Matematika 1 – Prvi kolokvij (Grupa B)

Za ostvariti maksimalan učinak, dovoljno je sakupiti ukupno 35 bodova.

Zadatak 1. Zapišite sljedeće sudove riječima i odredite im istinitost (**4 boda**):

(i) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(n > m)$
(ii) $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(m > n)$
(iii) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(m < n)$
(iv) $(\exists S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})(\forall R \in \mathbb{N})(R \subseteq S \Rightarrow R = S)$

Odredite negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji sljedećeg suda (**1.5 bodova**):

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{Z})(m > n \Rightarrow m \cdot n > 0)$$

Odredite istinitost originalnog i svih izvedenih sudova (**1.5 bodova**).

Zadatak 2. Odredite odnose sljedećih skupova (**4 boda**):

(i) $C \triangle (A \triangle B)$ i $(C \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$
(ii) $(A \setminus B) \setminus C$ i $A \triangle (B \cup C)$
(iii) $(A \triangle B)^c$ i $(A^c \triangle B)$

Nađite skup A takav da $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ i $A \notin \mathcal{P}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$ (**2 boda**)

Zadatak 3. (**2+3+2+2 boda**)

(a) Simbolima i riječima napišite definiciju injekcije i definiciju surjekcije. Kada je funkcija bijekcija?
(b) Ako je $f \circ g$ injekcija, dokažite da je onda i f injekcija, a ako je $f \circ g$ surjekcija, da je onda g surjekcija. Ovaj rezultat smo koristili da bi karakterizirali bijekciju pomoću pojma inverzne funkcije. Definirajte pojam inverzne funkcije, pa precizno iskažite taj teorem.
(c) Postoji li injekcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja nije surjekcija? Ako postoji nađite je.
(d) Odredite neke skupove A i B takve da ne postoji surjekcija $A \to B$ koja nije injekcija.

Zadatak 4. (**3+2+3 boda**)

(a) Definirajte relaciju ekvivalencije, klase ekvivalencije i kvocjentni skup.
(b) Na svakom skupu S koji ima više od jednog elementa postoje barem dvije različite relacije ekvivalencije. Za jednu je kvocjentni skup jednak skupu S, a za drugu je to jednočlan skup. Koje su to dvije relacije?
(c) Na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definirana je relacija $\sim$ sa

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{ postoji bijekcija } f : A \to B.$$

Dokažite da je to relacija ekvivalencije. Nađite injekciju $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$. Koristeći činjenicu da je svaki beskonačan podskup od $\mathbb{N}$ kardinalnosti $\aleph_0$ nađite bijekciju $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$.

Zadatak 5. (**2.5+2.5+3 boda**)

(a) Definirajte aksiomatski prirodne brojeve.
(b) Definirajte pojam rekurzivno zadane funkcije. Rekurzivno definirajte zbrajanje i množenje prirodnih brojeva
(c) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $x \neq 1$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Damjan Pištalo