Matematika 1 – prva zadaća

Za ostvariti maksimalan učinak, dovoljno je sakupiti 15 bodova.

(1) **(3 boda)** Zapišite slijedeće sudove riječima i odredite im istinitost. Notacija $n|m$ znači da je cijeli broj m diljeljiv sa cijelim brojem n. $\mathcal{P}(S)$ je oznaka za partitivni skup od S. $\mathbb{N}$ označaca skup prirodnih, $\mathbb{Z}$ skup cijelih, $\mathbb{Q}$ skup racionalnih, a $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva.

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(4|(m+n))$
(ii) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! m \in \mathbb{Z})(m+n=0)$
(iii) $(\exists n \in \mathbb{Q})(\forall m \in \mathbb{Q})(m \cdot n = n)$
(iv) $(\exists! x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})(x^2 \in \mathbb{Q})$
(v) $(\exists S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))(\forall R \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))(S \subset R)$

(2) **(3 boda)** Pokažite iz istinitosnih tablica da je sud $(P \wedge \neg Q)$ negacija suda $(P \Rightarrow Q)$. Pokažite da su sudovi $(P \Rightarrow Q)$ i $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ jednaki. Sud $(Q \Rightarrow P)$ zovemo obratom, a sud $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ zovemo obratom po kontrapoziciji suda $(P \Rightarrow Q)$. Napišite obrat, negaciju, i obrat po kontrapoziciji suda

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^3 = y^3 \Rightarrow x = y)$$
$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$$
$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$$
$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow x^3 < y^3)$$
$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy < 0 \Rightarrow (x < 0 \vee y < 0))$$
$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy > 0 \Rightarrow (x > 0 \wedge y > 0))$$

(3) **(4 boda)** Sustav je zadan slijedećom aksiomatikom (Pojam isti nije primitivan pojam nego se odnosi na jednakost elemenata u skupu):

(i) U svakom društvu su barem dva čovjeka.
(ii) Svaki čovjek je u barem jednom društvu.
(iii) Dva društva su jednaka ako su u njima isti ljudi.

Ispitajte neproturiječnost i potpunost sustava. Za jedan aksiom po izboru odredite jeli nezavistan. Dokažite slijedeći teorem:

Ako postoji čovjek koji se nalazi u barem dva različita društva, tada ukupno postoje barem tri čovjeka.

(4) **(4 boda)** Sustav je zadan slijedećom aksiomatikom:

(i) Postoje barem tri različite točke koje ne leže na istom pravcu.
(ii) Za svake dvije točke postoji jednistveni pravac koji ih sadrži.
(iii) Za svaki pravac p i točku A koja ne leži na p, postoji jedinstveni pravac koji sadrži A i nema zajedničkih točaka sa p (tj. ne postoji točka koja leži na oba pravca).

Odredite primitivne pojmove. Ispitajte neproturiječnost i potpunost sustava. Za jedan aksiom po izboru odredite jeli nezavistan. Dokažite slijedeći teorem:

Postoje barem 4 točke.

(5) **(3 boda)** Nacrtajte Vennove diagrame i odredite odnose slijedećih skupova:

(i) $(A \setminus B) \cup C$ i $(A \cup C) \setminus B$
(ii) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A)$ i $(B \cap A) \setminus C$
(iii) $(A \cap C) \triangle (B \cap C)$ i $C \setminus (A \cap B)$
(iv) $(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A)$ i $B \triangle (C \cap A)$
(v) $C \setminus (A \triangle B)$ i $(A \cap C) \cup (C \setminus B)$
(vi) $(A \cap B) \cup (B \setminus C)$ i $B \setminus (A \triangle C)$
(vii) $(A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$ i $(A \triangle B) \setminus C$

(6) **(2 boda)** Zapišite $A \cap B$ koristeći samo uniju i komplementiranje.

(7) **(2 boda)** Zapišite $A \setminus B$ koristeći samo uniju i komplementiranje.

(8) **(2 boda)** Zapišite $A \cup B$ koristeći samo presjek i komplementiranje.

(9) **(3 boda)** Na skupu prirodnih brojeva definirana je relacija R sa

$$mRn \Leftrightarrow 3m \text{ i } 5n \text{ daju isti ostatak pri dijeljenju sa } 7.$$

Odredite jeli relacija R refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna. Ako je, dokažite, ako nije pokažite primjerom.

(10) Na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (katerzijavom produktu skupa cijelih brojeva sa samim sobom) dana le relacija R sa

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a \text{ i } c \text{ daju isti ostatak pri dijeljenju sa 2, ili}$$
$$b \text{ i } d \text{ daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3.}$$

Odredite jeli relacija R refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna. Ako je, dokažite, ako nije pokažite primjerom.

(11) Na partitivnom skupu skupa cijelih brojeva $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ dana je relacija r sa

$$ArB \Leftrightarrow (\exists n \in Z)(A = B \cup \{n\})$$

Odredite jeli relacija r refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna. Ako je, dokažite, ako nije pokažite primjerom.