sqrt{5}}{24} a^3 \approx 0,3015 a^3.$$

3. Uz $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ imamo:

$$\begin{aligned} 3b_1 - 5b_2 + 3 &= 0, & 5c_1 + c_2 + 3 &= 0, & b_1 + c_1 &= 2, & b_2 + c_2 &= 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow b_1 &= 4, & b_2 &= 3, & c_1 &= -2, & c_2 &= 7. \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle(s_\gamma, BC) = \frac{-\frac{2}{3} + 5}{1 + \frac{10}{3}} = \frac{13}{13} = 1 \Rightarrow \sphericalangle C = 90^\circ, \text{ pa je stoga}$$

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{a_2 - 7}{a_1 + 2} = -1 \Rightarrow 2a_2 - 14 = 3a_1 + 6 = 5a_2 + 3 \Rightarrow a_2 = -\frac{17}{3}, a_1 = -\frac{94}{9}$$

Dakle, $A\left(-\frac{94}{9}, -\frac{17}{3}\right)$, $B(4, 3)$, $C(-2, 7)$.

4.

$$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = x^2 \Rightarrow 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4x^2$$

$$4x^2 > 4p^4 + 4p^3 + p^2 = (2p^2 + p)^2$$

$$4x^2 < 4p^4 + 4p^3 + 9p^2 + 4p + 4 = (2p^2 + p + 2)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 = (2p^2 + p + 1)^2 \Rightarrow 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$$

$$\Rightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Rightarrow p = 3.$$

5. a) $M(1215, 2755) = 5$, $243x \equiv (\text{mod } 551)$

q		2	3	1	2	1	4	1	2
P_s	1	2	7	9	25	34	161	195	551

$n = 8$, $P_{n-1} = 195$, $b = 112 \Rightarrow x \equiv -195 \cdot 112 \equiv 200 (\text{mod } 551)$.

Rješenje: $x \equiv 200, 751, 1302, 1853, 2404 (\text{mod } 2755)$.

- b) $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 988 = 4 \cdot 247 = 13 \cdot 76 = 19 \cdot 52 \Rightarrow$
 $\Rightarrow M_1 = 247, M_2 = 76, M_3 = 52$
 $M_1 \cdot M'_1 \equiv 1 \pmod{4}, M_2 \cdot M'_2 \equiv 1 \pmod{13}, M_3 \cdot M'_3 \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow$
 $\Rightarrow M'_1 = 3, M'_2 = 6, M'_3 = 15.$
 $x_0 = 247 \cdot 3 \cdot 3 + 76 \cdot 6 \cdot 5 + 52 \cdot 15 \cdot 4 = 7623 \Rightarrow x \equiv 707 \pmod{988}.$

19.2.1993.

- Riješite jednadžbu: $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -\frac{7}{2}.$
- Zadan je trokut ABC sa stranicama a, b, c . Tri kugle koje se dodiruju međusobno, diraju ravninu u kojoj leži dani trokut u točkama A, B i C . Odredite radijuse tih kugala.
- Točke $A(-1, 5), B(3, 2)$ su vrhovi, a $H(5, -3)$ ortocentar trokuta ABC . Koje su koordinate težišta T tog trokuta?
- Neka je A zbroj znamenaka broja 4444^{4444} , a B zbroj znamenaka broja A . Nađite zbroj znamenaka broja B .
- Neka je $\varphi(n)$ Eulerova funkcija, a $s(n)$ zbroj svih prirodnih djelitelja broja n . Dokažite da za svaki prirodan broj vrijedi nejednakost: $\varphi(n) + s(n) \geq 2n$. Za koje brojeve vrijedi jednakost?

RJEŠENJA:

$$1. \quad (\sin x + \cos x) \left(1 + \frac{1}{\sin x \cos x} \right) + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = -\frac{7}{2},$$

$$\sin 2x = t, \quad (\sin x + \cos x)^2 = 1 + t$$

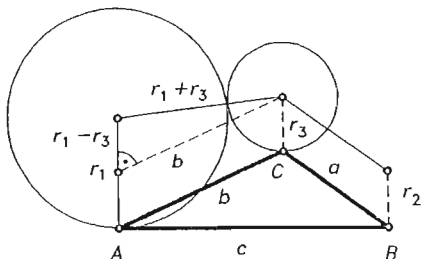
$$(1+t) \left(\frac{t}{2} + 1 \right)^2 = \left(-\frac{7t}{4} - 1 \right)^2 \Rightarrow 4t^2 - 29t - 24 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{4}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4} + k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \quad b^2 = (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 = 4r_1 r_3. \quad \text{Analogno je } a^2 = 4r_2 r_3, \quad c^2 = 4r_1 r_2.$$

$$\text{Stoga je } a^2 b^2 c^2 = 64 r_1^2 r_2^2 r_3^2 \Rightarrow abc = 8r_1 r_2 r_3 \Rightarrow \frac{8r_1 r_2 r_3}{4r_1 r_3} = \frac{abc}{b^2} \Rightarrow r_2 = \frac{ac}{2b}.$$

$$\text{Analogno je } r_1 = \frac{bc}{2a}, \quad r_3 = \frac{ab}{2c}.$$



3. Neka je $C(c, d)$. Iz $BH \perp AC$ i $AH \perp BC$ slijedi:

$$\frac{d-5}{c+1} = \frac{2}{5} \text{ i } \frac{d-2}{c-3} = \frac{3}{4} \Rightarrow d = \frac{83}{7}, \quad c = \frac{113}{7} \Rightarrow T\left(\frac{127}{21}, \frac{44}{7}\right).$$

4. Neka je C traženi broj. Budući je $4444^{4444} < 10000^{4444}$ broj znamenaka broja 4444^{4444} nije veći od $4 \cdot 4444 < 20000$. Zato je $A < 9 \cdot 20000 = 180000$. Stoga je $B \leq 9 \cdot 5 = 45$ i $C \leq 12$. S druge strane, $4444 \equiv -2 \pmod{9}$, $4444^{4444} \equiv (-2)^{4444} = 2^{3 \cdot 1481 + 1} = 2 \cdot 8^{1481} \equiv 2 \cdot (-1)^{1481} \equiv -2 \pmod{9}$. Zbroj znamenaka nekog broja pri dijeljenju sa 9 daje isti ostatak kao taj broj, pa je $C \equiv B \equiv A \equiv 4444^{4444} \equiv -2 \equiv 7 \pmod{9}$. Iz $C \equiv 7 \pmod{9}$ i $C \leq 12 \Rightarrow C = 7$.

5. Za $n = 1$ je $\varphi(1) + s(1) = 2 = 2 \cdot 1$. Za $n > 1$ je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, pa imamo:

$$\begin{aligned} \varphi(n) + s(n) &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) + \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} = \\ &= n \left[\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) + \frac{1 - \frac{1}{p_1^{\alpha_1+1}}}{1 - \frac{1}{p_1}} \dots \frac{1 - \frac{1}{p_k^{\alpha_k+1}}}{1 - \frac{1}{p_k}} \right] \geq \\ &\geq n \left[\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) + \frac{1 - \frac{1}{p_1^2}}{1 - \frac{1}{p_1}} \dots \frac{1 - \frac{1}{p_k^2}}{1 + \frac{1}{p_k}} \right] = \\ &= n \left[\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) + \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k}\right) \right] \geq 2n. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$ ili je n prost broj.

3.4.1993.

1. Riješite jednadžbu: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

2. U uspravni stožac, s kutom α pri vrhu osnog presjeka, upisana je kugla polumjera r . Ravnina koja prolazi točkama dodira kugle i stošca dijeli zadani stožac na dva dijela jednakih volumena. Odredite kut α .

3. Točkom $C(2, 4)$ prolaze dva međusobno okomita pravca. Prvi siječe os x u točki A , a drugi os y u točki B . Odredite geometrijsko mjesto polovišta dužine \overline{AB} sko pravci rotiraju oko točke C , ostajući pritom međusobno okomiti.

4. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left\lfloor \frac{n - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor; \\ \text{b) } & \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor = n. \end{aligned}$$

5. a) Riješite kongruenciju: $729x \equiv 168 \pmod{1653}$

b) Riješite sustav kongruencija: $x \equiv 3 \pmod{7}$, $x \equiv 2 \pmod{11}$, $x \equiv 10 \pmod{13}$.

RJEŠENJA:

$$1. \quad 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x - 2 \cos 2x \cos x - \cos 2x = 0, \\ (\sin 2x - \cos 2x)(2 \cos x + 1) = 0.$$

$$1) \quad \sin 2x = \cos 2x \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},$$

$$2) \quad 2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \quad V = 2V_1, \quad V = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot OB, \quad V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot CD^2 \cdot BD$$

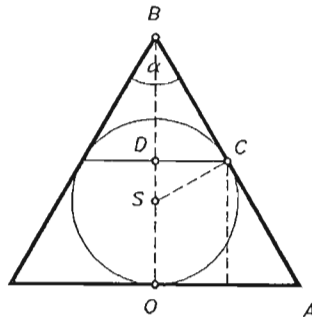
$$OA = AC = \frac{DO}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{r \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad CD = r \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$BD = CD \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad OB = r \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\cos^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^3 = 2 \cos^6 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \arcsin \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \approx 23^\circ 49'.$$



$$3. \quad y - 4 = k(x - 2), \quad y - 4 = \frac{1}{k}(x - 2) \Rightarrow \\ A = \left(2 - \frac{4}{k}, 0\right), \quad B = \left(0, 4 + \frac{2}{k}\right), \quad S = \left(1 - \frac{2}{k}, 2 + \frac{1}{k}\right); \\ x = 1 - \frac{2}{k}, \quad y = 2 + \frac{1}{k}. \text{ Eliminacijom parametra } k \text{ dobivamo: } y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}.$$

$$4. \quad a) \quad n = 3k, \quad \left[\frac{3k - k}{2}\right] = k = \left[\frac{3k + 1}{3}\right] \\ n = 3k + 1, \quad \left[\frac{3k + 1 - k}{2}\right] = k = \left[\frac{3k + 2}{3}\right] \\ n = 3k + 2, \quad \left[\frac{3k + 2 - k}{2}\right] = k + 1 = \left[\frac{3k + 2}{3}\right].$$

$$\begin{aligned} \text{b) } n &= 3k, \quad \left\lfloor \frac{3k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3k+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3k+2}{3} \right\rfloor = 3k \\ n &= 3k+1, \quad \left\lfloor \frac{3k+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3k+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3k+3}{3} \right\rfloor = 3k+1 \\ n &= 3k+2, \quad \left\lfloor \frac{3k+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3k+3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3k+4}{3} \right\rfloor = 3k+2. \end{aligned}$$

5. a) $M(729, 1653) = 3$, $243x \equiv 56 \pmod{551}$

q		2	3	1	2	1	4	1	2
P_s	1	2	7	9	25	34	161	195	551

$$n = 8, P_{n-1} = 195, b = 56 \Rightarrow x \equiv -195 \cdot 56 \equiv 100 \pmod{551}$$

$$\text{Rješenje: } x \equiv 100, 651, 1202 \pmod{1653}$$

$$\text{b) } m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 1001 = 7 \cdot 143 = 11 \cdot 91 = 13 \cdot 77 \Rightarrow$$

$$M_1 = 143, M_2 = 91, M_3 = 77.$$

$$M_1 \cdot M'_1 \equiv 1 \pmod{7}, M_2 \cdot M'_2 \equiv 1 \pmod{11}, M_3 \cdot M'_3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow$$

$$M'_1 = 5, M'_2 = 4, M'_3 = 12.$$

$$x_0 = 143 \cdot 5 \cdot 3 + 91 \cdot 4 \cdot 2 + 77 \cdot 12 \cdot 10 = 12113 \Rightarrow x \equiv 101 \pmod{1001}.$$

11. 6.1993.

1. Riješite jednađbu: $\text{tg}(\text{ctg } x) - \text{ctg}(\text{tg } x) = 0$.

2. Zadan je pravilni tetraedar $ABCD$ s bridom duljine a . Odredite radijus r sfere koja prolazi vrhovima C i D , te polovištima bridova AB i AC .

3. Na pravcu $x - y + 5 = 0$ odredite one točke koje s točkama $A(2, -5)$ i $B(-6, 7)$ čine pravokutan trokut. Izračunajte površine dobivenih pravokutnih trokuta.

4. Niz (a_n) je definiran na sljedeći način: $a_1 = 2$, a za $n \geq 2$ je a_n najveći prosti broj koji dijeli broj $1 + a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$. Dokažite da broj 5 nije član niza (a_n) .

5. Neka je m prirodan broj veći od 1, te neka je B skup svih brojeva u nizu $1, 2, \dots, m$ koji su relativno prosti sa m . Dokažite da je

$$\sum_{b \in B} b = \frac{m}{2} \varphi(m).$$

Neka je a prirodan broj koji je relativno prost sa m . Izračunajte: $\sum_{b \in B} \left\{ \frac{ab}{m} \right\}$. Ovdje $\left\{ \frac{ab}{m} \right\}$

označava razlomljeni dio broja $\frac{ab}{m}$, tj. $\left\{ \frac{ab}{m} \right\} = \frac{ab}{m} - \left[\frac{ab}{m} \right]$.

RJEŠENJA:

$$\begin{aligned} 1. \text{tg}(\text{ctg } x) &= \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \text{tg } x \right) \Rightarrow \text{ctg } x = \frac{\pi}{2} - \text{tg } x + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \\ &= \frac{\pi}{2} + k\pi \cdot \frac{2}{\sin 2x} = \frac{\pi(2k+1)}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{\pi(1+2k)}. \text{ Mora biti } -1 \leq \frac{4}{\pi(1+2k)} \leq 1, \\ &\text{tj. } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}. \end{aligned}$$

$$\text{Sada je } x = (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{\pi(1+2k)} + \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}.$$