Matematika 1 – Prvi kolokvij (Grupa A)

Za ostvariti maksimalan učinak, dovoljno je sakupiti ukupno 35 bodova.

Zadatak 1. Zapišite sljedeće sudove riječima i odredite im istinitost (**4 boda**):

(i) $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(m \leq n)$
(ii) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(n \leq m)$
(iii) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(m > n)$
(iv) $(\exists S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))(\forall R \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))(S \subseteq R \Rightarrow R = S)$

Odredite negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji sljedećeg suda (**1.5 bodova**):

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{Z})(m \cdot n > 0 \Rightarrow m > 0)$$

Odredite istinitost originalnog i svih izvedenih sudova (**1.5 bodova**).

Zadatak 2. Odredite odnose sljedećih skupova (**4 boda**):

(i) $(A \cap C) \triangle (B \cap (A \cup C))$ i $((B \cap C) \setminus A) \cup (A \cap (B \triangle C))$
(ii) $C \triangle (A \triangle B)$ i $C \setminus (A \cup B)$
(iii) $A^c \triangle B^c$ i $A \triangle B$

Nađite skup A takav da $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \setminus \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $A \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ (**2 boda**)

Zadatak 3. (**2+3+2+2 boda**)

(a) Simbolima i riječima napišite definiciju injekcije i definiciju surjekcije. Kada je funkcija bijekcija?
(b) Definirajte inverznu relaciju i inverz funkcije. Dokažite da je funkcija $f : A \to B$ bijekcija ako i samo ako postoji funkcija $g : B \to A$ takva da je $f \circ g = \mathrm{id}_B$ i $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Pri tome možete koristiti činjenicu da je kompozicija $f \circ g$ injekcija samo ako je f injekcija, odnosno surjekcija, samo ako je g surjekcija. Jeli kompozicija funkcija asocijativna? Dokažite.
(c) Postoji li surjekcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja nije injekcija? Ako postoji nađite je.
(d) Odredite neke skupove A i B takve da ne postoji injekcija $A \to B$ koja nije surjekcija.

Zadatak 4. (**3+2+3 boda**)

(a) Definirajte parcijalno uređen skup. Definirajte supremum, odnosno maksimum podskupa parcijalno uređenog skupa. Dajte primjer parcijalno uređenog skupa i nekog njegovog podskupa koji ima supremum ali ne i maksimum. Ako neki skup ima i supremum i maksimum, mogu li oni biti različiti? Mogu li supremum i infinum biti jednaki?
(b) Nađite primjer parcijalno uređenog skupa na kojem uređaj nije linearan.
(c) Postoli i injekcija $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ koja čuva uređaj? Ako postoji nađite je, ako ne postoji, dokažite.

Zadatak 5. (**2.5+2.5+3 boda**)

(a) Definirajte aksiomatski prirodne brojeve.
(b) Definirajte uređaj na skupu prirodnih brojeva. Definirajte oduzimanje prirodnih brojeva. Kako uređaj proširujemo na $\mathbb{N} \cup \{0\}$?
(c) Matematičkom indukcijom dokažite:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

Damjan Pištalo